Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

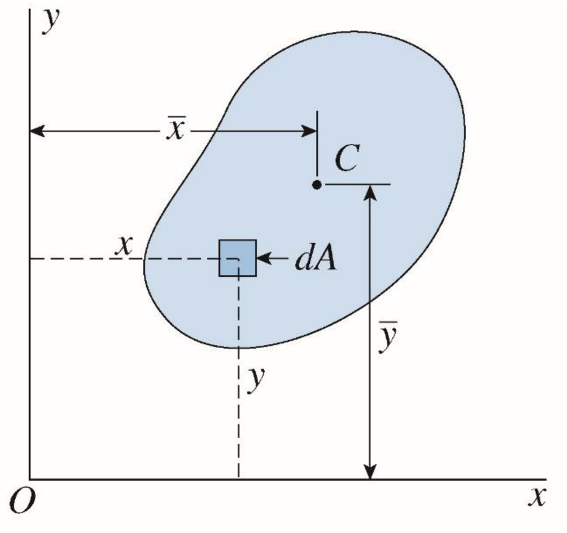
PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #16

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

30/05/23

12.3 Centroides de figuras planas



- Área:

$$A = \int dA$$

- Momentos de área de primeira ordem:

$$Q_x = \int ydA$$

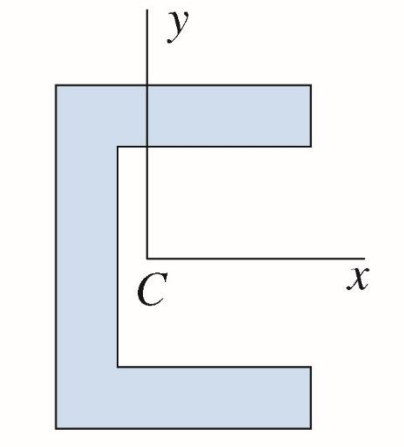
$$Q_y = \int xdA$$

- Centroide: $C = (\bar{x}, \bar{y})$

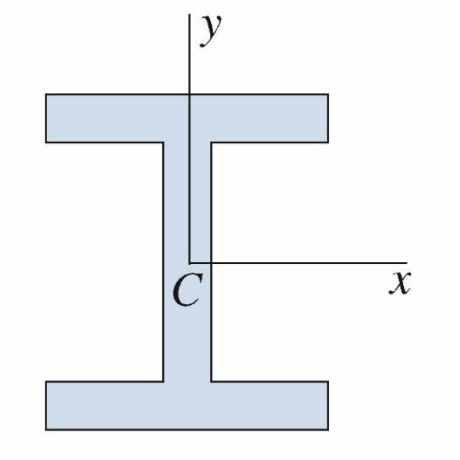
$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{1}{A}\int xdA$$

