



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

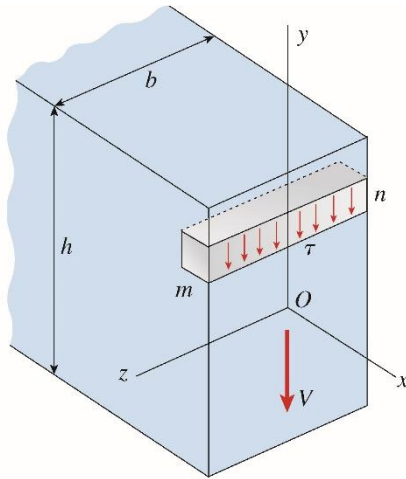
Aula #21

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

20/06/23



5.8 Tensões de cisalhamento em vigas de seção transversal retangular

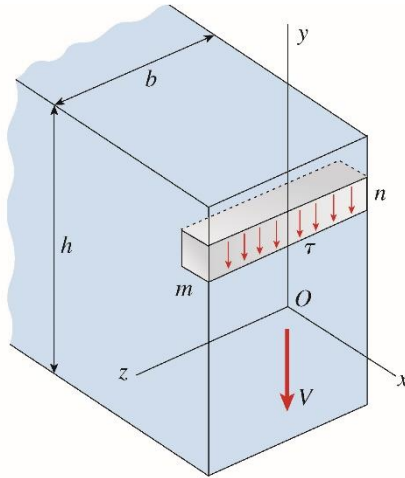


Hipóteses:

- As tensões de cisalhamento são paralelas à força cortante
- As tensões de cisalhamento são uniformemente distribuídas ao longo da largura
- As tensões de cisalhamento podem variar ao longo da altura



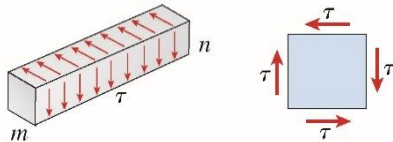
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Também existem tensões de cisalhamento horizontais agindo sobre as camadas horizontais da viga

Por equilíbrio, estas tensões têm a mesma magnitude das tensões verticais

Como não há forças aplicadas sobre as superfícies superior e inferior da viga, não há tensões de cisalhamento nessas superfícies

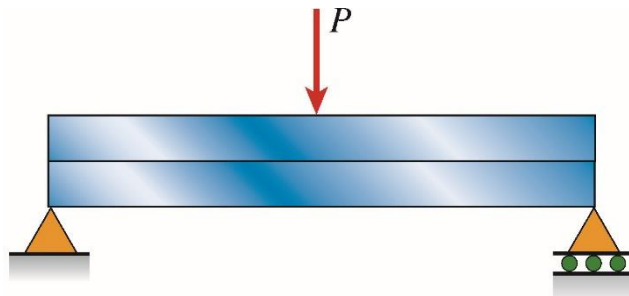


Então as tensões de cisalhamento verticais também têm que ser nulas junto às faces superior e inferior:

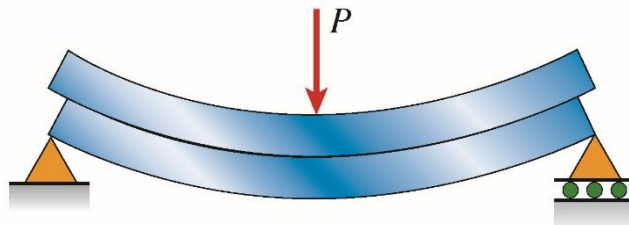
$$\tau = 0 \text{ para } y = \pm \frac{h}{2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Se as vigas estiverem soltas, uma vai deslizar em relação à outra quando o conjunto for fletido

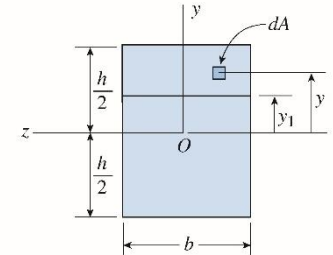
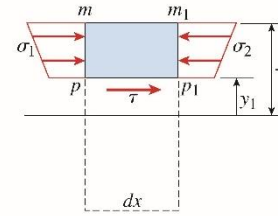
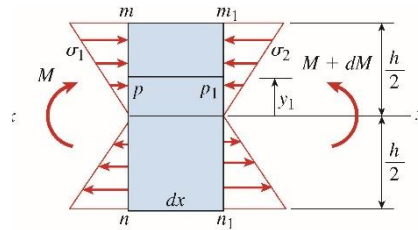
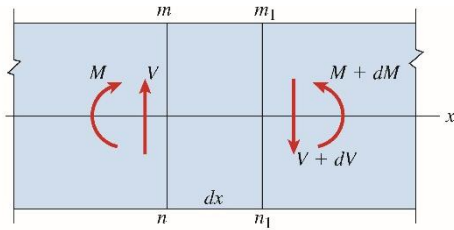


Se as vigas forem coladas terá que haver uma tensão de cisalhamento na cola para mantê-las unidas



