Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

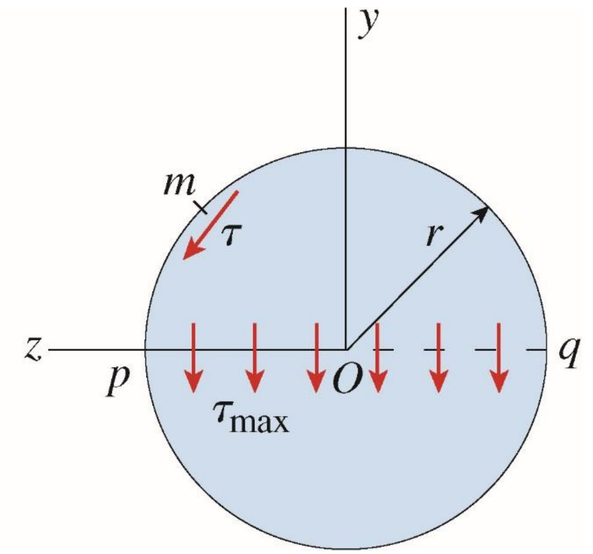
PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #22

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

23/06/23

5.9 Tensões de cisalhamento em vigas de seção transversal circular



- Não podemos mais assumir que as tensões de cisalhamento atuem paralelamente ao eixo *y*
- Não há uma forma simples de encontrar as tensões de cisalhamento ao longo da seção transversal
- Mas podemos, facilmente, calcular as tensões de cisalhamento na linha neutra, que são as tensões máximas
- Ao longo da linha neutra é razoável supor que as tensões atuem paralelamente ao eixo *y* e sejam constantes

Assumindo que as tensões de cisalhamento ao longo da linha neutra sejam verticais e constantes, podemos usar a mesma expressão desenvolvida para seção retangular para calcular as tensões de cisalhamento ao longo dessa linha:

$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

onde:

$$Q = \int y dA = A\bar{y} = \left(\frac{\pi r^2}{2}\right)\left(\frac{4r}{3\pi}\right) = \frac{2r^3}{3}$$

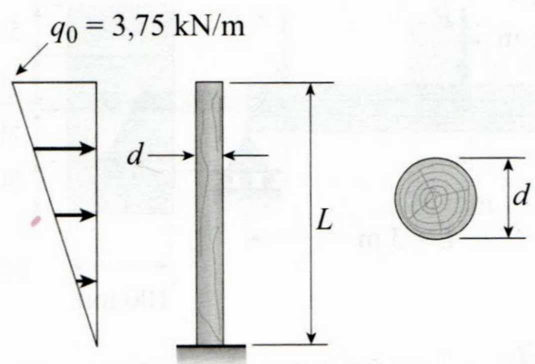
$$b = 2r$$

$$I = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{V\left(\frac{2r^3}{3}\right)}{\left(\frac{\pi r^4}{4}\right)(2r)} = \frac{4\mathrm{V}}{3\pi r^2} \quad \Rightarrow \tau = \frac{4}{3}\frac{V}{A} = \frac{4}{3}\tau_{méd}$$

5.9-1 Um poste de madeira de seção transversal circular (d = diâmetro) é submetido a uma força horizontal distribuída triangular com pico de intensidade $q_0 = 3{,}75$ kN/m (veja a figura). O comprimento do poste é $L = 2$ m e as tensões permitidas na madeira são de 13 MPa na flexão e 0,82 MPa no cisalhamento.

Determine o diâmetro mínimo d exigido do poste com base (a) na tensão de flexão permitida e (b) na tensão de cisalhamento permitida.



a) $M_{máx} = \dfrac{q_0 L^2}{3}$ $\sigma_{máx} = \dfrac{M_{máx}}{I}\dfrac{d}{2}$ $I = \dfrac{\pi d^4}{64}$

$$\Rightarrow \sigma_{máx} = \frac{32}{3}\frac{q_0 L^2}{\pi d^3} \quad \Rightarrow d'_{mín} = \sqrt[3]{\frac{32}{3\pi}\frac{q_0 L^2}{\sigma_{adm}}}$$

$$\Rightarrow d'_{mín} = 157mm$$

b) $V_{máx} = \dfrac{q_0 L}{2}$ $\tau_{máx} = \dfrac{4}{3}\dfrac{V_{máx}}{A}$ $A = \dfrac{\pi d^2}{4}$

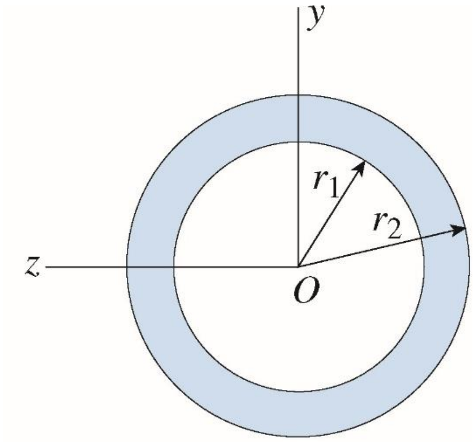
$$\Rightarrow \tau_{máx} = \frac{8}{3}\frac{q_0 L}{\pi d^2} \quad \Rightarrow d''_{mín} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}\frac{q_0 L}{\tau_{adm}}}$$

