



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica*

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

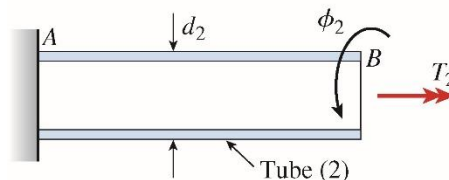
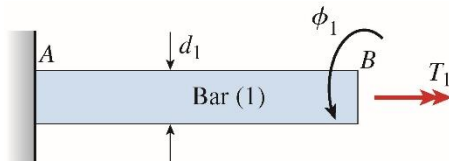
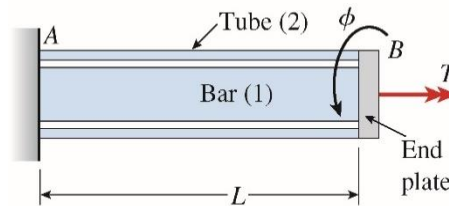
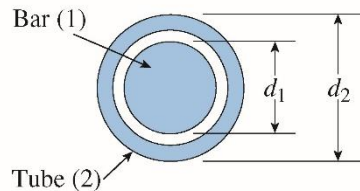
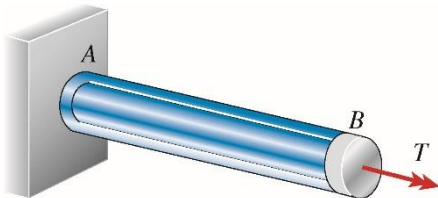
Aula #14

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

23/05/23



3.8 Membros de torção estaticamente indeterminados:



i) Equação de equilíbrio:

$$T_1 + T_2 = T$$

ii) Compatibilidade de giro:

$$\phi_1 = \phi_2$$

iii) Relações entre torque e giro:

$$\phi_1 = \frac{T_1 L}{G_1 I_{P1}}$$

$$\phi_2 = \frac{T_2 L}{G_2 I_{P2}}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

i) Equação de equilíbrio:

$$T_1 + T_2 = T$$

ii) Compatibilidade de giro:

$$\phi_1 = \phi_2$$

iii) Relações entre torque e giro

$$\phi_1 = \frac{T_1 L}{G_1 I_{P1}}$$

$$\phi_2 = \frac{T_2 L}{G_2 I_{P2}}$$

Aplicando-se *iii* em *ii*:

$$\frac{\cancel{T_1 L}}{G_1 I_{P1}} = \frac{\cancel{T_2 L}}{G_2 I_{P2}}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{G_2 I_{P2}}{G_1 I_{P1}} T_1$$

Substituindo-se em *i*:

$$\left(1 + \frac{G_2 I_{P2}}{G_1 I_{P1}}\right) T_1 = T$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{G_1 I_{P1}}{G_1 I_{P1} + G_2 I_{P2}} T$$

Analogamente:

$$\Rightarrow T_2 = \frac{G_2 I_{P2}}{G_1 I_{P1} + G_2 I_{P2}} T$$



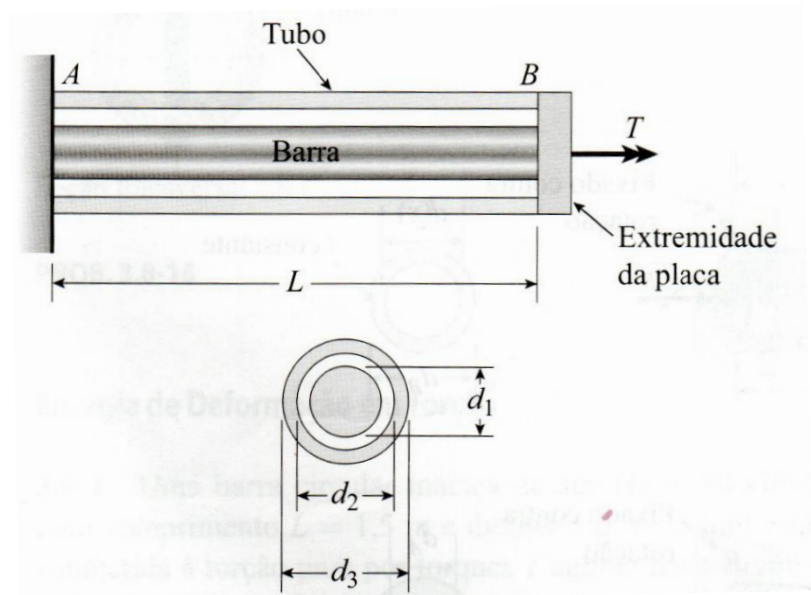
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3.8-11 Uma barra de aço maciça de diâmetro $d_1 = 50$ mm está circundada por um tubo de diâmetro externo $d_3 = 75$ mm e diâmetro interno $d_2 = 65$ mm (veja a figura). Tanto a barra como o tubo estão fixados rigidamente por um suporte na extremidade A e unidos de forma segura a uma placa rígida na extremidade B . A barra composta, que tem comprimento $L = 660$ mm, é torcida por um torque $T = 2$ kN·m agindo na placa da extremidade.