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{1}{A}\int ydA$$

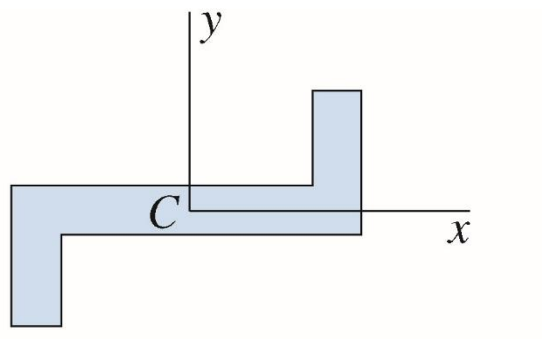
Figuras com simetria



a) um eixo de simetria



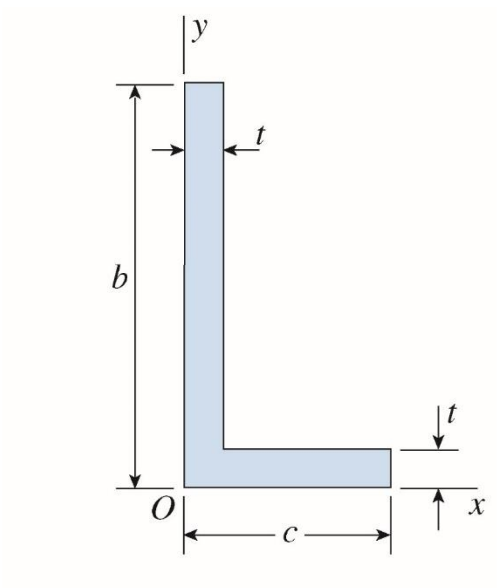
b) dois eixos de simetria

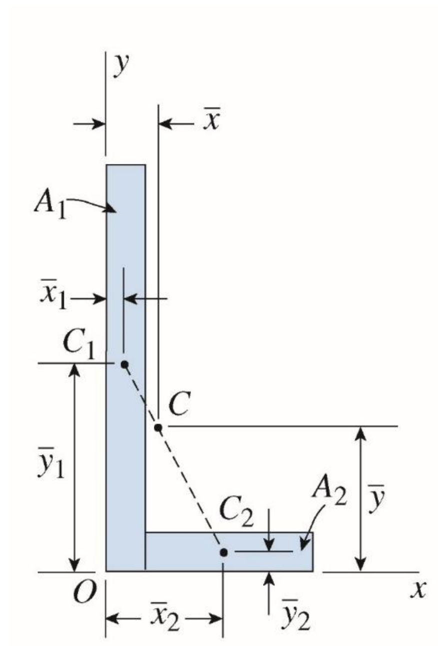


c) centro de simetria

(toda a linha que passa por C intercepta a área de forma simétrica)

12.3 Centroides de áreas compostas





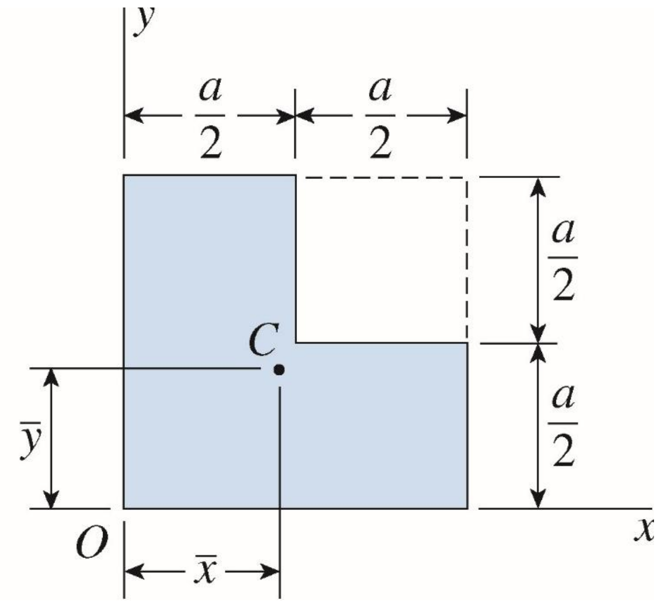
$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

$$Q_x = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i A_i \qquad Q_y = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i A_i$$

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i A_i$$

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i A_i$$

Exemplo:



$$A_1 = a^2$$

$$A_2 = -\frac{a^2}{4}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{3}{4}\mathrm{a}^2$$

$$\bar{x}_1 = \frac{a}{2}$$

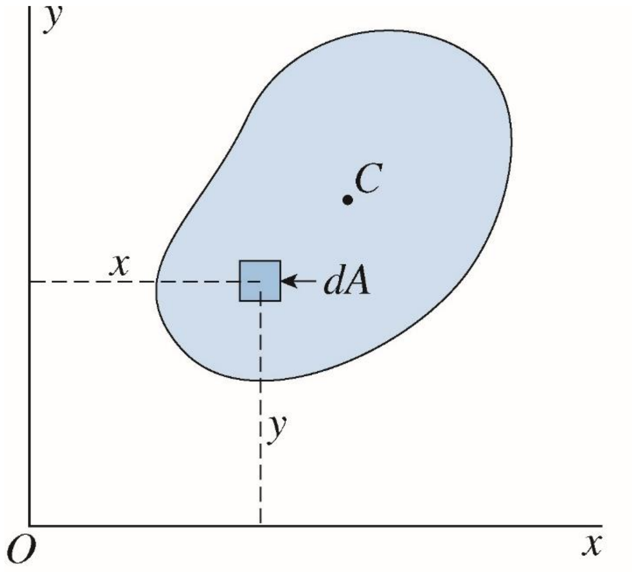
$$\bar{x}_2 = \frac{3}{4}a$$

$$\bar{x} = \frac{A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2}{A}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{5}{12}a$$

