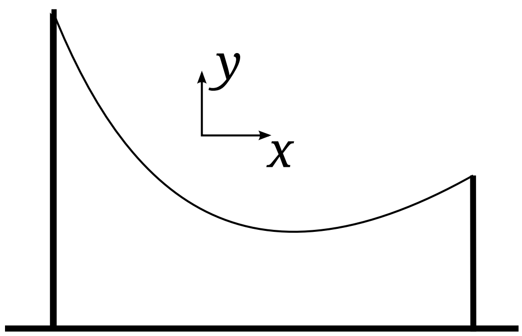
PMR-5215 – Otimização Aplicada ao Projeto de Sistemas Mecânicos

Lista de Exercícios
(grupo de 2 alunos)

Entrega: 10/03/23

Catenária.

Uma corda de comprimento *l* está suspensa entre dois pontos:



Seja *y(x)* a altura da corda em função da coordenada horizontal.
Neste caso, a energia potencial gravitacional total da corda entre dois pontos é dada por:

$$E=\int \gamma\, y(x)\frac{ds}{dx}\,dx$$

onde γ é o *peso específico* da corda por unidade de comprimento e *ds*/*dx* é a variação do comprimento da corda pelo deslocamento horizontal.

Note que $ds^2 = dy^2 + dx^2$, de modo que $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\frac{dy}{dx}}$, ou seja, $E=\int \gamma\, y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$

Por outro lado, o comprimento total *l* é igual à integral desta variação:

$$l=\int \frac{ds}{dx}dx=\int \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$$

a) Escreva o Lagrangeano do problema de se encontrar a forma *y(x)* da corda que minimiza a energia potencial gravitacional total sujeita à restrição de que o comprimento total deve ser *l*.

b) Variacione o Lagrangeano e encontre a equação diferencial em *y(x)* que deixa o Lagrangeano estacionário. Tente simplificar ao máximo a sua resposta.

c) Você deve ter encontrado uma equação diferencial de segunda ordem no item b). Encontre agora a partir do Lagrangeano *um valor constante* em função unicamente de *y(x)* e *y'(x)* ao longo da corda (ou seja, encontrar uma equação diferencial do primeiro grau).
Sugestão: Embora as derivadas da equação do item b) sejam em relação à variável *x*, a equação pode

ser integrada em *y* observando-se que $y''(x)=\frac{d}{dx}y'=\frac{dy}{dx}\frac{dy'}{dy}=y'\frac{dy'}{dy}$ e que $\frac{d}{dy}\frac{y}{\sqrt{u}}=\frac{1}{\sqrt{u}}-\frac{yu'}{2u^{3/2}}$. Alternativamente, aplique a *Identidade de Beltrami*.

d) Mostre que a curva da catenária *y(x)* = *a* cosh(*(x-b)/a*), onde *a* e *b* são constantes, é solução da equação diferencial do item c). $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ é a função *cosseno hiperbólico.* Note que $\frac{d}{dx}\cosh(x)=\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ e que $1+\sinh(x)^2=\cosh(x)^2$.