



PME3210 – Mecânica dos Sólidos I – P2 – 07/07/2023

Duração: 120 minutos

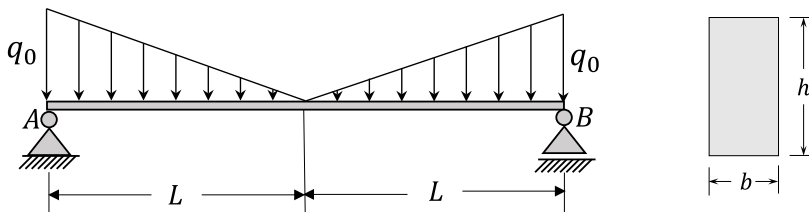
Só é permitido o uso de calculadoras simples (4 operações e raiz quadrada) na prova.

Nome: _____ N.USP: _____ Assinatura: _____

1ª Questão (3,5 pontos)

A viga prismática biapoiada da figura está submetida ao carregamento indicado. A seção transversal da barra é retangular e tem as dimensões indicadas. O material da viga tem comportamento elástico-linear. Pedem-se:

- O diagrama de forças cortantes;
- O diagrama de momentos fletores;
- A tensão normal máxima;
- A tensão de cisalhamento máxima.

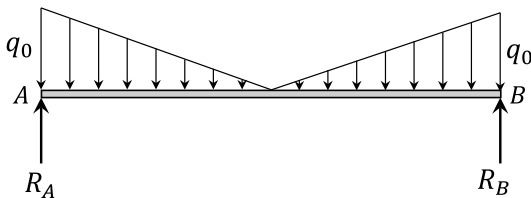


Solução:

a)
DCL

Equilíbrio:

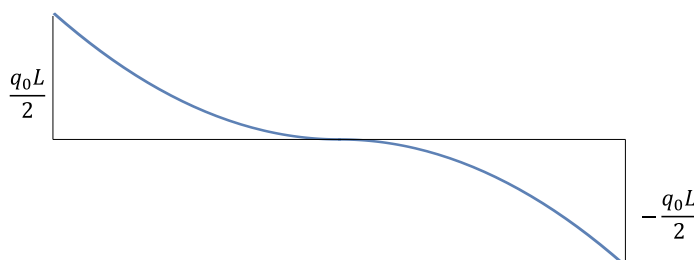
$$R_A = R_B = \frac{q_0 L}{2}$$



Como a estrutura é simétrica e o carregamento é simétrico, o gráfico da força cortante será antissimétrico. Assim, basta estudar a primeira metade da viga e depois rebater o gráfico. Dessa maneira, para $(0 \leq x \leq L)$,

$$q(x) = q_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \Rightarrow V(x) = \frac{q_0}{2L} (L - x)^2$$

Então o gráfico da força cortante é:



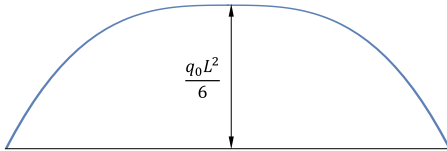
(1,5 ponto)



b) Como a estrutura é simétrica o gráfico do momento fletor será simétrico. Assim, basta estudar a primeira metade da viga e depois rebater o gráfico. Assim, para $(0 \leq x \leq L)$:

$$M(x) = \frac{q_0 x}{6L} (3L^2 - 3Lx + x^2)$$

Então o gráfico do momento fletor é:



(1,0 ponto)

c) Como a seção transversal é simétrica em relação à linha neutra, a tensão normal máxima de compressão será igual à tensão máxima de tração. Ambas ocorrerão onde o momento fletor é máximo, ou seja, no meio do vão:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{I} \frac{h}{2} = \frac{q_0 L^2}{6} \frac{12}{bh^3} \frac{h}{2} \Rightarrow \sigma_{m\acute{a}x} = \frac{q_0 L^2}{bh^2}$$

(0,5 ponto)

d) A tensão de cisalhamento máxima ocorrerá nas seções em que o módulo da força cortante for máximo, ou seja, nas extremidades da viga:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{3}{2} \frac{V_{m\acute{a}x}}{A} = \frac{3}{2} \frac{q_0 L}{2} \frac{1}{bh} \Rightarrow \tau_{m\acute{a}x} = \frac{3}{4} \frac{q_0 L}{bh}$$