$$\bar{x} = \bar{y}\ (simetria)$$

12.4 Momentos de inércia de áreas planas

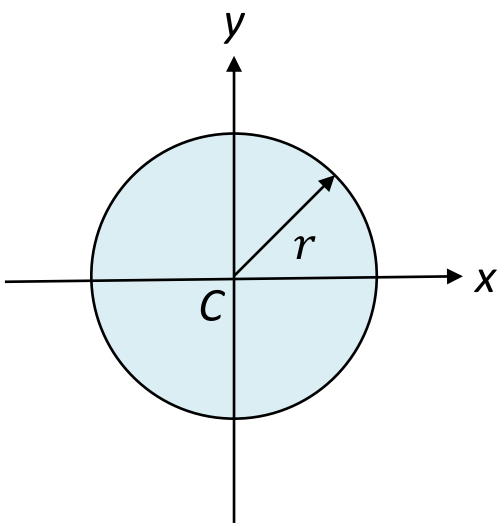


$$I_X = \int y^2 dA$$

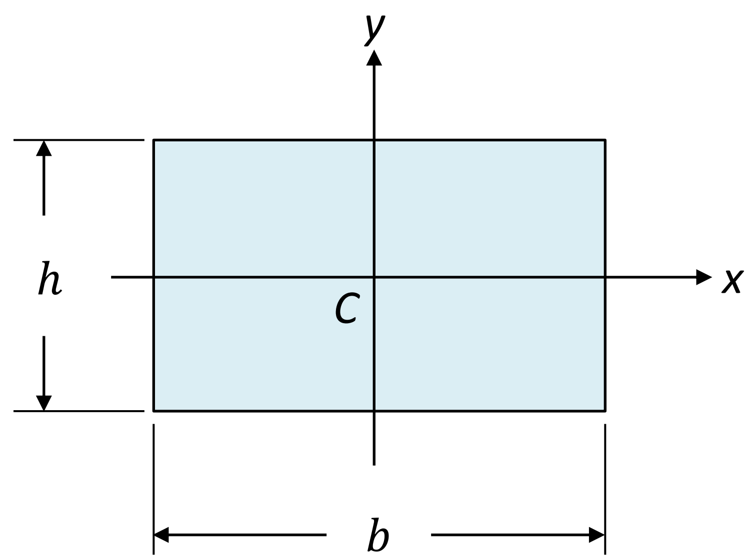
$$I_y = \int x^2 dA$$

(momentos de área de segunda ordem)

Figuras comuns:



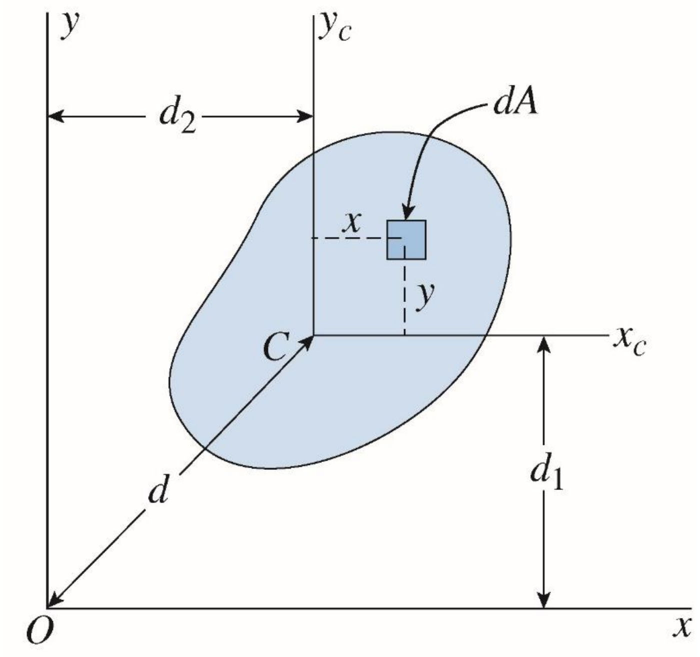
$$I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi r^4 = \frac{1}{64}\pi d^4$$



