PMR5215 – Otimização Aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos
6ª Lista de Exercícios
Otimização Numérica com Restrições: Métodos indiretos

Grupos de 2 alunos
Entrega: 15/05/2023

1 Introdução

Dado o problema de otimização com restrição:

$$\begin{array}{cc} \underset{x,y}{\text{Min}} & F(x,y) = x^2 + y^2 - 8x \\ \text{tal que} & G(x,y) = y - x + 2 \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

a) Escreva o Lagrangeano correspondente ao problema, em função das variáveis de otimização (x, y) e do multiplicador λ associado à restrição G.

b) Mostre que o ponto $x = 3, y = 1, \lambda = 2$ é ponto de mínimo do problema.

2 Penalização Externa

Um problema de otimização com restrições do tipo:

$$\begin{array}{cc} \underset{X}{\text{Min}} & F(X) \\ \text{tal que} & G_i(X) \geq 0 \end{array}$$

pode ser aproximado por um problema de otimização *sem* restrições na forma:

$$\underset{X}{\text{Min}}\, \Phi(X,r) = F(X) + r \sum_i \langle -G_i(X) \rangle^2$$

Onde

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{se}\, x \geq 0 \\ 0 & \text{se}\, x < 0 \end{cases}$$

e r é o *peso* de penalização.

a) Escreva a função penalizada $\Phi(x, y, r)$ correspondente ao problema (1).

b) Usando o método *Fastest Descent* (vide lista 5), resolva o problema de minimizar em (x, y) a função $\Phi(x, y, r)$ com $r = 16$. Utilize como ponto inicial $x = 0, y = 0$. Use como critério de parada a condição

$$|\Phi(x_i, y_i, r) - \Phi(x_{i-1}, y_{i-1}, r)| < \epsilon$$

com $\epsilon = 0.005$. Preencha um quadro com os resultados de cada passo do algoritmo até sua convergência. Inclua em cada ponto o valor da função objetivo, o seu gradiente e o valor da busca linear α. Você pode usar o quadro 1 como modelo.

Sugestão: Naturalmente, pode-se usar qualquer método de busca em linha adequado. Note no entanto que para esta função em particular, se α é ponto estacionário de $\Phi(x + \alpha s_x, y + \alpha s_y, r)$ então, seja

$$\hat{\alpha} = \frac{s_x(r(-x + y + 2) - x + 4) + s_y(r(x - 2) - (r + 1)y)}{-2rs_x s_y + (r + 1)s_x^2 + (r + 1)s_y^2}$$

e

$$\tilde{\alpha} = -\frac{(x - 4)s_x + ys_y}{s_x^2 + s_y^2}$$

Assim,

$$\alpha = \begin{cases} \hat{\alpha} & \text{se}\, G(x + \hat{\alpha}s_x, y + \hat{\alpha}s_y) < 0 \\ \tilde{\alpha} & \text{se}\, G(x + \hat{\alpha}s_x, y + \hat{\alpha}s_y) \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

O valor de $\hat{\alpha}$ corresponde ao resultado de uma busca em linha que supõe a restrição violada, enquanto que $\tilde{\alpha}$ supõe a restrição não-violada.

c) A Penalização externa produz funções notoriamente mal-condicionadas para otimização numérica. Para mitigar este problema, é melhor aumentar gradativamente o valor do peso r. Repita o exercício do ítem b) com valores sucessivos de $r = \{1/4, 1, 4, 16, 64, \ldots\}$, multiplicando por 4 o valor de r após cada iteração.

O ponto inicial de cada etapa de otimização deve ser o ponto *final* da etapa anterior. Use como ponto inicial da primeira etapa $x = 0, y = 0$. Você deve preencher quadros com os resultados intermediários da otimização. Anote em cada quadro o valor empregado de r. O processo deve ser repetido até que se obtenha um valor de (x, y) tal que:

$$\left| \frac{F(x, y) - \Phi(x, y, r)}{F(x, y)} \right| < 0,2\% \tag{3}$$

Atenção: Esta é uma condição *externa* de parada! Para cada passo interno de otimização sem restrição você deve usar a condição de parada do item 2b.

3 Lagrangeano Aumentado

O método do Lagrangeano Aumentado combina a função Lagrangeana com o método da penalização externa.

Um problema de otimização da forma

$$\begin{array}{cc} \underset{X}{\text{Min}} & F(X) \\ \text{tal que} & G_i(X) \geq 0 \end{array}$$

pode ser aproximado por um problema de otimização *sem* restrições na forma:

$$\underset{X}{\text{Min}}\, \Phi(X, \lambda, r) = F(X) + r \sum_i \left\langle \frac{\lambda_i}{2r} - G_i(X) \right\rangle^2 \tag{4}$$

Onde r é o peso de penalização e cada λ_i é uma estimativa do multiplicador correspondente à restrição G_i.

As estimativas λ_i podem ser melhoradas com o resultado final X^* da otimização em (4).

$${\lambda_i}^* = \max(\lambda_i - 2rG_i(X^*), 0) \tag{5}$$

Onde ${\lambda_i}^*$ é a nova estimativa (melhorada) do multiplicador λ_i.

a) Repita o ítem 2c agora com o método do Lagrangeano aumentado. Novamente, use valores sucessivos de $r = \{1/4, 1, 4, 16, 64, \ldots\}$. Use o mesmo critério de parada externo em (3), com a função Φ do método de penalização externa (adote $\lambda = 0$ para este cálculo). O ponto inicial novamente deve ser $x = 0, y = 0$. A primeira estimativa para o multiplicador correspondente à restrição G deve ser $\lambda = 0$. Ao final de cada otimização via *Steepest Descent*, a estimativa para λ deve ser corrigida de acordo com (5). Você deve preencher quadros com os resultados intermediários da otimização. Anote em cada quadro os valores empregado de r e λ.

   Sugestão: Novamente, use qualquer método de busca em linha adequado. De todo modo, se α é mínimo de $\Phi(\{x + \alpha s_x, y + \alpha s_y\}, \lambda, r)$ e definido-se,

$$\hat{\alpha} = \frac{s_y(\lambda + 2r(x - y - 2) - 2y) - s_x(\lambda + 2r(x - y - 2) + 2x - 8)}{-4rs_xs_y + 2(r+1)s_x^2 + 2(r+1)s_y^2}$$

$$\tilde{\alpha} = -\frac{(x-4)s_x + ys_y}{s_x^2 + s_y^2}$$

   Assim,

$$\alpha = \begin{cases} \hat{\alpha} & \text{se}\, G(x + \hat{\alpha}s_x, y + \hat{\alpha}s_y) < \frac{\lambda}{2r} \\ \tilde{\alpha} & \text{se}\, G(x + \hat{\alpha}s_x, y + \hat{\alpha}s_y) \geq \frac{\lambda}{2r} \end{cases} \tag{6}$$

b) Compare os resultados dos itens 1b, 2b, 2c e 3a em termos de número *total* de iterações, valores finais de x, y, valor da função objetivo e valor da restrição.

Quadro 1: Modelo para resultado do método "*Steepest Descent*"

Iter.	x	y	$F(x,y)$	$G(x,y)$	$\Phi(x,y)$	$\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}y$	α
0	0	0						
1								
2								
3								
5								
6								
7								
...								