Q1: __________
Q2: __________
Q3: __________
Nota: ________

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

PME3210 – Mecânica dos Sólidos I – P1 – 17/05/2023

Duração: 120 minutos

Só é permitido o uso de calculadoras simples (4 operações e raiz quadrada) na prova.

Nome: ______________________________________ N.USP: __________ Assinatura: ___________________

1ª Questão (3,5 pontos)

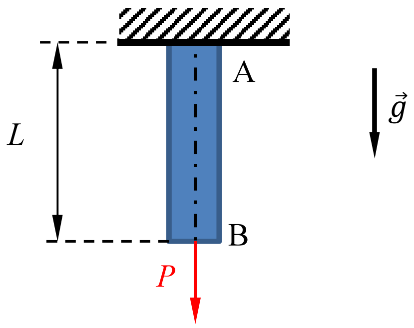
A barra AB indicada na figura, de comprimento L e área de seção transversal A, está submetida à ação de seu peso próprio e de uma força concentrada de magnitude P na extremidade inferior. O material da barra possui massa específica μ e sua relação tensão-deformação segue a lei de Ramberg-Osgood, dada por:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha\frac{\sigma_0}{E}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m$$

Considerando que a força concentrada P tenha o mesmo valor do peso próprio da barra, determine:

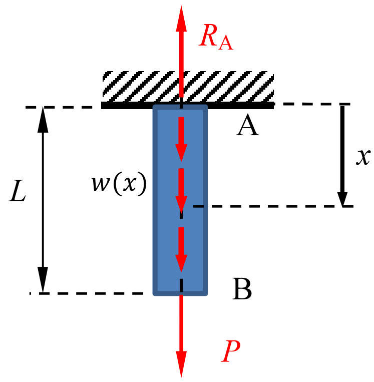
a) a reação de apoio em A (0,5 pto);
b) a distribuição de forças normais internas ao longo da barra e o diagrama de forças normais (1,0 pto);
c) a maior tensão normal atuante na barra e seu local de ocorrência (0,5 pto);
d) a variação de comprimento (δ) da barra AB devido à ação combinada dos esforços externos (1,5 pto).

Obs: Expresse as respostas em função dos seguintes parâmetros: μ, A, g, L, E, α, σ_0, m.



Solução:

a) O diagrama de corpo livre da barra AB está indicado abaixo:



O carregamento axial distribuído (por unidade de comprimento) é dado por:

$$w(x) = \mu A g$$

Pelo enunciado do problema a força concentrada aplicada em A é tal que:

$$P = \int_0^L w(x)dx = \mu A g L$$

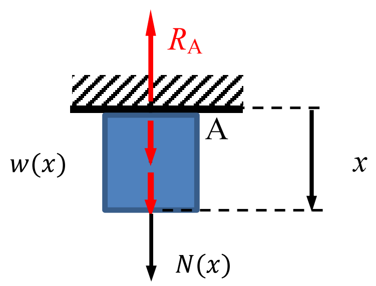
Impondo o equilíbrio de forças na direção vertical, teremos:

$$R_A = P + \int_0^L w(x)dx = P + \mu AgL$$

Logo:

$$R_A = 2P = 2\mu AgL$$

b) Força normal interna em uma seção genérica do trecho 1:



Equilíbrio de forças na vertical (para o segmento considerado):

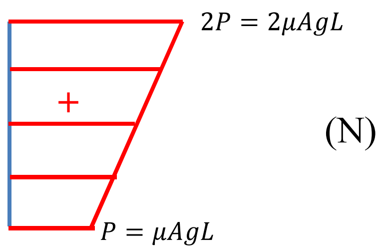
$$N(x) + \int_0^x w(x)dx = R_A$$

$$N(x) + \mu Agx = 2\mu AgL$$

Logo:

$$N(x) = \mu Ag(2L - x), \quad (0 \leq x \leq L)$$

O diagrama de forças normais fica então dado por:



c) As tensões internas ficam dadas, portanto, por:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{\mu Ag(2L - x)}{A} = \mu g(2L - x), \qquad (0 \leq x < L)$$