(a) Determine as tensões de cisalhamento máximas τ_1 e τ_2 na barra e no tubo, respectivamente.

(b) Determine o ângulo de torção ϕ (em graus) da placa, assumindo que o módulo de elasticidade do aço é $G = 80$ GPa.

(c) Determine a rigidez de torção k_T da barra composta. (Sugestão: Use as Equações (3.44a) e (b) para encontrar os torques na barra e no tubo.)





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1 → barra

2 → tubo

i) Equação de equilíbrio:

$$T_1 + T_2 = T$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{I_1}{I_1 + I_2} T = 0,624 kNm$$

ii) Compatibilidade de giro:

$$\phi_1 = \phi_2$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{I_2}{I_1 + I_2} T = 1,376 kNm$$

iii) Relações entre torque e giro

$$\phi_1 = \frac{T_1 L}{G I_1} \quad \phi_2 = \frac{T_2 L}{G I_2}$$

$$I_1 = \frac{\pi}{32} d_1^4 = 6,14 \cdot 10^{-7} m^4$$

$$I_2 = \frac{\pi}{32} (d_3^4 - d_2^4) = 1,35 \cdot 10^{-6} m^4$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3.8-11 Uma barra de aço maciça de diâmetro $d_1 = 50$ mm está circundada por um tubo de diâmetro externo $d_3 = 75$ mm e diâmetro interno $d_2 = 65$ mm (veja a figura). Tanto a barra como o tubo estão fixados rigidamente por um suporte na extremidade A e unidos de forma segura a uma placa rígida na extremidade B . A barra composta, que tem comprimento $L = 660$ mm, é torcida por um torque $T = 2$ kN·m agindo na placa da extremidade.

(a) Determine as tensões de cisalhamento máximas τ_1 e τ_2 na barra e no tubo, respectivamente.

(b) Determine o ângulo de torção ϕ (em graus) da placa, assumindo que o módulo de elasticidade do aço é $G = 80$ GPa.

(c) Determine a rigidez de torção k_T da barra composta. (Sugestão: Use as Equações (3.44a) e (b) para encontrar os torques na barra e no tubo.)

$$T_1 = 0,624 \text{ kNm} \quad I_1 = 6,14 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$T_2 = 1,376 \text{ kNm} \quad I_2 = 1,35 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\text{a) } \tau_1 = \frac{T_1 d_1}{I_1 2} = 25,4 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{T_2 d_3}{I_2 2} = 38,2 \text{ MPa}$$

$$\text{b) } \phi = \frac{T_1 L}{G I_1} = \frac{T_2 L}{G I_2} = 8,40 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,48^\circ$$

$$\text{c) } k_T = \frac{T}{\phi} = 238 \text{ kNm/rad}$$

ou

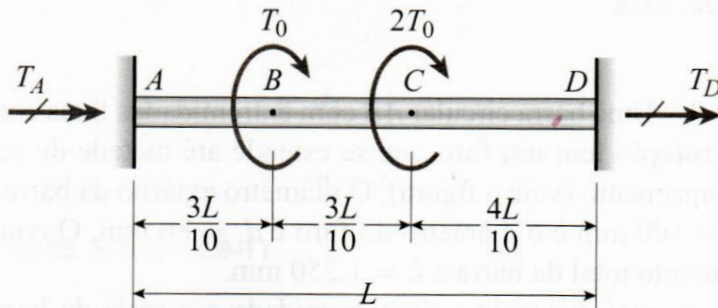
$$k_T = \frac{G I_1}{L} + \frac{G I_2}{L} = \frac{G}{L} (I_1 + I_2)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3.8-1 Uma barra circular maciça $ABCD$ com extremidades engastadas é solicitada por torques T_0 e $2T_0$ nos locais indicados na figura.

Obtenha uma fórmula para o máximo ângulo de torção $\phi_{\max}$ da barra. (Sugestão: Use as Equações (3.46a) e (b) do Exemplo 3.9 para obter os torques de reação.)



i) Equilíbrio:

$$T_A + T_D = 3T_0$$

ii) Compatibilidade de giro:

$$\phi_{AB} + \phi_{BC} + \phi_{CD} = 0$$

iii) Relações entre torque e giro:

$$\phi_{AB} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{GI_P} \quad \phi_{BC} = \frac{T_{BC}L_{BC}}{GI_P} \quad \phi_{CD} = \frac{T_{CD}L_{CD}}{GI_P}$$

$$T_{AB} = -T_A \quad T_{BC} = -T_A + T_0$$

$$T_{CD} = -T_A + 3T_0$$

$$\Rightarrow T_A = \frac{3}{2}T_0 \quad \Rightarrow T_D = \frac{3}{2}T_0$$

$$\phi_A = \phi_D = 0$$

$$\phi_B = \phi_{AB} = -\frac{9T_0L}{20GI_P}$$

$$\phi_C = \phi_{AB} + \phi_{BC} = -\frac{3T_0L}{5GI_P}$$

$$\Rightarrow \phi_{\max} = \frac{3T_0L}{5GI_P}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência:

Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Capítulo 3.