



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

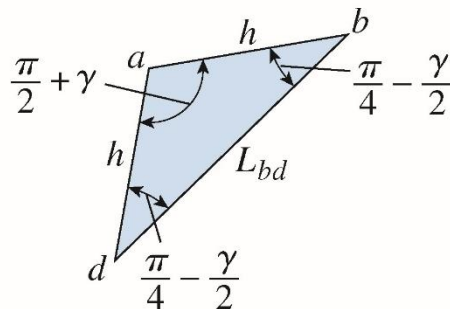
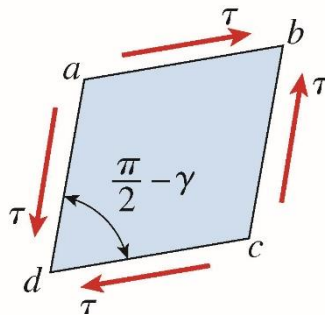
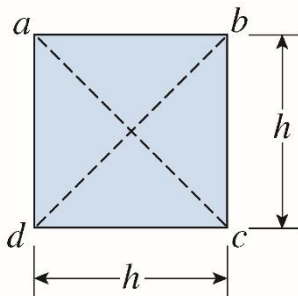
Aula #12

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

09/05/23



3.5 Relação entre os módulos de elasticidade E e G



$$L_{bd} = \sqrt{2}h (1 + \varepsilon_{m\acute{a}x}) \quad (1)$$

Lei dos cossenos:

$$\begin{aligned} L_{bd}^2 &= h^2 + h^2 - 2h^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) \\ &= 2h^2 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)\right) = 2h^2(1 + \sin \gamma) \quad (2) \end{aligned}$$

(1)²=(2):

$$\begin{aligned} \cancel{2h^2} (1 + \varepsilon_{m\acute{a}x})^2 &= \cancel{2h^2} (1 + \sin \gamma) \\ \Rightarrow \cancel{1} + 2\varepsilon_{m\acute{a}x} + \varepsilon_{m\acute{a}x}^2 &= \cancel{1} + \sin \gamma \end{aligned}$$

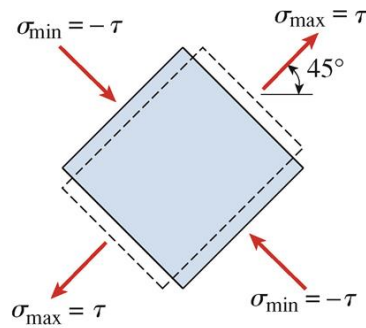
Para pequenas deformações:

$$\Rightarrow \varepsilon_{m\acute{a}x} = \frac{\gamma}{2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Por outro lado:



$$\varepsilon_{\max} = \frac{\tau}{E} + \nu \frac{\tau}{E} = \frac{\tau}{E} (1 + \nu) \quad (1)$$

Do slide anterior: $\varepsilon_{\max} = \frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{2G} \quad (2)$

Como (1)=(2) então: $\frac{\cancel{\tau}}{2G} = \frac{\cancel{\tau}}{E} (1 + \nu)$

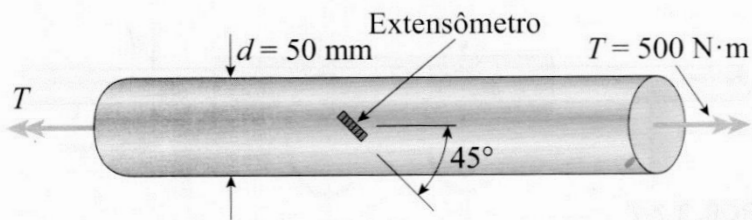
$$\Rightarrow G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3.5-4 Uma barra circular sólida de diâmetro $d = 50$ mm é torcida em uma máquina de teste (veja a figura) até que o torque aplicado atinja o valor de $T = 500$ N·m. Nesse valor de torque, um extensômetro orientado a 45° em relação ao eixo da barra fornece uma leitura de $\epsilon = 339 \times 10^{-6}$.

Qual é o módulo de cisalhamento G do material?



$$G = \frac{\tau_{\text{máx}}}{\gamma_{\text{máx}}}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T}{I_p} \frac{d}{2} = \frac{16 T}{\pi d^3}$$

$$\gamma_{\text{máx}} = 2 \epsilon_{\text{máx}} = 2 \epsilon_{45^\circ}$$

$$\Rightarrow G = \frac{8 T}{\pi d^3 \epsilon_{45^\circ}} = 30,0 \text{ GPa}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3.5-6 Uma barra maciça circular de aço ($G = 78 \text{ GPa}$) transmite um torque $T = 360 \text{ N}\cdot\text{m}$. As tensões admissíveis em tração, compressão e cisalhamento são de 90 MPa , 70 MPa e 40 MPa , respectivamente. A deformação de tração admissível é de 220×10^{-6} .

