Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #24

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

30/06/23

9.4 Deflexões por integração da equação da força cortante e da equação de carregamento

Da aula passada:

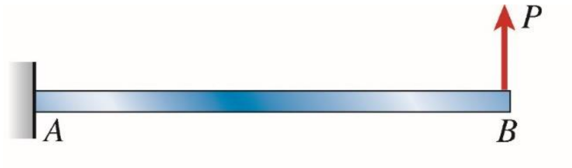
$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M \qquad EI\frac{d^3v}{dx^3} = V \qquad EI\frac{d^4v}{dx^4} = -q$$

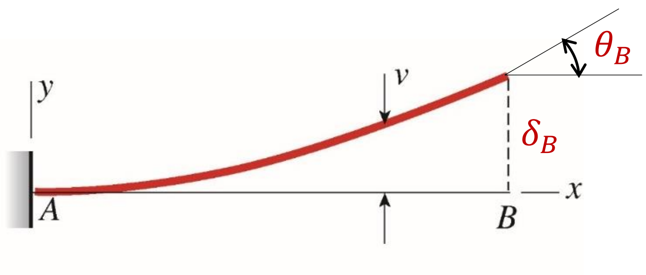
ou, usando a notação de Lagrange,

$$EIv'' = M \qquad EIv''' = V \qquad EIv'''' = -q$$

Na aula passada, calculamos a linha elástica a partir da equação de segunda ordem (momento fletor) mas podemos partir, também, da equação de terceira ordem (força cortante) ou da equação de quarta ordem (carregamento)

Exemplo





$$q = 0$$

$$EIv'''' = 0$$

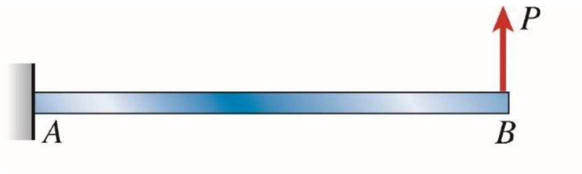
$$EIv''' = C_1$$

$$EIv'' = C_1 x + C_2$$

$$EIv' = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EIv = \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

⇒São necessárias quatro condições de contorno para calcular as constantes



As condições de contorno podem ser de dois tipos:

- Essenciais ou geométricas (deslocamentos ou rotações)

  i) $v(0) = 0$

  ii) $v'(0) = 0$

- Naturais (momentos ou forças aplicados)

  iii) $M(L) = 0 \Rightarrow v''(L) = 0$

  iv) $V(L) = -P \Rightarrow EIv'''(L) = -P$

$$EIv''' = C_1$$

$$EIv'' = C_1 x + C_2$$

$$EIv' = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EIv = \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

i) $v(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$

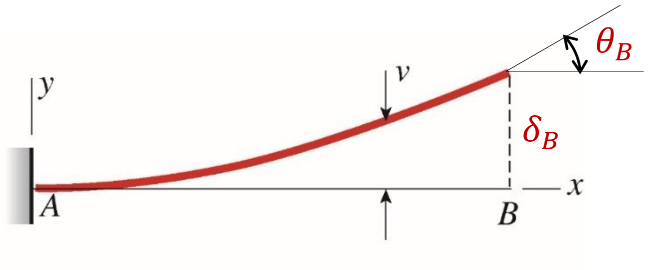
ii) $v'(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

iii) $v''(L) = 0 \Rightarrow C_1 L + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = PL$

iv) $EIv'''(L) = -P \Rightarrow -P = C_1$

$$v' = \frac{Px}{2EI}(2L - x)$$

$$v = \frac{Px^2}{6EI}(3L - x)$$



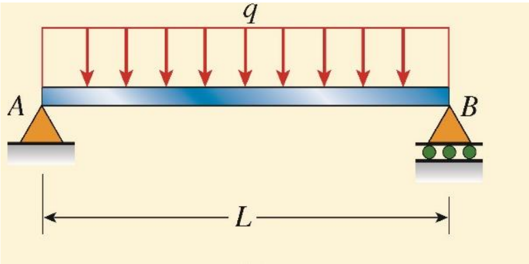
$$v' = \frac{Px}{2EI}(2L - x)$$

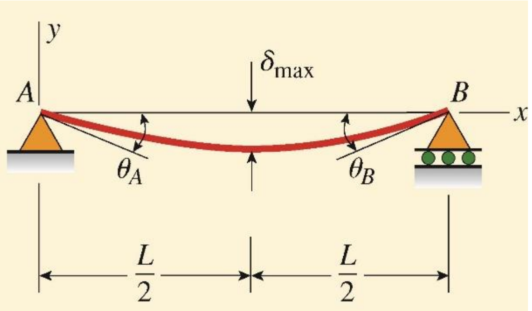
$$v = \frac{Px^2}{6EI}(3L - x)$$

$$\theta_B = v'(L) = \frac{PL^2}{2EI}$$

$$\delta_B = v(L) = \frac{PL^3}{3EI}$$

Exemplo





$$EIv'''' = -q$$

$$EIv''' = -qx + C_1$$

$$EIv'' = -\frac{qx^2}{2} + C_1x + C_2$$

$$EIv' = -\frac{qx^3}{6} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3$$

$$EIv = -\frac{qx^4}{24} + \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4$$

