



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica*

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #18

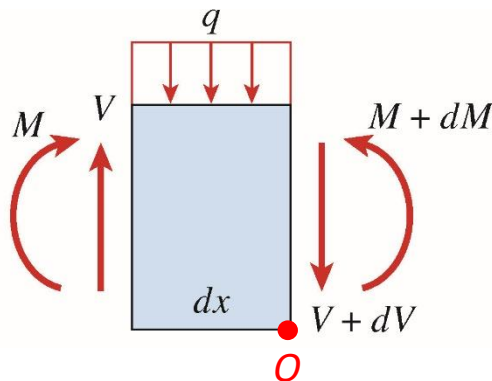
Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

06/06/23



4.4 Relações entre cargas, forças cortantes e momentos fletores

a) Carga distribuída



$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow \cancel{V} - qdx - (\cancel{V} + dV) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dx} = -q$$

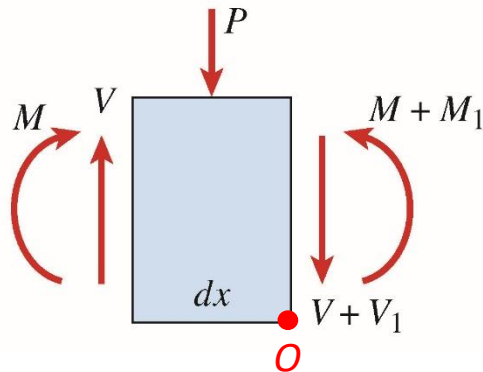
$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow \cancel{-M} - qdx \frac{dx}{2} - Vdx + \cancel{M} + dM = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dx} = V$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

b) Carga concentrada:



$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow \cancel{V} - P - (\cancel{V} + V_1) = 0$$

$$\Rightarrow V_1 = -P$$

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow \cancel{M} + P \frac{dx}{2} - V dx + (\cancel{M} + M_1) = 0$$

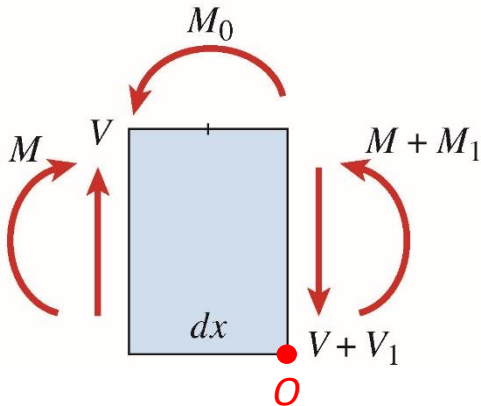
$$\Rightarrow M_1 = -P \frac{dx}{2} + V dx$$

$$dx \rightarrow 0 \Rightarrow M_1 = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

c) *Momento:*



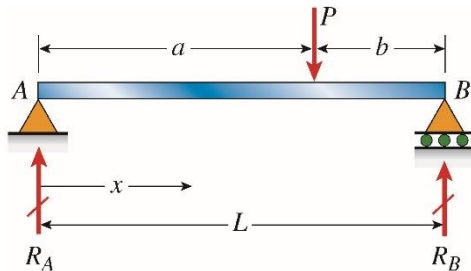
$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow \cancel{V} - (\cancel{V} + V_1) = 0$$
$$\Rightarrow V_1 = 0$$

$$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow \cancel{-M} + M_0 - \cancel{Vdx} + \cancel{M} + M_1 = 0$$
$$\Rightarrow M_1 = -M_0 + Vdx$$