$$I_x = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} h b^3$$

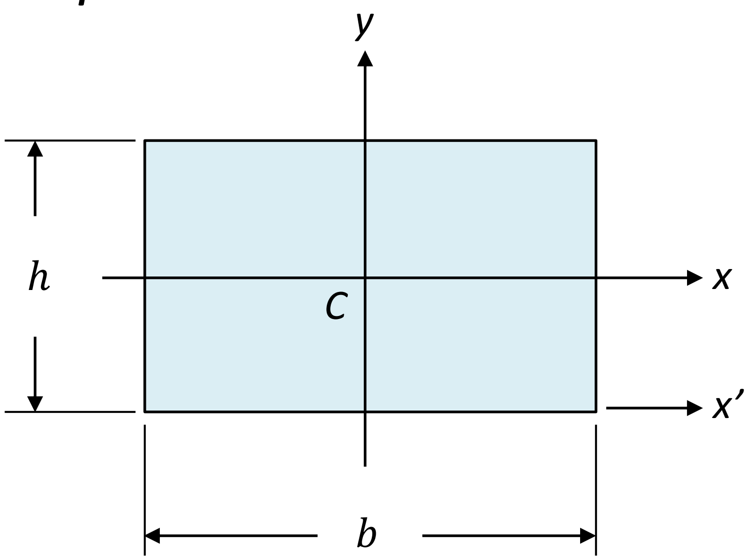
12.5 Teorema dos eixos paralelos para momentos de inércia



$$I_x = I_{x_c} + Ad_1^2$$

$$I_y = I_{y_C} + Ad_2^2$$

Exemplo:

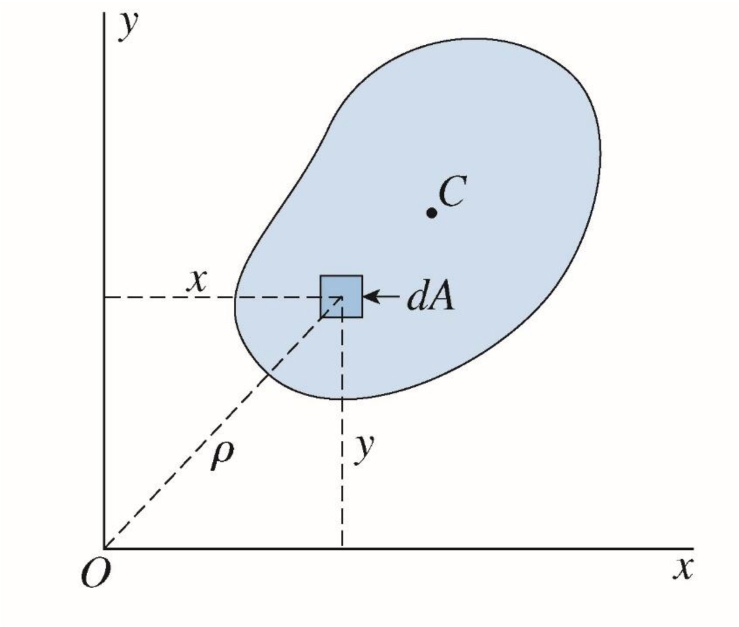


$$I_x = \frac{1}{12} bh^3$$

$$I_{x'} = I_x + bh \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow I_{x'} = \frac{1}{3} bh^3$$