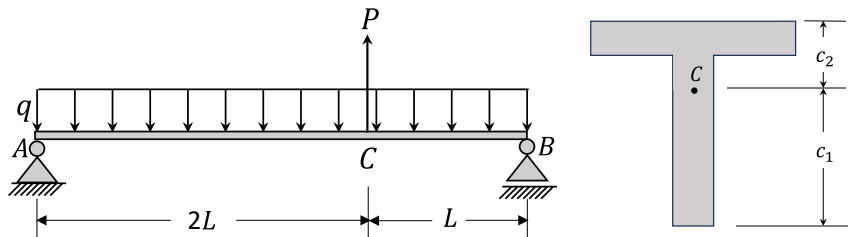
(0,5 ponto)



2ª Questão (3,5 pontos)

A viga prismática biapoiada da figura está submetida aos carregamentos indicados. A seção transversal da viga tem a forma de um T. São dados o momento de inércia em relação à linha neutra I e as distâncias do centroide às duas extremidades da seção, indicadas na figura. Pedem-se:

- As reações;
- O diagrama de forças cortantes;
- O diagrama de momentos fletores;
- As tensões normais máximas de tração e compressão.



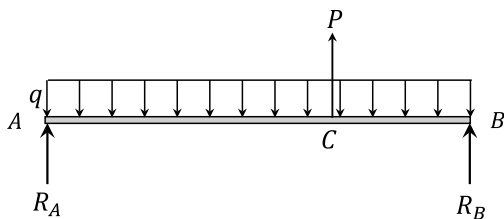
São dados: $q = 40 \text{ kN/m}$ $P = 180 \text{ kN}$ $L = 2 \text{ m}$ $I = 25000 \text{ cm}^4$ $c_1 = 20 \text{ cm}$ $c_2 = 10 \text{ cm}$

Solução:

a)

DCL:

Equilíbrio:



$$R_A = \frac{3qL}{2} - \frac{P}{3} = 60 \text{ kN}$$

$$R_B = \frac{3qL}{2} - \frac{2P}{3} = 0$$

(0,5 ponto)

b)

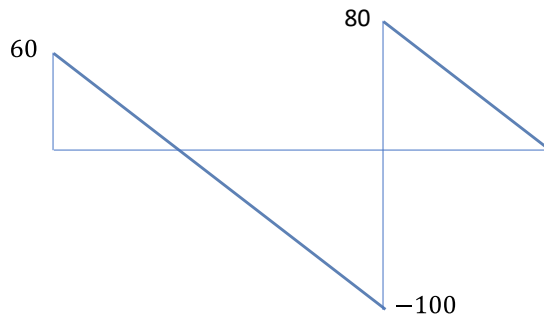
Como a força distribuída é uniforme, o diagrama de forças cortantes é formado por trechos de retas. No ponto de aplicação da força P existe uma descontinuidade igual ao valor dessa força. Assim, podemos dividir a equação da força cortante em duas partes:

Para o trecho entre A e C , orientando a abscissa x da direita para a esquerda:	Para o trecho entre B e C , orientando a abscissa x' da esquerda para a direita:
$V(x) = 60 - 40x$	$V(x') = 40x'$
$(x \rightarrow m \Rightarrow V \rightarrow \text{kN})$	$(x' \rightarrow m \Rightarrow V \rightarrow \text{kN})$

Dessa maneira, o gráfico das forças cortantes terá a forma:



$V(kN)$



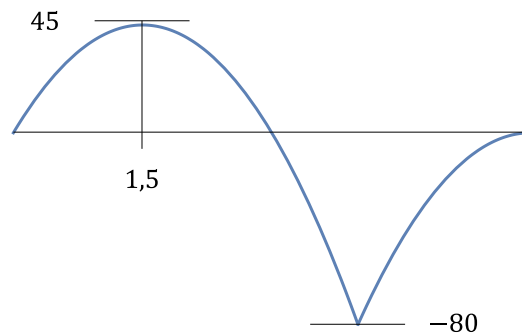
(1,0 ponto)

c) Como o gráfico da força cortante é formado por trechos de retas, o gráfico do momento fletor é formado por trechos de parábolas. No ponto de aplicação da força P há um “vinco”. Dividindo a equação do momento fletor em duas partes, como fizemos para a força cortante, teremos:

Para o trecho entre A e C , orientando a abscissa x da direita para a esquerda: $M(x) = 20x(3 - x)$ $(x \rightarrow m \Rightarrow M \rightarrow kNm)$	Para o trecho entre B e C , orientando a abscissa x' da esquerda para a direita: $M(x') = -20x'^2$ $(x' \rightarrow m \Rightarrow M \rightarrow kNm)$
--	--

Assim, o gráfico de momentos fletores terá a forma

$M(kNm)$



Note que o gráfico tem dois picos, um no ponto entre A e C em que a força cortante é nula é outro no ponto C .