Determine o diâmetro mínimo admissível d da barra.

i) $\tau_{adm} = 40 \text{ MPa}$

$$\tau_{adm} = \frac{16 T}{\pi d_{\min}^3}$$

$$\Rightarrow d'_{\min} = \sqrt[3]{\frac{16 T}{\pi \tau_{adm}}} = 35,8 \text{ mm}$$

ii) $\varepsilon_{adm} = 220 \mu$

$$\gamma_{adm} = 2 \varepsilon_{adm}$$

$$\tau_{adm} = G \gamma_{adm}$$

$$\Rightarrow d''_{\min} = \sqrt[3]{\frac{8 T}{\pi G \varepsilon_{adm}}} = 37,6 \text{ mm}$$

iii) $d_{\min} = \max\{d'_{\min}, d''_{\min}\} = 37,6 \text{ mm}$

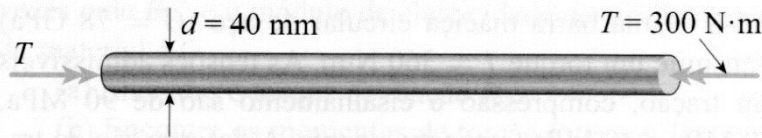


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3.5-10 Uma barra maciça de alumínio ($G = 27 \text{ GPa}$) de diâmetro $d = 40 \text{ mm}$ está submetida a torques $T = 300 \text{ N}\cdot\text{m}$ agindo nas direções ilustradas na figura.

(a) Determine as máximas tensões de cisalhamento, tração e compressão na barra e mostre essas tensões em esboços de elementos de tensão devidamente orientados.

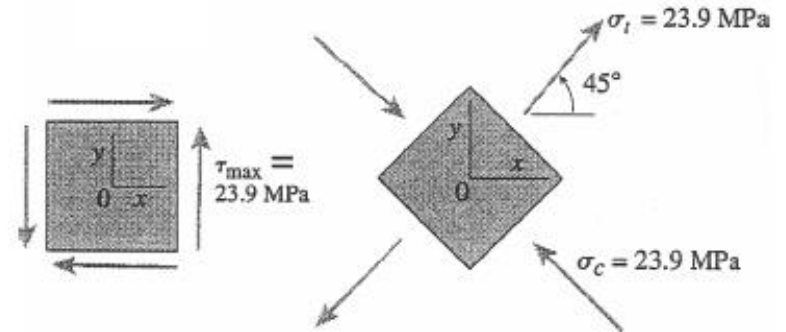
(b) Determine as máximas deformações correspondentes (cisalhamento, tração e compressão) na barra e mostre essas deformações em esboços dos elementos deformados.



$$a) \quad \tau_{\max} = \frac{T d}{I_p 2} = \frac{16T}{\pi d^3} = 23,9 \text{ MPa}$$

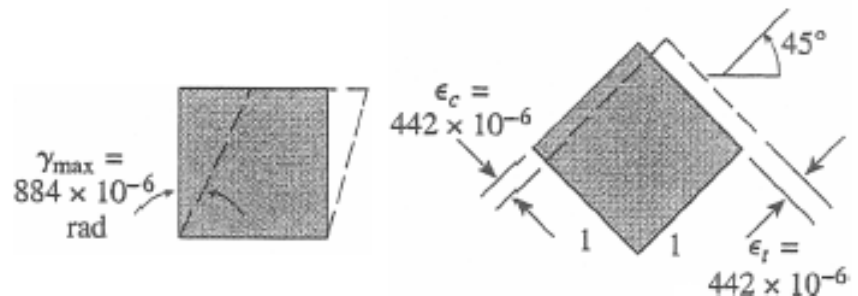
$$\sigma_t = \tau_{\max} = 23,9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = -\tau_{\max} = -23,9 \text{ MPa}$$



$$b) \quad \gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = 884 \mu \text{ rad}$$

$$\epsilon_{\max} = \frac{\gamma_{\max}}{2} = 442 \mu \text{ rad}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Os três exercícios que seguem foram criados e resolvidos usando o ChatGPT. Eles têm enunciados incompletos e/ou erros nas soluções e são colocados aqui como mera curiosidade.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 1:

A steel shaft with a diameter of 50 mm and a length of 2 meters is subjected to a torque of 200 Nm. If the allowable shear stress for the steel is 100 MPa, what is the maximum angle of twist of the shaft?