$$dx \rightarrow 0 \Rightarrow M_1 = -M_0$$

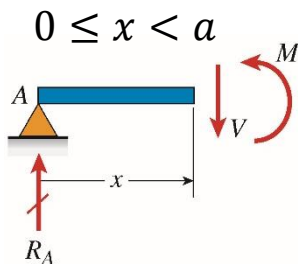


4.5 Diagramas de força cortante e momento fletor



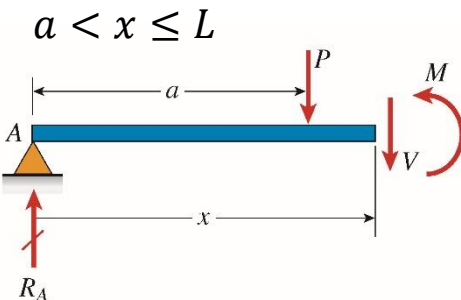
$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow R_A + R_B - P = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -R_A L + Pb = 0 \Rightarrow R_A = \frac{Pb}{L} \Rightarrow R_B = \frac{Pa}{L}$$



$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow V = R_A = \frac{Pb}{L}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M - Vx = 0 \Rightarrow M = \frac{Pbx}{L}$$

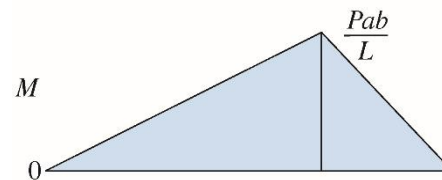
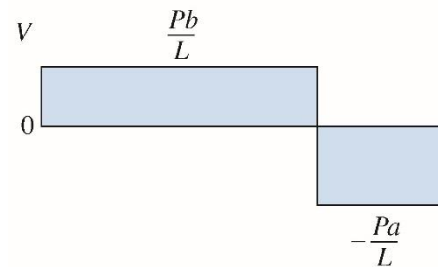
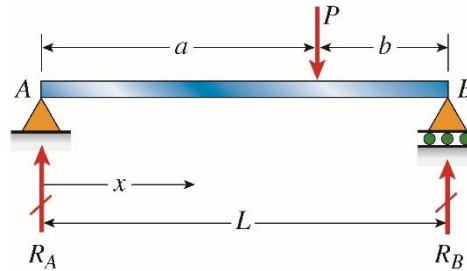


$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow V = R_A - P \Rightarrow V = -\frac{Pa}{L}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M - Vx - Pa = 0 \Rightarrow M = \frac{Pa}{L}(L - x)$$

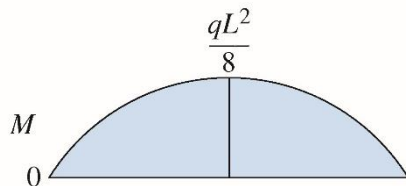
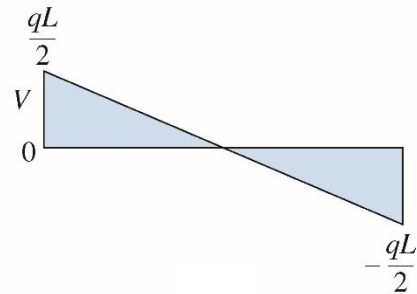
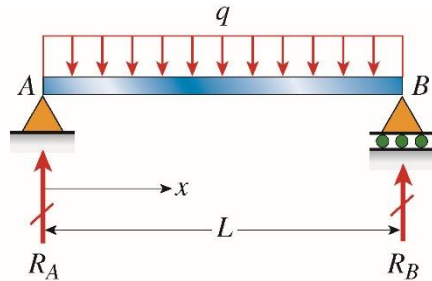


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

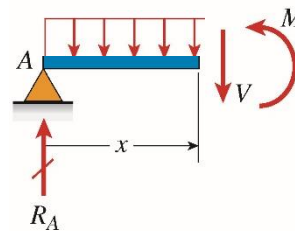




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$R_A = R_B = \frac{qL}{2}$$



$$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow V = R_A - qx$$

$$\Rightarrow V = \frac{qL}{2} - qx$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M - Vx - qx \frac{x}{2} = 0$$

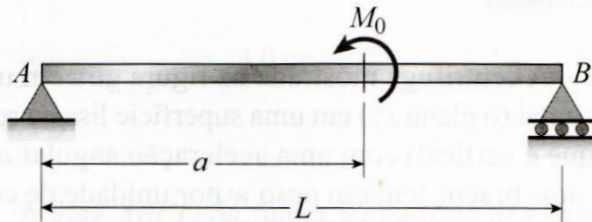
$$\Rightarrow M = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

4.5-2 Uma viga simples AB está submetida a um momento M_0 no sentido anti-horário atuando a uma distância a do apoio esquerdo (veja a figura).