(1,0 ponto)



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

d) As tensões de tração e compressão máximas ocorrerão nos picos de momento fletor. Como há dois picos, temos que analisar os dois:

Para $x = 1,5 \text{ m} \rightarrow M = 45 \text{ kNm}$ $\sigma_t = \frac{M}{I} c_1 = 36 \text{ MPa}$ $\sigma_c = \frac{M}{I} c_2 = 18 \text{ MPa}$	Para $x = 4 \text{ m}$ (Ponto C) $\rightarrow M = -80 \text{ kNm}$ $\sigma_t = \frac{ M }{I} c_1 = 32 \text{ MPa}$ $\sigma_c = \frac{ M }{I} c_2 = 64 \text{ MPa}$
--	---

Portanto, a tensão máxima de tração na viga é de 36 MPa e a tensão máxima de compressão é de 64 MPa .

(1,0 ponto)

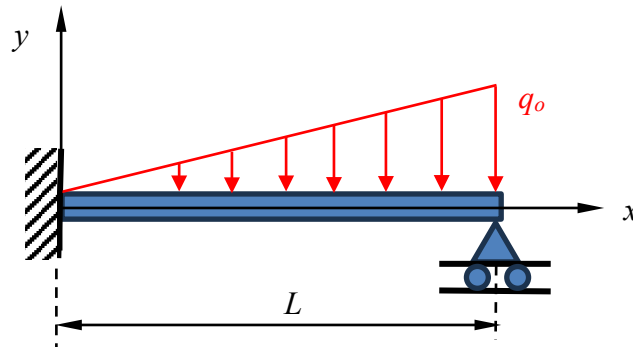


3ª Questão (3,0 pontos)

A viga indicada na figura está submetida a um carregamento linearmente distribuído de intensidade máxima q_o . Pede-se:

- Obter a equação da linha elástica;
- Obter o máximo deslocamento transversal e sua posição de ocorrência;
- Indicar cinco hipóteses necessárias para que os cálculos realizados nos itens anteriores possam ser considerados válidos.

Dados: q_o , L , EI .



Solução:

- a) Partindo da E.D.O. de 4ª ordem teremos:

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = -q(x) = -\frac{q_o x}{L}$$

Integrando sucessivamente:

$$EI \frac{d^3 v(x)}{dx^3} = -\frac{q_o x^2}{2L} + C_1$$

$$EI \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -\frac{q_o x^3}{6L} + C_1 x + C_2$$

$$EI \frac{dv(x)}{dx} = -\frac{q_o x^4}{24L} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI v(x) = -\frac{q_o x^5}{120L} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Condições de contorno:

- $v(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$
- $v'(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$
- $v''(L) = 0 \Rightarrow C_1 L + C_2 = q_o L^2 / 6$
- $v(L) = 0 \Rightarrow C_1 L + 3C_2 = q_o L^2 / 20$

Logo:

$$C_2 = -\frac{7}{120} q_o L^2$$

$$C_1 = \frac{9}{40} q_o L$$

Assim, a equação da linha elástica fica dada por:

$$v(x) = \frac{q_o x^2}{EI} \left(-\frac{x^3}{120L} + \frac{3}{80} Lx - \frac{7}{240} L^2 \right)$$

(1,5 pontos)



b) Avaliando os pontos críticos da função $v(x)$:

$$v'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = (10x^3 - 27L^2x + 14L^3)x = 0$$

É evidente que deve haver uma única raiz para a função $f(x)$ no intervalo $0 < x < L$. Assim, testando a função para alguns valores intermediários de x , encontramos:

$$x = 0,5L \Rightarrow f(x) = 0,875L^4$$

$$x = 0,6L \Rightarrow f(x) = -0,04L^4$$

$$x = 0,59L \Rightarrow f(x) = 0,1238L^4$$

Interpolando:

$$\frac{x_{cr} - 0,59L}{0,01L} = \frac{0 - 0,1238L^4}{-0,1638L^4} \Leftrightarrow x_{cr} \cong 0,5976L$$

Resultando:

$$v_{\max} = v(x_{cr}) \cong -0,00305 \frac{q_o L^4}{EI}$$

(0,5 ponto)

c) Os cálculos estão baseados nas seguintes hipóteses:

- Material homogêneo;
- Material isótropo;
- Material com comportamento elástico-linear;
- Regime de pequenos deslocamentos, pequenas deformações e pequenas rotações (linearidade geométrica);
- Plano xy é um plano de simetria da viga;
- Carregamento também está aplicado no plano xy , sendo este o plano de flexão da viga.

(1,0 ponto)