$$\Rightarrow d''_{mín} = 88mm$$

$$d_{mín} = máx\{d'_{mín}, d''_{mín}\}$$

$$\Rightarrow d_{mín} = 157mm$$

Seção circular vazada



$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

onde:

$$Q = \frac{2}{3}(r_2^3 - r_1^3) = \frac{1}{12}(d_2^3 - d_2^3)$$

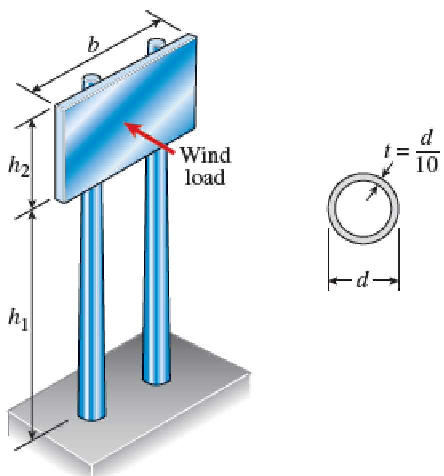
$$b = 2(r_2 - r_1) = d_2 - d_1$$

$$I = \frac{\pi}{4}(r_2^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{64}(d_2^4 - d_1^4)$$

5.9-3 Um letreiro de posto de gasolina é suportado por dois tubos de alumínio com seção transversal circular vazada, como ilustrado na figura. Os postes são projetados para resistir à pressão do vento de 3,8 kPa contra toda a área do letreiro. As dimensões dos postes e do letreiro são $h_1 = 7$ m, $h_2 = 2$ m e $b = 3{,}5$ m. Para prevenir a flambagem das paredes dos postes, a espessura t é especificada como um décimo do diâmetro externo d.

(a) Determine o diâmetro mínimo do poste exigido com base na tensão de flexão permitida de 52 MPa no alumínio.

(b) Determine o diâmetro mínimo do poste exigido com base na tensão de cisalhamento permitida de 16 MPa.



a) $$W = ph_2\frac{b}{2} = 13{,}3kN$$

$$M_{máx} = W\left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right) = 106{,}4kNm$$

$$\sigma_{máx} = \frac{M_{máx}}{I}\frac{d}{2}$$

$$I = \frac{\pi}{64}(d_2^4 - \mathrm{d}_1^4)$$

$$d_2 = d$$

$$d_1 = d - 2t \Rightarrow d_1 = \frac{4}{5}d$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{64}\left(d^4 - \left(\frac{4}{5}d\right)^4\right) = \frac{369\pi d^4}{40000}$$

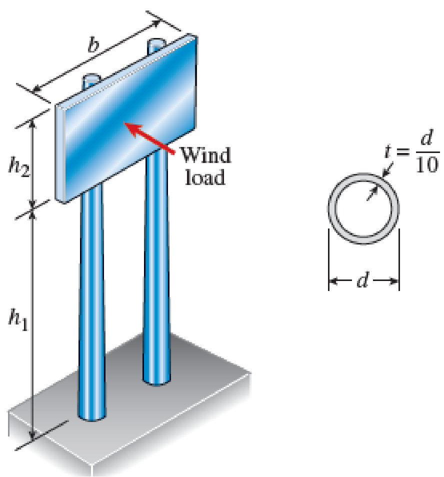
$$\sigma_{máx} = \frac{20000M_{máx}}{369\pi d^3} = \frac{17{,}253M_{máx}}{d^3}$$

$$\Rightarrow d_{mín} = \sqrt[3]{\frac{17{,}253M_{máx}}{\sigma_{adm}}} = 0{,}328m$$

5.9-3 Um letreiro de posto de gasolina é suportado por dois tubos de alumínio com seção transversal circular vazada, como ilustrado na figura. Os postes são projetados para resistir à pressão do vento de 3,8 kPa contra toda a área do letreiro. As dimensões dos postes e do letreiro são $h_1 = 7$ m, $h_2 = 2$ m e $b = 3{,}5$ m. Para prevenir a flambagem das paredes dos postes, a espessura t é especificada como um décimo do diâmetro externo d.

(a) Determine o diâmetro mínimo do poste exigido com base na tensão de flexão permitida de 52 MPa no alumínio.

(b) Determine o diâmetro mínimo do poste exigido com base na tensão de cisalhamento permitida de 16 MPa.



b)

$$\tau_{máx} = \frac{V_{máx}\, Q}{Ib} \qquad V_{máx} = W$$

$$d_2 = d \qquad d_1 = \frac{4}{5}d$$

$$Q = \frac{1}{12}(d_2^3 - d_1^3) = \frac{61}{1500}d^3$$

$$b = d_2 - d_1 = \frac{d}{5}$$

$$I = \frac{\pi}{64}(d_2^4 - d_1^4) = \frac{369\pi d^4}{40000}$$

$$\tau_{máx} = W\frac{\frac{61}{1500}d^3}{\frac{369\pi d^4}{40000}\frac{d}{5}} \Rightarrow \tau_{máx} = \frac{7{,}016W}{d^2}$$

$$\Rightarrow d_{mín} = \sqrt{\frac{7{,}016W}{\tau_{adm}}} = 0{,}0764m$$

(Neste caso a flexão é que determina o diâmetro!)

Referência:

Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Capítulo 5.