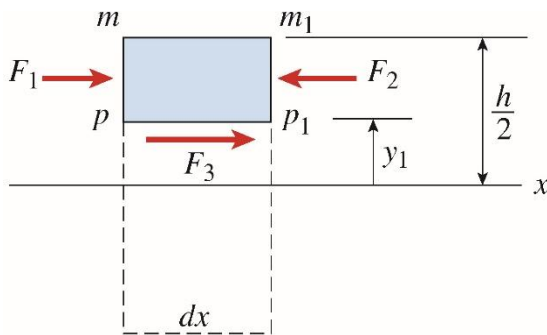
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Fórmula de cisalhamento:



$$\sigma_1 = -\frac{My}{I}$$

$$\sigma_2 = -\frac{(M + dM)y}{I}$$



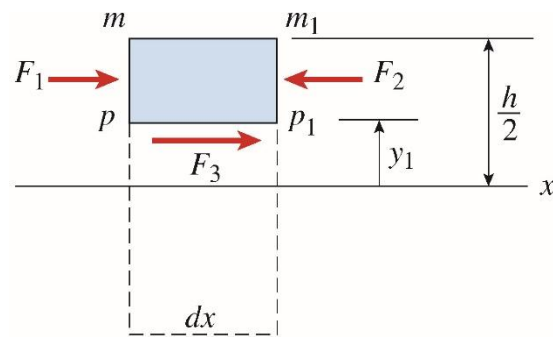
$$F_1 = \int \sigma_1 dA = \int \frac{My}{I} dA$$

$$F_2 = \int \sigma_2 dA = \int \frac{(M + dM)y}{I} dA$$

$$F_3 = \tau b dx$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$F_1 = \int \sigma_1 dA = \int \frac{My}{I} dA$$

$$F_2 = \int \sigma_2 dA = \int \frac{(M + dM)y}{I} dA$$

$$F_3 = \tau b dx$$

Equilíbrio de forças na direção horizontal:

$$F_3 = F_2 - F_1$$

$$\tau b dx = \int \frac{(M + dM)y}{I} dA - \int \frac{My}{I} dA = \frac{dM}{I} \int y dA$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{dM}{dx} \frac{1}{Ib} \int y dA$$

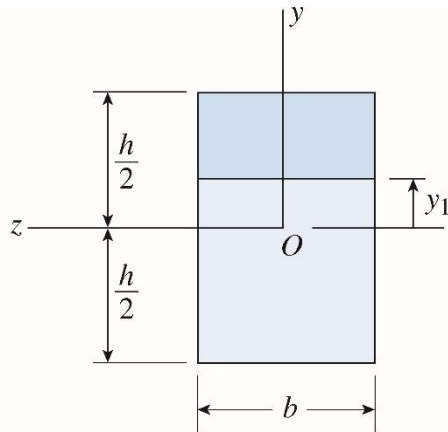
Definindo: $Q = \int y dA$ (Primeiro momento da área da seção transversal acima da linha em que τ está sendo calculada)

$$\Rightarrow \tau = \frac{VQ}{Ib}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Distribuição das tensões de cisalhamento em uma viga retangular:



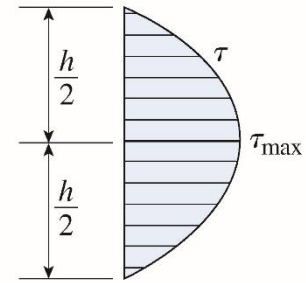
$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

$$Q = \int y dA = \int_{y_1}^{\frac{h}{2}} y b dy = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

$$\tau_{máx} = \frac{Vh^2}{8I}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \Rightarrow \tau_{máx} = \frac{3V}{2A} = \frac{3}{2} \tau_{méd}$$



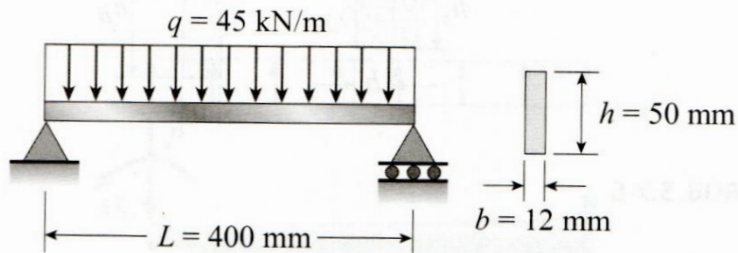


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

5.8-5 Uma viga simples de comprimento $L = 400$ mm com dimensões da seção transversal $b = 12$ mm e $h = 50$ mm (veja a figura) suporta uma carga uniforme de intensidade $q = 45$ kN/m, que inclui o peso da viga.