Logo:

$$\sigma_{máx} = \sigma(0) = 2\mu gL \text{ (seção mais solicitada: seção A)}$$

d) A variação de comprimento total (δ) da barra é dada por:

$$\delta = \int_0^L \varepsilon(x)dx$$

Pela lei de Ramberg-Osgood, o alongamento ao longo da barra é dado por:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} + \alpha\frac{\sigma_0}{E}\left(\frac{\sigma(x)}{\sigma_0}\right)^m = \frac{\mu g(2L-x)}{E} + \alpha\frac{\sigma_0}{E}\left(\frac{\mu g(2L-x)}{\sigma_0}\right)^m$$

Faremos uma mudança na variável de integração na forma:

$$2L - x = \xi$$

$$dx = -d\xi$$

$$x = 0 \Rightarrow \xi = 2L, \quad x = L \Rightarrow \xi = L$$

Logo:

$$\delta = -\int_{2L}^{L}\left[\frac{\mu g\xi}{E} + \alpha\frac{\sigma_0}{E}\left(\frac{\mu g\xi}{\sigma_0}\right)^m\right]d\xi$$

$$\delta = \int_{L}^{2L}\left[\frac{\mu g\xi}{E} + \alpha\frac{\sigma_0}{E}\left(\frac{\mu g\xi}{\sigma_0}\right)^m\right]dy$$

$$\delta = \left(\frac{\mu g\xi^2}{2E}\right)\Bigg|_L^{2L} + \alpha\frac{\sigma_0}{E}\left(\frac{\mu g}{\sigma_0}\right)^m\left(\frac{\xi^{m+1}}{m+1}\right)\Bigg|_L^{2L}$$

$$\delta = \frac{3\mu gL^2}{2E} + \alpha\frac{\sigma_0}{E(m+1)}\left(\frac{\mu g}{\sigma_0}\right)^m\left[(2L)^{m+1} - (L)^{m+1}\right]$$

Simplificando:

$$\delta = \frac{3}{2}\frac{\mu gL^2}{E} + \frac{\alpha\sigma_0}{E}\frac{(2^{m+1}-1)}{(m+1)}\left(\frac{\mu gL}{\sigma_0}\right)^m L$$

2ª Questão (3,0 pontos)

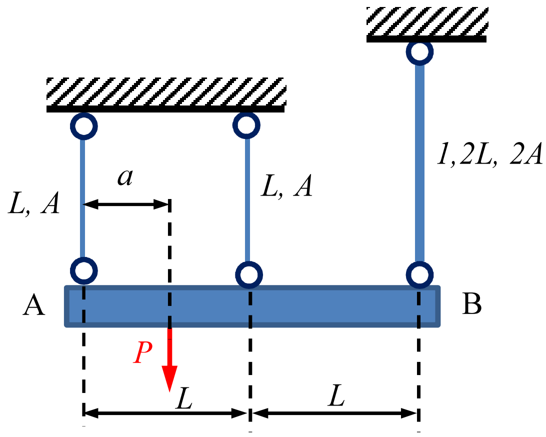
O sistema estrutural indicado na figura abaixo é formado por uma barra AB rígida (indeformável) e de peso desprezível. Tal barra, inicialmente disposta em um plano horizontal, é suportada por três cabos, de comprimentos $L_1 = L_2 = L$ e $L_3 = 1{,}2L$, feitos do mesmo material com comportamento elástico-perfeitamente-plástico. As áreas das seções transversais dos três cabos são $A_1 = A_2 = A$ e $A_3 = 2A$. Uma única força concentrada é aplicada verticalmente sobre a viga AB, de modo que sua linha de ação dista a do cabo que se encontra à esquerda.

a) Considerando que os três cabos permaneçam no regime elástico-linear, determine o valor da distância a para que a barra AB não gire enquanto a força *P* estiver sendo aplicada (1,0 pto);

b) Para o valor de a calculado no item anterior, determine a carga de início de escoamento (P_Y) (1,0 pto);

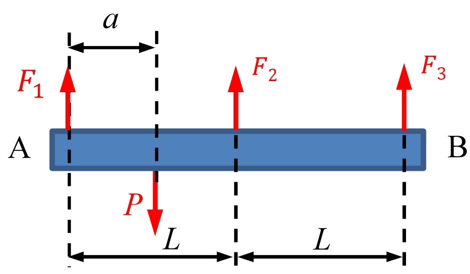
c) Calcule o novo valor de a quando *P* atinge seu valor máximo (carga plástica), bem como o valor de P_P, para que a barra AB não gire nesta situação limite (1,0 pto).