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solution: The torque T applied to the shaft can be related to the shear stress τ and the polar moment of inertia J by the following equation:

$$T = (\tau * J) / R$$

where R is the radius of the shaft, $J = \pi/32 * (d^4)$ is the polar moment of inertia, and d is the diameter of the shaft.

$$R = d/2 = 25 \text{ mm} \quad J = \pi/32 * (0.05 \text{ m})^4 = 6.136e-7 \text{ m}^4$$

$$\tau = T * R / J = 200 \text{ Nm} * 0.025 \text{ m} / 6.136e-7 \text{ m}^4 = 8.18e7 \text{ Pa}$$

The maximum allowable shear stress is $100 \text{ MPa} = 1e8 \text{ Pa}$, which is greater than the calculated shear stress. Therefore, the shaft is safe.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

The angle of twist θ can be calculated using the following equation:

$$\theta = T * L / (G * J)$$

where L is the length of the shaft, and G is the shear modulus of elasticity of the steel.

G for steel is typically around 80 GPa = 8×10^{10} Pa.

$$\theta = 200 \text{ Nm} * 2 \text{ m} / (8 \times 10^{10} \text{ Pa} * 6.136 \times 10^{-7} \text{ m}^4) = 0.0065 \text{ radians}$$

Therefore, the maximum angle of twist is 0.0065 radians.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 2:

A stepped circular shaft is composed of two segments of different diameters. The first segment has a diameter of 50 mm and a length of 1 meter, while the second segment has a diameter of 80 mm and a length of 2 meters. If the shaft is subjected to a torque of 500 Nm at the junction of the two segments, what is the maximum shear stress in the shaft?



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solution:

The maximum shear stress in the shaft occurs at the junction of the two segments, where the shaft experiences a change in diameter. The polar moment of inertia J for each segment can be calculated using the following equation:

$$J = \pi/32 * (d^4)$$

where d is the diameter of the segment.

For the first segment, $J_1 = \pi/32 * (0.05 \text{ m})^4 = 6.136\text{e-}7 \text{ m}^4$ For the second segment, $J_2 = \pi/32 * (0.08 \text{ m})^4 = 2.488\text{e-}6 \text{ m}^4$

The maximum shear stress $\tau_{\max}$ can be calculated using the following equation:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\tau_{\max} = T * R / J$$

where T is the applied torque, R is the radius at the junction of the two segments, and J is the polar moment of inertia at the junction.

$$R = 0.05 \text{ m} + 0.08 \text{ m} / 2 = 0.065 \text{ m} \quad J = J_1 + J_2 = 3.102 \text{e-}6 \text{ m}^4$$

$$\tau_{\max} = 500 \text{ Nm} * 0.065 \text{ m} / 3.102 \text{e-}6 \text{ m}^4 = 1.05 \text{e}8 \text{ Pa}$$

Therefore, the maximum shear stress in the shaft is 105 MPa.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 3:

A circular shaft with a diameter of 60 mm and a length of 3 meters is subjected to two concentrated torques of 100 Nm and 200 Nm applied at distances of 0.5 meters and 2 meters from one end, respectively. What is the maximum shear stress in the shaft?



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solution:

The maximum shear stress in the shaft occurs at the section where the applied torques are highest. The polar moment of inertia J for the shaft can be calculated using the following equation:

$$J = \pi/32 * (d^4)$$

where d is the diameter of the shaft.

$$J = \pi/32 * (0.06 \text{ m})^4 = 7.853\text{e-}7 \text{ m}^4$$

The maximum shear stress $\tau_{\max}$ can be calculated using the following equation:

$$\tau_{\max} = T / J$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

where T is the applied torque at the section of interest.

At the section where the 200 Nm torque is applied, the maximum shear stress is:

$$\tau_{\max 1} = 200 \text{ Nm} / 7.853\text{e-}7 \text{ m}^4 = 2.55\text{e}8 \text{ Pa}$$

At the section where the 100 Nm torque is applied, the maximum shear stress is:

$$\tau_{\max 2} = 100 \text{ Nm} / 7.853\text{e-}7 \text{ m}^4 = 1.28\text{e}8 \text{ Pa}$$

Therefore, the maximum shear stress in the shaft is 2.55e8 Pa at the section where the 200 Nm torque is applied.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência:

Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Capítulo 3.

ChatGPT