Calcule as tensões de cisalhamento na viga (na seção transversal de força cortante máxima) nos pontos localizados a 6,25 mm, 12,5 mm, 18,75 mm e 25 mm da superfície do topo da viga. A partir desses resultados, trace um gráfico da distribuição das tensões de cisalhamento do topo à base da viga.



$$V_{\max} = \frac{qL}{2}$$

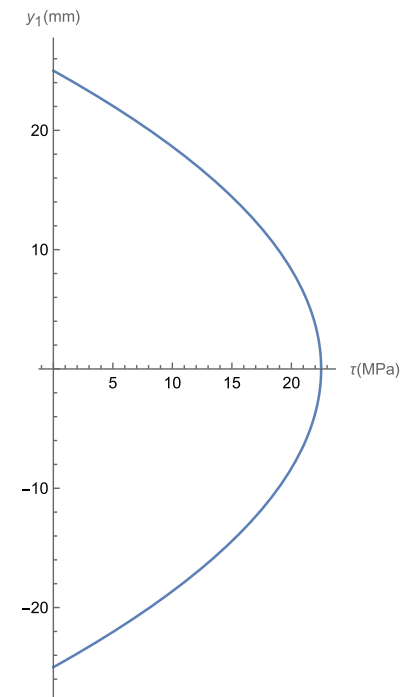
$$\tau = \frac{V_{\max}}{2I} \left[\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right] \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{3qL}{bh^3} \left[\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right]$$

$$\Rightarrow \tau = 0,036[625 - y_1^2]$$

(y_1 em mm $\rightarrow \tau$ em MPa)

$y_1(\text{mm})$	$\tau(\text{MPa})$
0,00	22,5
6,25	21,1
12,50	16,9
18,75	9,8
25,00	0,0



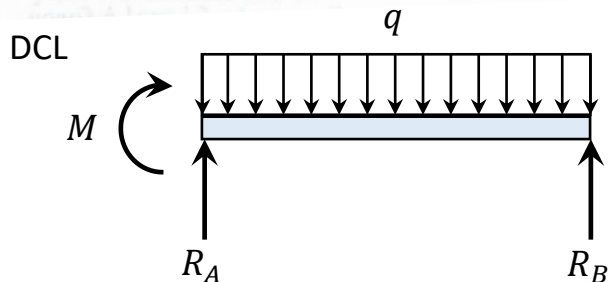
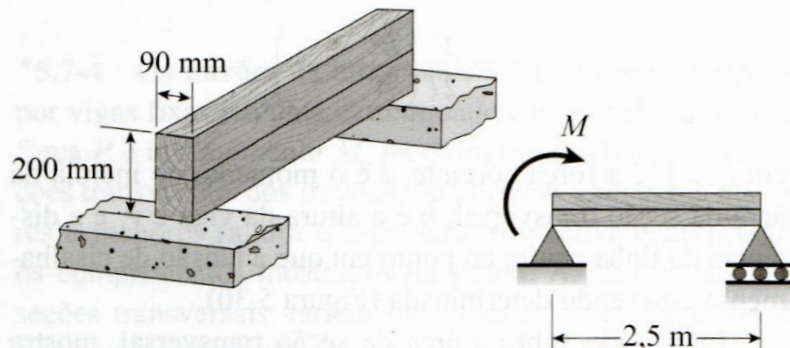


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

5.8-3 Duas vigas de madeira, com seções transversais quadradas (100 mm × 90 mm, em dimensões reais), são coladas juntas para formar uma viga sólida de dimensões 200 mm × 90 mm (veja a figura). A viga está simplesmente apoiada e tem um vão de 2,5 m.

Qual é o momento máximo $M_{\max}$ que pode agir no apoio esquerdo se a tensão de cisalhamento permitida na junta colada for de 1,4 MPa? (Inclua o efeito do próprio peso da viga, assumindo que a viga pese 5.400 N/m³.)

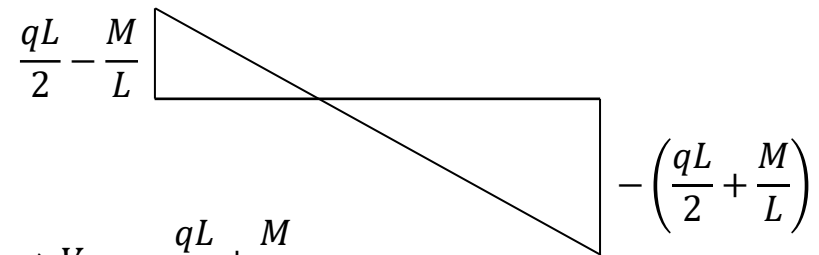


Equilíbrio:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = qL \Rightarrow R_A = \frac{qL}{2} - \frac{M}{L}$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow M + R_A L = \frac{qL^2}{2} \Rightarrow R_B = \frac{qL}{2} + \frac{M}{L}$$

V



$$\Rightarrow V_{\max} = \frac{qL}{2} + \frac{M}{L}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3 V_{\max}}{2 A} \quad q = \gamma A$$

$$\Rightarrow \tau_{\max} = \frac{3}{2} \left(\frac{\gamma L}{2} + \frac{M}{AL} \right)$$

$$\Rightarrow M_{\max} = AL \left(\frac{2}{3} \tau_{adm} - \frac{\gamma L}{2} \right)$$

$$\Rightarrow M_{\max} = 41,7 \text{ kNm}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência:

Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Capítulo 5.