Dados: *A*, *L*, *E* e σ_Y



Solução:

a) D.C.L. para a barra AB (equilíbrio de forças e de momentos para a barra):



$$\sum F_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_1 + F_2 + F_3 = P$$

$$\sum M_{pólo\ A} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_2 L + 2F_3 L = Pa$$

Como a barra AB se desloca sem girar, o alongamento δ dos três cabos é exatamente o mesmo. E, enquanto os três cabos estiverem no regime elástico-linear, valem as relações:

$$\delta = \frac{F_1 L}{EA} = \frac{F_2 L}{EA} = \frac{F_3 (1{,}2L)}{2EA}$$

Logo, concluímos que nesta circunstância inicial é preciso ter:

$$F_1 = F_2 = \frac{3}{5} F_3 = F$$

Onde *F* é simplesmente um valor de referência (que nos permite relacionar as magnitudes das forças em cada um dos três cabos). É digno de nota que o cabo de maior rigidez (cabo 3) será o responsável por suportar a maior parte da carga. Retornando às equações de equilíbrio, obtemos:

$$F + F + \frac{5}{3}F = P \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11}{3}F = P \quad \Leftrightarrow \quad F = \frac{3}{11}P$$

$$FL + 2\left(\frac{5}{3}F\right)L = \left(\frac{11}{3}F\right)a \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{13}{11}L$$

b) As tensões nos três cabos são dadas por:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{F}{A}$$

$$\sigma_3 = \frac{5F/3}{2A} = \frac{5}{6}\frac{F}{A}$$

Logo, os cabos 1 e 2 alcançarão primeiramente a tensão de escoamento do material. Impondo que as tensões nesses cabos sejam iguais à tensão de escoamento do material, virá:

$$\sigma_Y = \frac{F_Y}{A} \quad \Leftrightarrow \quad F_Y = \sigma_Y A$$

Mas, por outro lado:

$$F_Y = \frac{3}{11}P_Y$$

Logo:

$$P_Y = \frac{11}{3}\sigma_Y A$$

c) Quando os três cabos tiverem alcançado a tensão de escoamento teremos esgotado a capacidade de a estrutura suportar acréscimos de carga. Daí:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_Y$$

Logo:

$$F_1 = F_2 = \sigma_Y A$$

$$F_3 = 2\sigma_Y A$$

Recuperando as equações de equilíbrio de forças e de momentos, teremos:

$$F_1 + F_2 + F_3 = P \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_Y A + \sigma_Y A + 2\sigma_Y A = P_P \quad \Leftrightarrow \quad P_P = 4\sigma_Y A$$

E

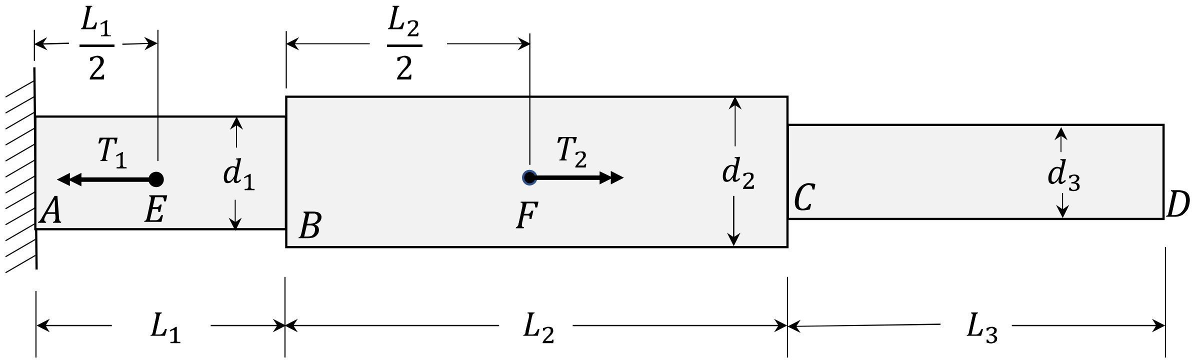
$$F_2 L + 2F_3 L = P_P a \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_Y AL + 2(2\sigma_Y A)L = (4\sigma_Y A)a$$

$$a = \frac{5}{4}L$$

3ª Questão (3,5 pontos)

