PMR5215 – Otimização Aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos
3ª Lista de Exercícios

Grupos de 2 alunos
Entrega: 17/04/2023

1 Encontrando pontos críticos

Considere o problema de otimização:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 x_2 \\ \text{tal que} & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 25 \end{array} \tag{1}$$

a) Plote o Gradiente da função objetivo e o domínio viável do problema usando a representação que achar conveniente.

b) Escreva a função Lagrangeana do Problema.

c) Enumere hipóteses sobre os multiplicadores de Lagrange (igualdade ou não a zero). Para cada combinação de hipóteses, encontre os pontos e os multiplicadores de Lagrange que anulem o gradiente da função Lagrangeana. Atenção! Algumas combinações podem gerar múltiplas soluções!

d) Para cada combinação de hipóteses do item c, repita a plotagem do domínio viável acrescentando:

- Os pontos obtidos.
- Em cada ponto, o gradiente da função objetivo e o gradiente das restrições ativas.

e) Quais pontos atendem às condições KKT?

f) Para os pontos do item e), compare o número de restrições ativas e o número de variáveis. As condições KKT são suficientes em todos os pontos? Caso contrário, considere a matriz Hessiana da função Lagrangeana e verifique se os pontos em questão são efetivamente de mínimo local.

2 Calculando valores dos multiplicadores

Introdução

Seja o problema de otimização:

$$\begin{array}{cc} \underset{x}{\text{Min}} & F(x) \\ \text{tal que} & G_i(x) \geq 0 \end{array}$$

A correspondente Função Lagrangeana é:

$$L(x, \lambda) = F(x) - \sum_i \lambda_i G(x)$$

Onde λ_i é o valor do multiplicador de Lagrange correspondente à restrição G_i. É possível definir valores dos multiplicadores de Lagrange em *todos* os pontos do domínio (mesmo os pontos inviáveis e não-estacionários). Estes valores são a solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{array}{cc} \underset{\lambda}{\text{Min}} & \left\| \nabla F(x) - \sum_i \lambda_i \nabla G_i(x) \right\|^2 \\ \text{tal que} & G_i \neq 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \end{array} \tag{2}$$

Onde x é o ponto do domínio em questão. Assim, os valores dos multiplicadores são os valores de λ_i que *minimizam* a norma l_2 do gradiente da função Lagrangeana no ponto x (nos pontos em que a condição de estacionariedade é satisfeita, esta norma é nula).

Estes valores são sujeitos à condição de complementariedade, ou seja, se um determinado ponto *não* está na fronteira de uma restrição G_i (ou seja, $G_i \neq 0$) então o correspondente multiplicador λ_i é nulo.

Deste modo, o procedimento para se obter os valores dos multiplicadores em um dado ponto x é:

1. Calcule o valor de cada restrição G_i.
2. Monte o problema de mínimos quadrados (2) considerando restrições de $\lambda_i = 0$ para cada $G_i \neq 0$.
3. Resolva o problema (2) nos multiplicadores restantes.

Alocação de Empuxo

Um *propulsor azimutal* é um tipo especial de propulsor de barco cujo azimute (direção horizontal) é variável. A Figura 2 mostra uma instalação de propulsores azimutais em uma embarcação. O uso de tais propulsores permite empuxos em direções que seriam inviáveis com propulsores fixos. Deste modo, uma embarcação assim equipada possui uma maior versatilidade de manobras do que embarcações com propulsores convencionais.

Considere a embarcação modelada na Figura 2. A ação dos propulsores azimutais é representada por suas componentes (x_1, y_1) e (x_2, y_y). Seja o problema de saber qual o maior momento em guinada a bombordo que pode ser gerado

$$M(x_1, y_1, x_2, y_2) = L\,(x_1 + x_2) - B\,(y_1 - y_2)\,. \tag{3}$$

[1]Fonte: Siemens AG

Figura 1: Propulsores azimutais de navio[1]

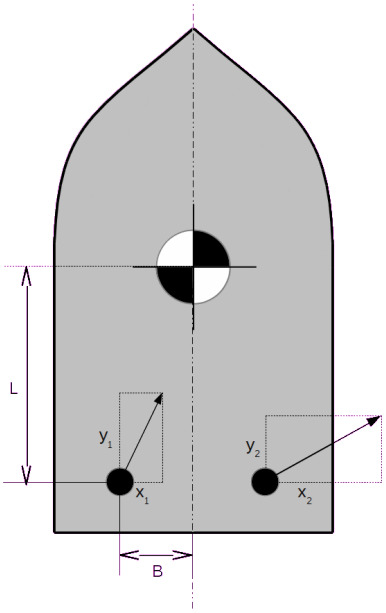

Figura 2: Modelo de Navio Azimutal

sujeito à restrição de que cada propulsor tem um empuxo máximo $T_{\max}$:

$$\begin{array}{rcl} {x_1}^2 + {y_1}^2 & \leq & {T_{\max}}^2 \\ {x_2}^2 + {y_2}^2 & \leq & {T_{\max}}^2 \end{array} \tag{4}$$

Pede-se:

a) Monte o Lagrangeano do problema.

b) Seja $R = \sqrt{L^2 + B^2}$. Considere os pontos:

1: $\begin{array}{ll} x_1 = 0 & y_1 = -T_{\max} \\ x_2 = 0 & y_2 = T_{\max} \end{array}$

2: $\begin{array}{ll} x_1 = 0 & y_1 = 0 \\ x_2 = T_{\max} & y_2 = 0 \end{array}$

3: $\begin{array}{ll} x_1 = T_{\max} L/R & y_1 = -T_{\max} B/R \\ x_2 = T_{\max} L/R & y_2 = T_{\max} B/R \end{array}$

Para cada um dos pontos encontre o valor dos multiplicadores de Lagrange.

4: Quais pontos satisfazem as condições KKT?

5: O problema é convexo? Qual o seu máximo global?