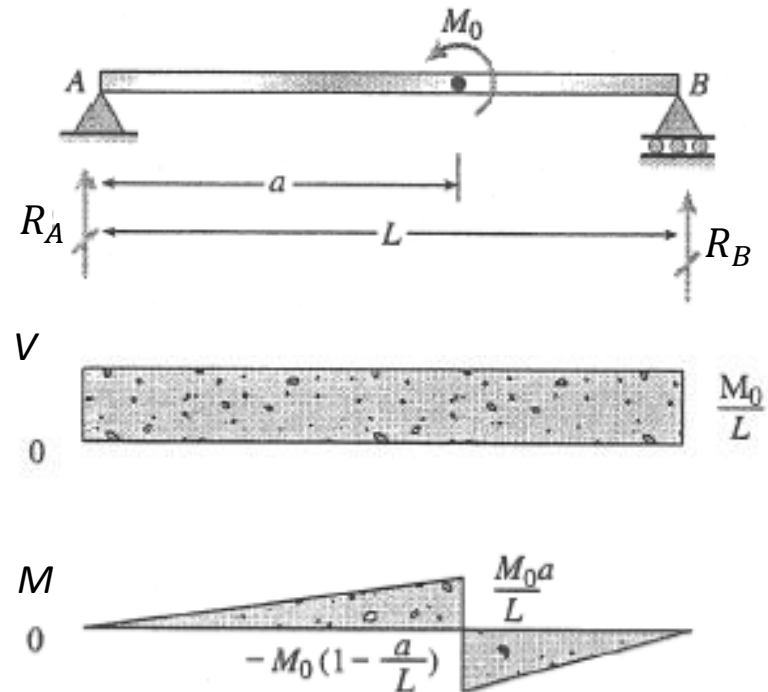
Desenhe os diagramas de momento fletor e de força cortante para essa viga.



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -R_A L + M_0 = 0$$

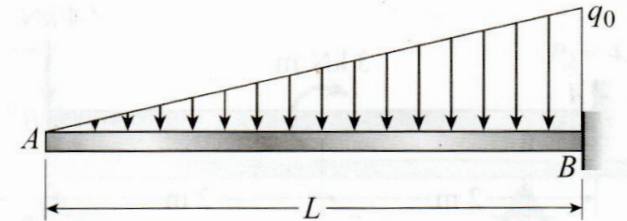
$$\Rightarrow R_A = \frac{M_0}{L} \Rightarrow R_B = -\frac{M_0}{L}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