12.6 Momentos de inércia polar

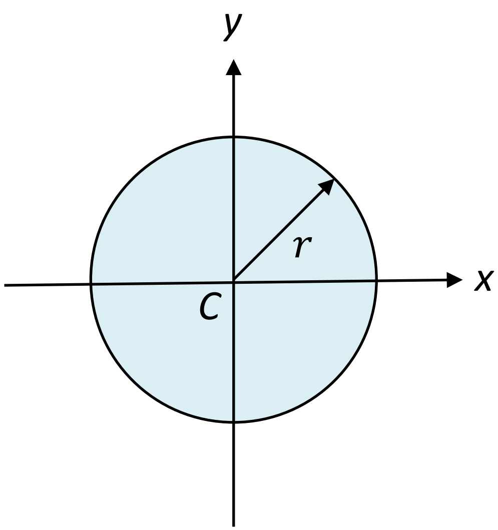


$$I_O = \int \rho^2 dA$$

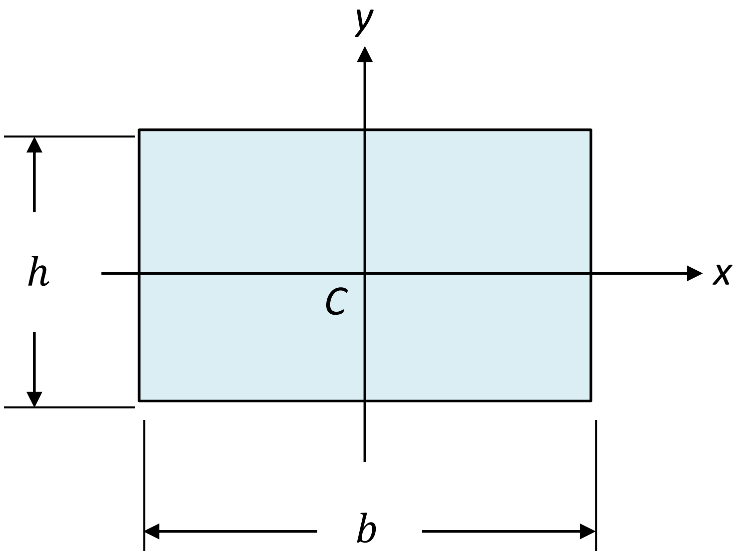
- Propriedade:

$$I_O = I_x + I_y$$

Figuras comuns:

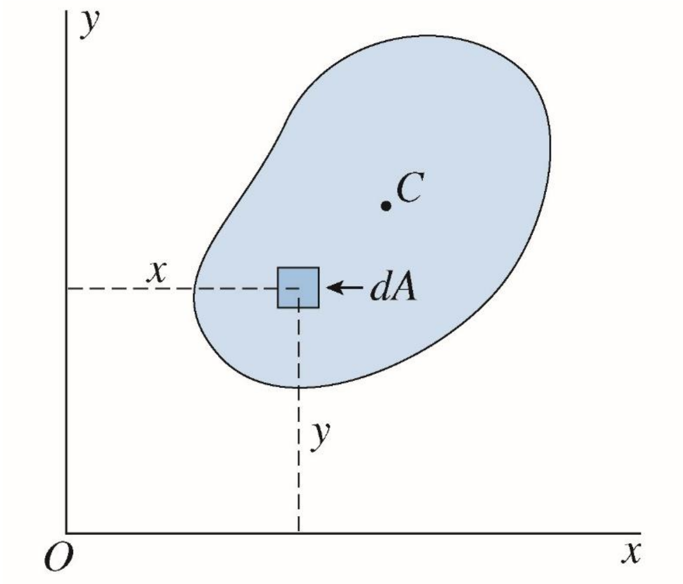


$$I_c = \frac{1}{2}\pi r^4 = \frac{1}{32}\pi d^4$$



$$I_c = \frac{1}{12} bh(b^2 + h^2)$$

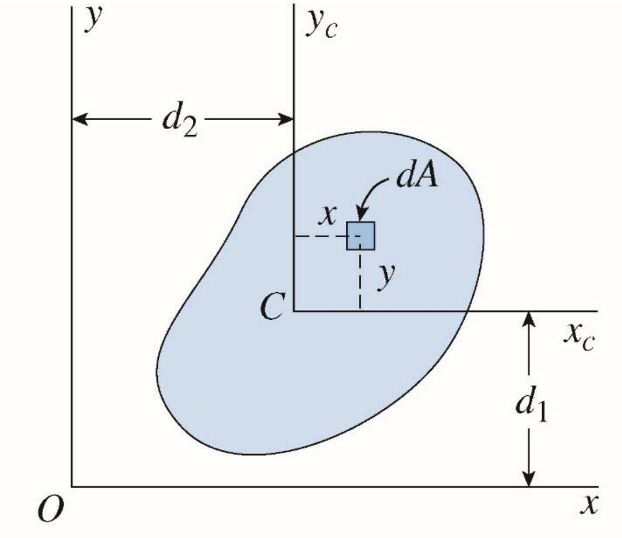
12.7 Produtos de inércia



$$I_{xy} = \int xy dA$$

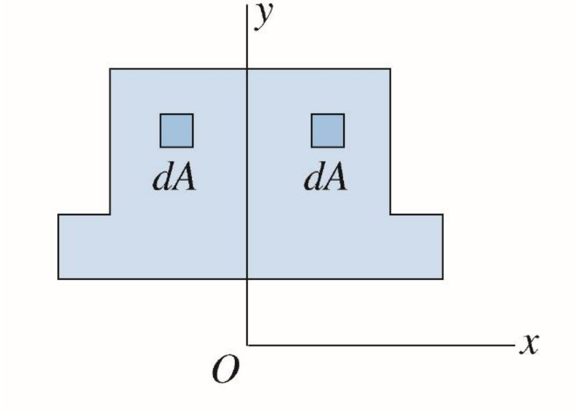
Propriedades:

- Teorema dos Eixos Paralelos:



