PMR-5215 – Otimização Aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos

4ª Lista de Exercícios
(grupo de 2 alunos)

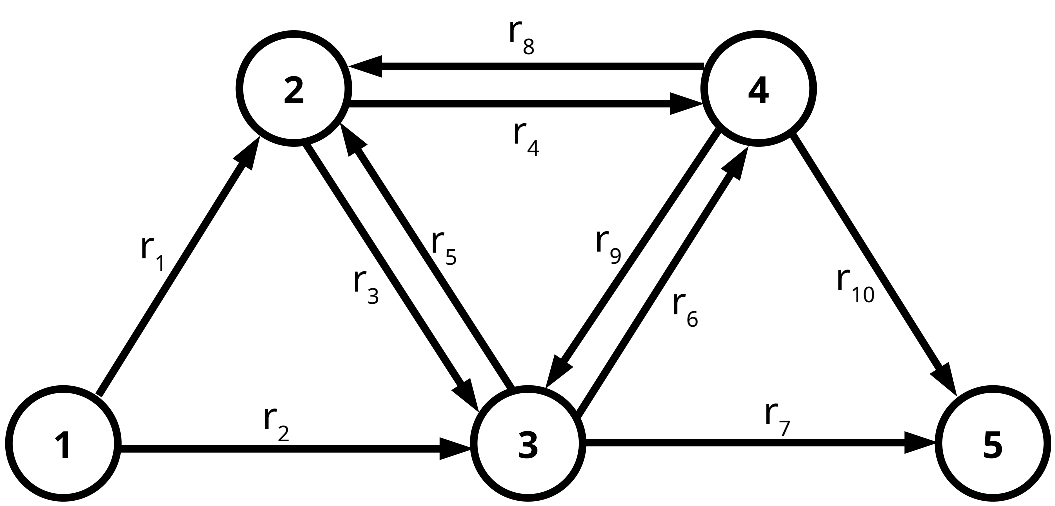
Entrega: 24/04/23

1- Dados os problemas de otimização abaixo:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2x_1+3x_2 \\ \text{tal que} & 4x1+x2\leq 4 \\ & x_2\leq 2 \\ & x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Min} & x_1+6x_2 \\ \text{tal que} & 4x1+x2\geq 2 \\ & x_1+6x_2\geq 2 \\ & x1-2x_2\leq 0 \\ & x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{Max} & x_1+x_2 \\ \text{tal que} & x_1+3x_2\leq 2 \\ & 3x_1-x_2\geq 7 \\ & x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{array}$$

Para cada um deles desenhe o domínio viável e as curvas de nível da função objetivo. Indique a solução do problema.

2. Considere o seguinte grafo:



Seja o problema de se encontrar a rota entre o vértice 1 e o 5 com o menor custo. O custo individual de se percorrer cada rota é dado pela tabela:

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Custo	3	1	1	1	1	3	4	1	2	1

Este problema pode ser resolvido por programação linear. Para tanto, considere a representação de um trajeto por um vetor $\boldsymbol{r}=\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\}$ cuja *i*-gésima posição contém o número de vezes que a rota *i* é percorrida. Por exemplo, o trajeto 1→ 3→ 5 é representado pelo vetor {0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0}, enquanto que a rota 1→ 2→ 4→ 5 é representada pelo vetor {1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1} (verifique!).

a) Escreva a função custo total de um trajeto em função das variáveis r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9. Use os custos da tabela acima.

b) Observe que para cada vértice fora dos extremos do grafo (nós 2, 3 e 4), a quantidade de vezes que se entra no nó deve ser maior ou igual à quantidade de vezes que se sai do nó. No caso do nó de destino (5), deve-se entrar ao menos **uma** vez (não há vértices de saída), e no nó de origem (1) a quantidade de vezes que se sai deve ser de ao menos **uma** (do mesmo modo, não há vertices de entrada). Escreva para cada um dos vértices usando as variáveis r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9 as desigualdades correspondentes a estas restrições. Nota: Estas restrições poderiam ser de *igualdade* estrita, mas como o problema busca minimizar a quantidade de vezes em que uma rota é percorrida, a desigualdade é suficiente.

c) Adicione às restrições do item (b) as restrições de não-negatividade $r_i \geq 0$ e monte o problema linear de minimização de custo de rota. Resolva o problema usando um pacote numérico (trata-se de um problema com 10 variáveis e 15 restrições!). Reproduza o grafo e indique a rota ótima obtida. Qual o custo total da rota?

3. Algoritmo de Dijkstra

O algoritmo de Dijkstra é um método para encontrar rotas em grafos. Ele consiste em atribuir para vértices no grafo valores correspondentes ao custo **mínimo** de trajeto até o vértice partindo-se do vértice de origem. Nesta situação, ao nó de destino deve ser atribuído o custo total do trajeto. Os valores de cada nó são tradicionalmente obtidos via programação dinâmica.

É possível no entanto obtê-los por programação linear.

De fato, considere o vetor de valores atribuídos a cada um dos vértices $\boldsymbol{v} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Note que se existe uma rota com custo r que liga o vértice i ao vértice j, então $v_j - v_i \leq r$. De fato, se v_i é o custo de se chegar da origem ao vértice v_i, então $v_j \leq v_i + r$ pois é sempre possível ir da origem até i e depois com custo adicional r chegar-se a j.

a) Escreva para cada rota do grafo as restrições correspondentes aos valores v_i dos vértices por ela conectados. Use os valores da tabela da questão 2.

b) Os valores do algoritmo de Dijkstra são os valores que **maximizam** a diferença entre o valor atribuído ao vértice de destino e o de origem $v_5 - v_1$ sujeitos às restrições do item (a). Monte o problema de programação linear com esta função objetivo, as restrições do item (a) e restrições de não-negatividade $v_i \geq 0$. Resolva o problema linar com um pacote numérico. Reproduza o grafo e indique os valores obtidos. Qual a diferença entre o valor atribuído ao nó de destino e o de origem?

c) Mostre que o problema linear do item (b) é o problema *Dual* do problema do item 2c.