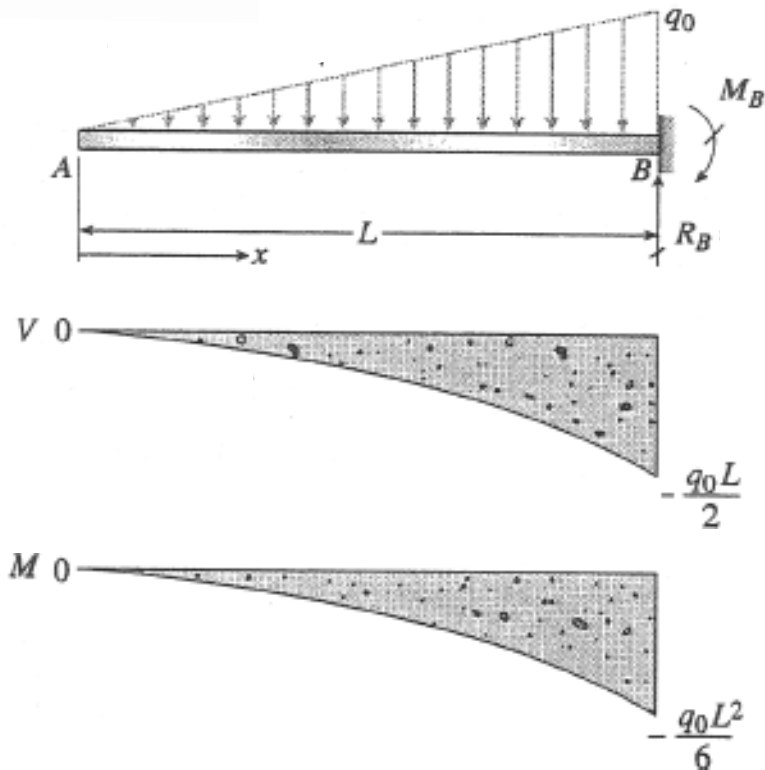
4.5-10 Desenhe os diagramas de momento fletor e de força cortante para a viga AB , com uma extremidade engastada e a outra livre, submetida a um carregamento linearmente variável de intensidade máxima q_0 (veja a figura).



$$q(x) = q_0 \frac{x}{L}$$

$$V(x) = -q_0 \frac{x^2}{2L}$$

$$M(x) = -q_0 \frac{x^3}{6L}$$

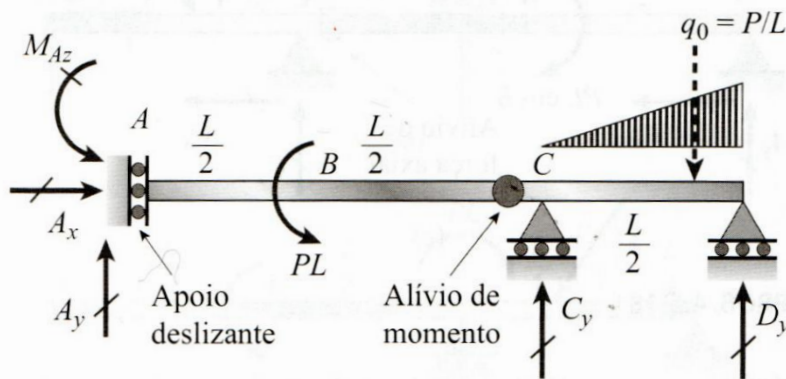




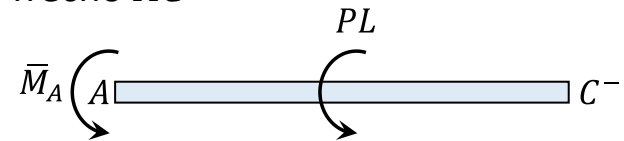
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

4.5.24 As vigas ABC e CD são sustentadas em A , C e D e unidas por uma articulação (ou *alívio de momento*) logo à esquerda de C . O apoio em A é um apoio deslizante (logo, a reação é $A_y = 0$ para o carregamento ilustrado abaixo). Encontre todas as reações de apoio, depois trace os diagramas de momento (M) e de força cortante (V). Identifique os valores críticos de V e M e também a distância dos pontos em que V e/ou M são zero.