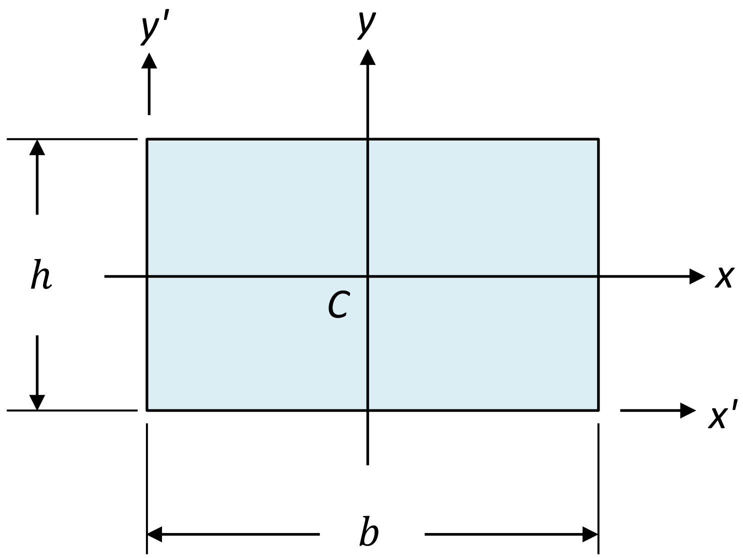
$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + A d_1 d_2$$

- Simetria:



$$I_{xy} = 0$$

Exemplo:

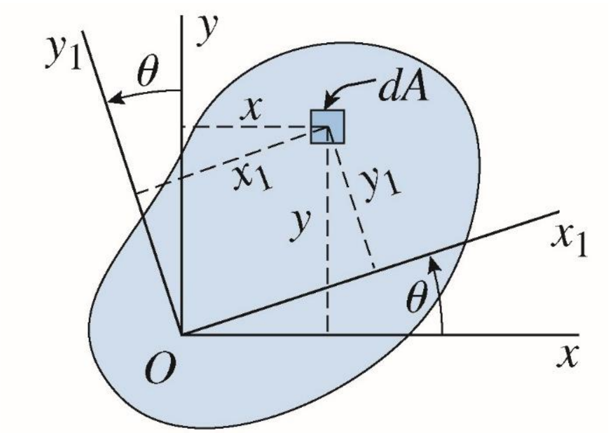


$$I_{xy} = 0\ (simetria)$$

$$I_{x'y'} = bh\frac{h}{2}\frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow I_{x'y'} = \frac{1}{4}\,b^2h^2$$

12.8 Rotação de eixos



$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{(I_x - I_y)}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{(I_x - I_y)}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

- Propriedade:

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y$$

12.9 Eixos principais e momentos de inércia principais

- Definição:

  Os momentos principais de inércia são o momento de inércia mínimo e o momento de inércia máximo, considerando todos os eixos que passam por um ponto.

  Os eixos principais de inércia são os eixos em relação aos quais o momento de inércia é mínimo ou máximo.

- Posição dos eixos principais:

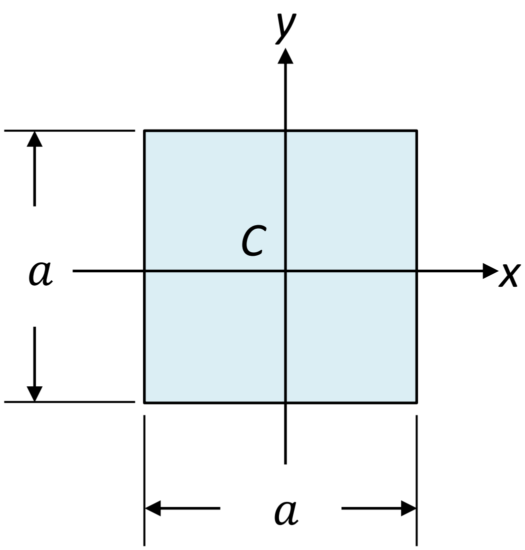
$$\tan 2\theta_p = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

- Momentos principais:

$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Exemplo:



$$I_x = I_y = \frac{1}{12} a^4$$

$$I_{xy} = 0$$

$$\Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{1}{12} a^4$$

- Neste caso todos os eixos que passam pelo ponto C são eixos principais
- Um ponto como esse é chamado de *ponto principal.*

Referência:

Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Capítulo 12.