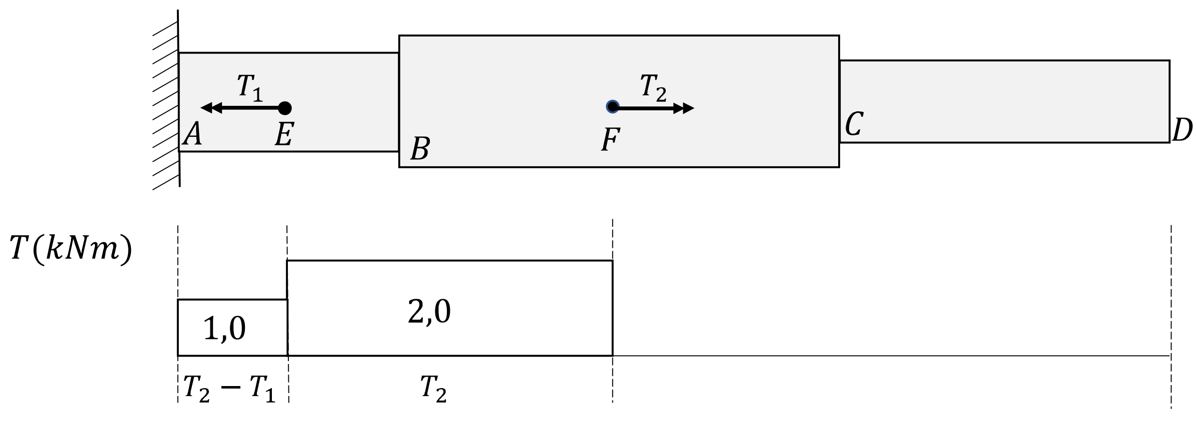
O eixo escalonado esquematizado na figura está engastado na extremidade A e livre na extremidade D. Ele é formado por três segmentos cilíndricos com diâmetros e comprimentos diferentes. O trecho AB tem diâmetro $d_1 = 60mm$ e comprimento $L_1 = 1{,}0\ m$, o trecho BC tem diâmetro $d_2 = 80\ mm$ e comprimento $L_2 = 2{,}0\ m$ e o trecho CD tem diâmetro $d_3 = 50\ mm$ e comprimento $L_3 = 1{,}5\ m$. Na seção E, localizada no meio do segmento AB existe um torque externo $T_1 = 1{,}0\ kNm$ aplicado no sentido indicado na figura e na seção F, localizada no meio do segmento BC, existe um torque externo $T_2 = 2{,}0\ kNm$ aplicado no sentido indicado na figura. Sabendo que o módulo de elasticidade ao cisalhamento do material é $G = 80\ GPa$, pedem-se:

a) O diagrama dos momentos de torção ao longo do eixo (1,0 pto);
b) O giro sofrido pela seção D (1,0 pto);
c) A tensão de cisalhamento máxima no eixo (1,0 pto);
d) A tensão normal máxima no eixo (0,5 pto).



Solução:

a)



b) Só contribuem para o giro da seção D os trechos que têm momento de torção não nulo. Assim:

$$\phi_D = \phi_{AE} + \phi_{EB} + \phi_{BF}$$

Para um certo trecho i:

$$\phi_i = \frac{T_i L_i}{G I_{p,i}} = \frac{32 T_i L_i}{G \pi d_i^4}$$

Portanto,

$$\phi_D = \frac{32}{G\pi}\left(\frac{(T_2 - T_1)L_1}{2d_1^4} + \frac{T_2 L_1}{2d_1^4} + \frac{T_2 L_2}{2d_2^4}\right)$$

Então, substituindo os valores numéricos:

$$\phi_d = 0{,}0210\, rd = 1{,}20°$$

c) Em um dado trecho, a tensão de cisalhamento é dada por:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Td}{2I_p} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

Então, a tensão de cisalhamento máxima no eixo ocorrerá no trecho EB e será dada por:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{16T_2}{\pi d_1^3}$$

Substituindo os valores numéricos teremos:

$$\tau_{\text{máx}} = 47{,}2\, MPa$$

d) A tensão normal máxima será numericamente igual à tensão de cisalhamento máxima:

$$\sigma_{\text{máx}} = 47{,}2\, MPa$$