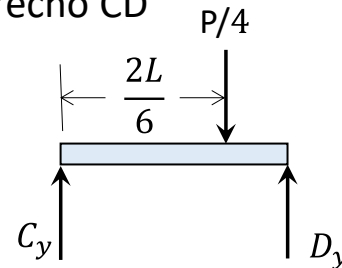


Trecho AC^-



$$\Sigma M_{C^-} = 0 \Rightarrow \bar{M}_A = -PL$$

Trecho CD



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow C_y + D_y = \frac{P}{4}$$

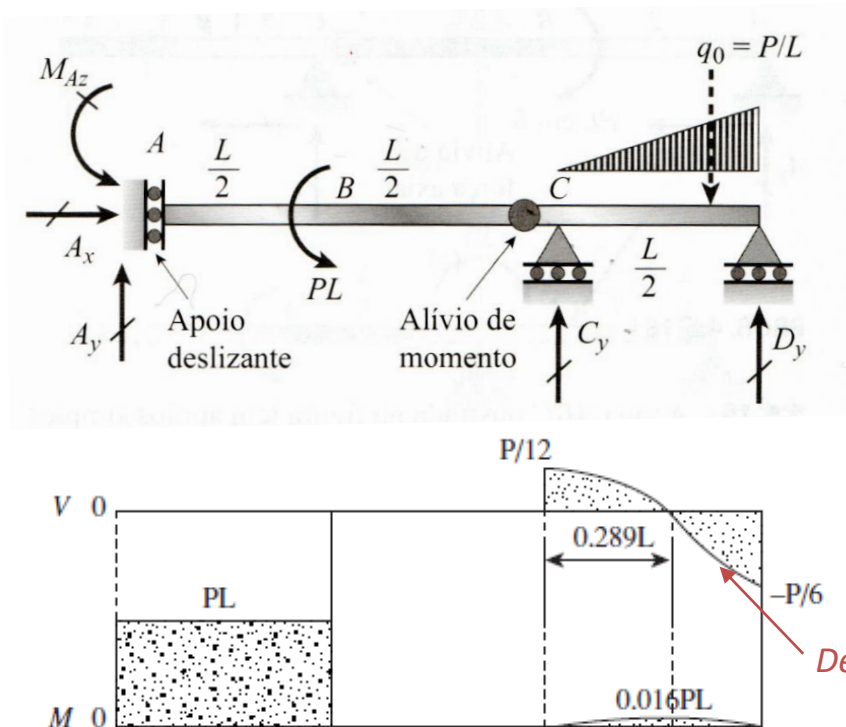
$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow D_y \frac{L}{2} - \frac{P}{4} \frac{2L}{6} = 0$$

$$\Rightarrow D_y = \frac{P}{6} \Rightarrow C_y = \frac{P}{12}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica



Trecho CD

$$q(x) = q_0 2 \frac{x}{L} = 2P \frac{x}{L^2}$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{P}{12} - P \left(\frac{x}{L} \right)^2$$