Condições de contorno:

i)$v(0) = 0$

ii)$v(L) = 0$

iii)$M(0) = 0 \;\Rightarrow v''(0) = 0$

iv)$M(L) = 0 \;\Rightarrow v''(L) = 0$

$$EIv''' = -qx + C_1 \qquad EIv'' = -\frac{qx^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$EIv' = -\frac{qx^3}{6} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 \qquad EIv = -\frac{qx^4}{24} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

i)$v(0) = 0 \;\Rightarrow C_4 = 0$

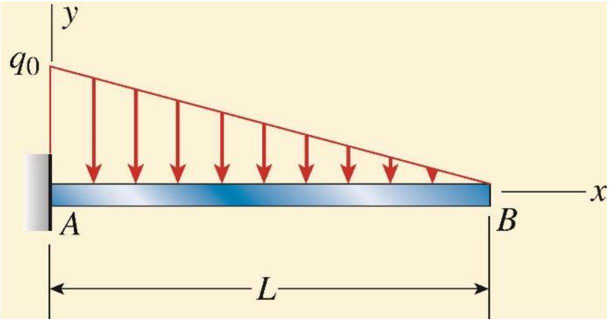
ii)$v(L) = 0 \;\Rightarrow 0 = -\frac{qL^4}{24} + \frac{qL}{2}\frac{L^3}{6} + C_3 L \;\Rightarrow C_3 = -\frac{qL^3}{24}$

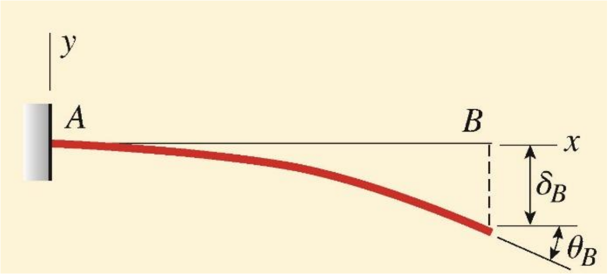
iii)$v''(0) = 0 \;\Rightarrow C_2 = 0$

iv) $v''(L) = 0 \;\Rightarrow 0 = -\frac{qL^2}{2} + C_1 L \;\Rightarrow C_1 = \frac{qL}{2}$

$$v(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{qx^4}{24} + \frac{qL}{2}\frac{x^3}{6} - \frac{qL^3}{24}x\right) \quad \Rightarrow v(x) = -\frac{qx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$$

Exemplo





$$q = \frac{q_0}{L}(L - x)$$

$$EIv'''' = -\frac{q_0}{L}(L - x)$$

$$EIv''' = \frac{q_0}{2L}(L - x)^2 + C_1$$

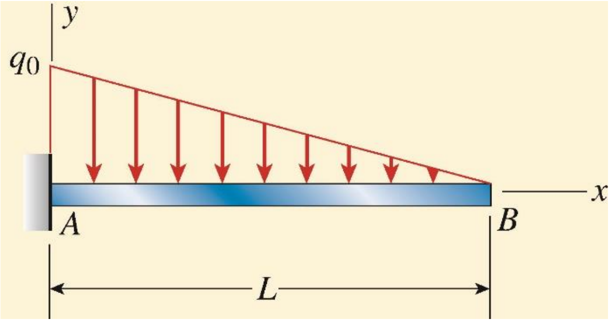
$$EIv'' = -\frac{q_0}{6L}(L - x)^3 + \mathrm{C}_1\mathrm{x} + \mathrm{C}_2$$

$$EIv' = \frac{q_0}{24L}(L - x)^4 + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EIv = -\frac{q_0}{120L}(L - x)^5 + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

⇒Novamente são necessárias quatro condições de contorno par calcular as constantes

Condições de contorno:



i) $v(0) = 0$

ii) $v'(0) = 0$

iii) $M(L) = 0 \Rightarrow v''(L) = 0$

iv) $V(L) = 0 \;\Rightarrow v'''(L) = 0$

$$EIv'' = -\frac{q_0}{6L}(L-x)^3 + \mathrm{C_1 x} + \mathrm{C_2}$$

$$EIv''' = \frac{q_0}{2L}(L-x)^2 + C_1$$

$$EIv' = \frac{q_0}{24L}(L-x)^4 + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3$$

$$EIv = -\frac{q_0}{120L}(L-x)^5 + \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4$$

i) $v(0) = 0 \ \Rightarrow C_4 = \dfrac{q_0L^4}{120}$

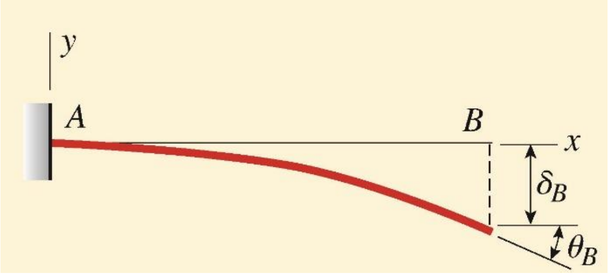
ii) $v'(0) = 0 \ \Rightarrow C_3 = -\dfrac{q_oL^3}{24}$