$$\Rightarrow M(x) = \frac{Px}{12} - \frac{Px^3}{3L^2}$$

Deveria ser uma curva do 2º grau

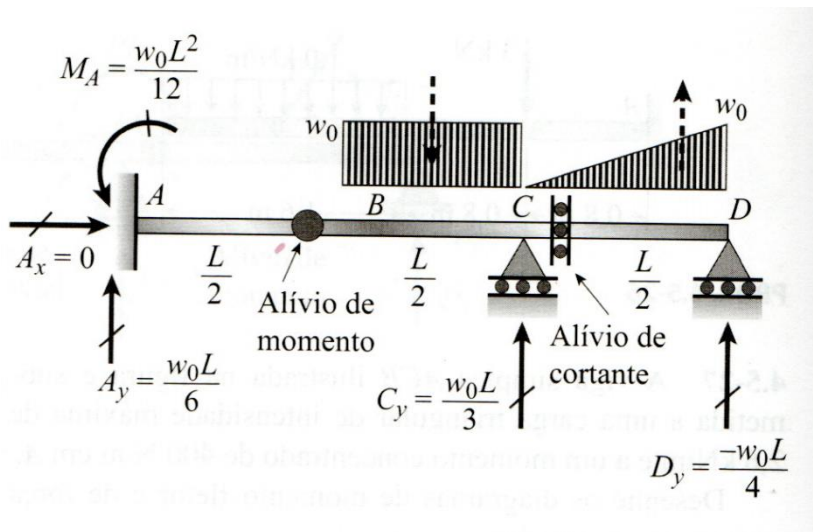


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

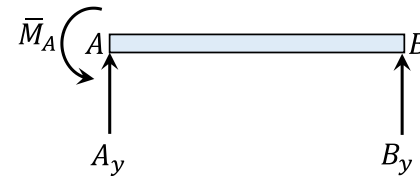
Departamento de Engenharia Mecânica

4.5-34 A viga composta a seguir tem um *alívio de momento* logo à esquerda de B e um *alívio de cortante* logo à direita de C . As reações foram calculadas em A , C e D e são exibidas na figura.

Primeiro, confirme as expressões de reação usando a estática e, então, trace os diagramas de momento (M) e de força cortante (V). *Identifique* todos os valores críticos de V e M e também a *distância* dos pontos em que V e/ou M é zero.



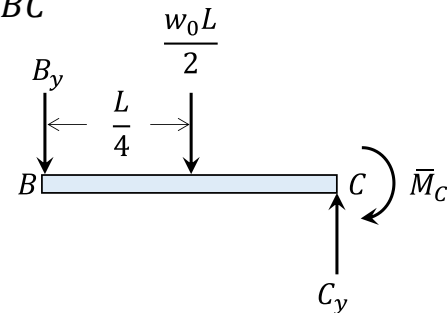
Trecho AB



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \bar{M}_A + B_y \frac{L}{2} = 0$$

Trecho BC

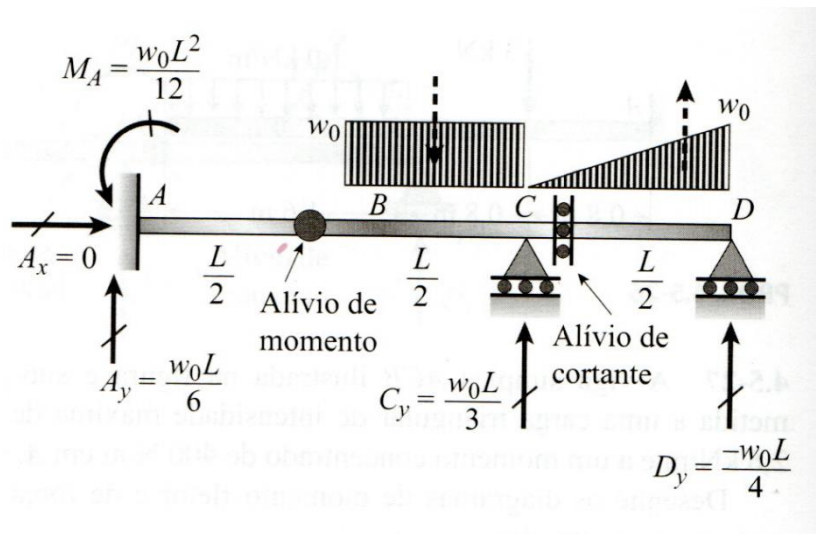


$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow C_y - B_y = \frac{w_0 L}{2}$$

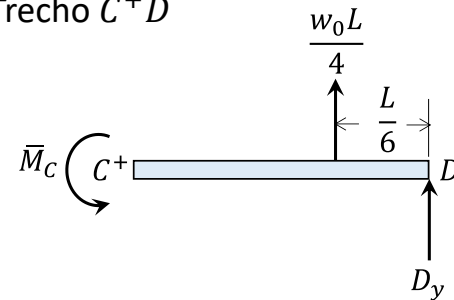
$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -\frac{w_0 L}{2} \frac{L}{4} - \bar{M}_C + C_y \frac{L}{2} = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Trecho C^+D



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow D_y = -\frac{w_0 L}{4}$$

$$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow \bar{M}_C - \frac{w_0 L}{4} \frac{L}{6} = 0$$

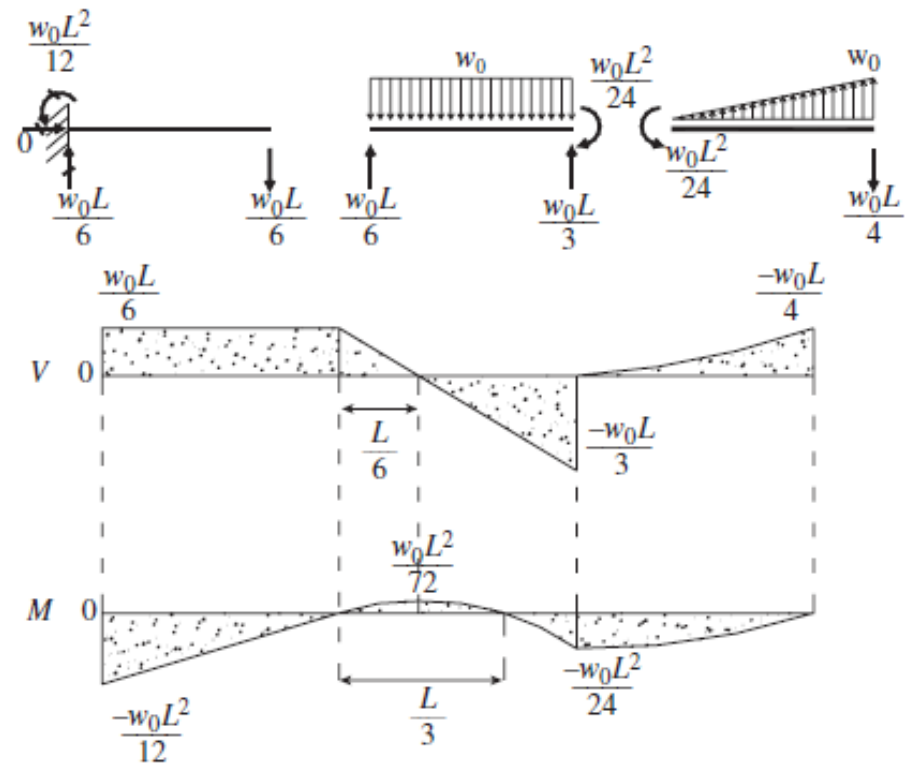
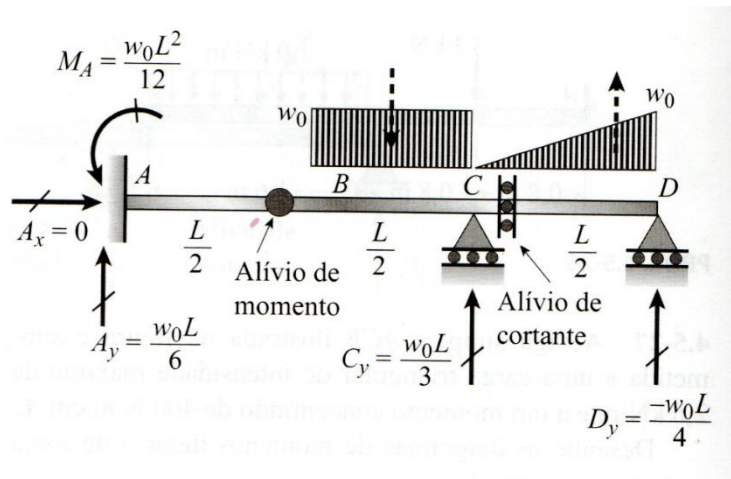
$$\Rightarrow \bar{M}_C = \frac{w_0 L^2}{24} \Rightarrow C_y = \frac{w_0 L}{3}$$

$$\Rightarrow B_y = -\frac{w_0 L}{6} \Rightarrow \bar{M}_A = \frac{w_0 L^2}{12}$$

$$\Rightarrow A_y = \frac{w_0 L}{6}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência:

Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Capítulo 4.