iii) $v''(L) = 0 \ \Rightarrow C_1L + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

iv) $v'''(L) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$v'(x) = -\frac{q_0x}{24LEI}(4L^3 - 6L^2x + 4Lx^2 - x^3)$$

$$v(x) = -\frac{q_0x^2}{120LEI}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$$



$$v'(x) = -\frac{q_0 x}{24LEI}(4L^3 - 6L^2 x + 4Lx^2 - x^3)$$

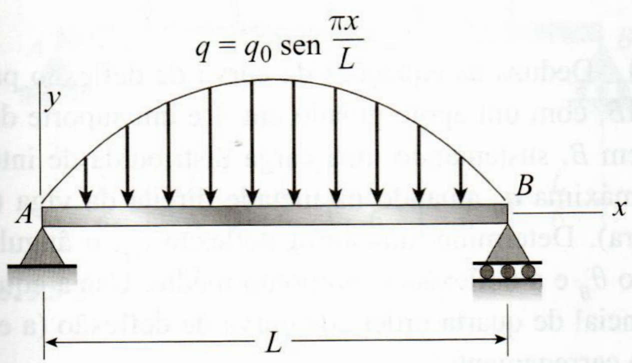
$$v(x) = -\frac{q_0 x^2}{120LEI}(10L^3 - 10L^2 x + 5Lx^2 - x^3)$$

$$\theta_B = -v'(L) = \frac{q_0 L^3}{24EI}$$

$$\delta_B = -v(L) = \frac{q_0 L^4}{30EI}$$

9.4-2 Uma viga simples AB está submetida a um carregamento distribuído de intensidade $q = q_0 \operatorname{sen} \pi x/L$, em que q_0 é a máxima intensidade do carregamento (veja a figura).

Obtenha a equação da curva de deflexão e então determine a deflexão δ_{max} no ponto médio da viga. Use a equação diferencial de quarta ordem da curva de deflexão (a equação do carregamento).



$$EIv'''' = -q = -q_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}$$

$$EIv''' = q_0\left(\frac{L}{\pi}\right)\cos\frac{\pi x}{L} + C_1$$

$$EIv'' = q_0\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + C_1 x + C_2$$

$$EIv' = -q_0\left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \cos\frac{\pi x}{L} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EIv = -q_0\left(\frac{L}{\pi}\right)^4 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

$$M(0) = 0 \;\Rightarrow EIv''(0) = 0 \;\Rightarrow C_2 = 0$$

$$M(L) = 0 \;\Rightarrow EIv''(L) = 0 \;\Rightarrow C_1 = 0$$

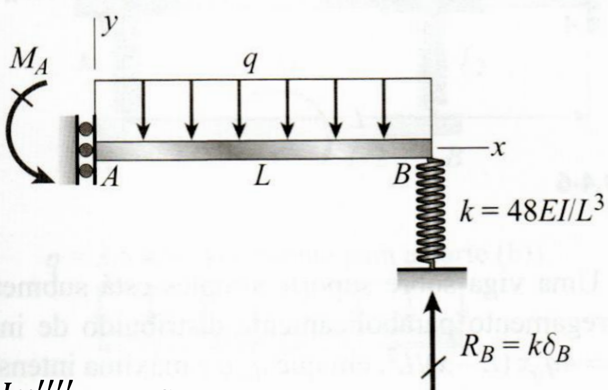
$$v(0) = 0 \;\Rightarrow C_4 = 0$$

$$v(L) = 0 \;\Rightarrow C_3 = 0$$

$$\Rightarrow v = -\frac{q_0}{EI}\left(\frac{L}{\pi}\right)^4 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}$$

$$\delta_{máx} = -v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q_0 L^4}{\pi^4 EI}$$

9.4-4 Uma viga com um carregamento uniforme tem um apoio guiado em uma extremidade e um apoio de molas na outra. A mola tem uma rigidez $k = 48EI/L^3$. Deduza a equação da curva de deflexão iniciando com a equação de terceira ordem (a equação da força de cisalhamento). Determine também o ângulo de rotação θ_B no suporte B.



$$EIv'''' = -q$$

$$EIv''' = -qx + C_1$$

$$EIv'' = -\frac{qx^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$EIv' = -\frac{qx^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EIv = -\frac{qx^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

$$V(0) = 0 \Rightarrow EIv'''(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow v'(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$M(L) = 0 \Rightarrow EIv''(L) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{qL^2}{2}$$

$$v(L) = -\frac{qL}{k} = -\frac{qL^4}{48EI} \Rightarrow C_4 = -\frac{11qL^4}{48}$$

$$\Rightarrow v(x) = -\frac{q}{48EI}(2x^4 - 12x^2L^2 + 11L^4)$$

$$\Rightarrow \theta_B = v'(L) \Rightarrow \theta_B = \frac{qL^3}{3EI}$$ *(anti-horário)*

Referência:

Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Capítulo 9.