



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #10

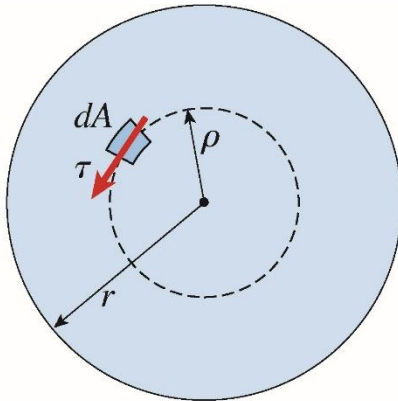
Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

02/05/23



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Fórmula de torção:



$$dM = \tau \rho dA = G\theta \rho^2 dA$$

$$T = \int_A dM = G\theta \int_A \rho^2 dA$$

Definição: Momento de Inércia Polar

$$I_P = \int_A \rho^2 dA$$

decorrem:

$$T = G\theta I_P = \frac{G\phi I_P}{L} \Rightarrow \phi = \frac{TL}{GI_P}$$

$$\tau = G\rho\theta = \frac{G\rho\phi}{L} \Rightarrow \tau = \frac{T\rho}{I_P}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{\text{máx}} = \frac{Tr}{I_P}}$$

Fórmula de Torção



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Analogia de mola:

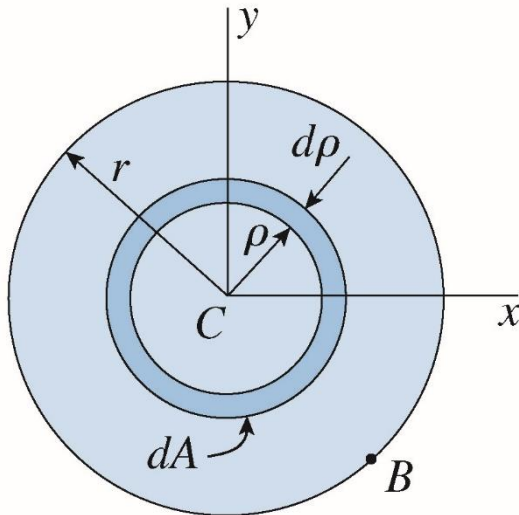
$$\phi = \frac{L}{GI_P} T \quad \Rightarrow \quad \phi = f_T T \quad \text{onde} \quad f_T = \frac{L}{GI_P} \quad (\text{flexibilidade à torção})$$

$$T = \frac{GI_P}{L} \phi \quad \Rightarrow \quad T = k_T \phi \quad \text{onde} \quad k_T = \frac{GI_P}{L} \quad (\text{rigidez à torção linear})$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Seção circular:



$$I_P = \int_A \rho^2 dA$$

$$dA = 2\pi \rho d\rho$$

$$\Rightarrow I_P = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho$$

$$\Rightarrow I_P = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$\Rightarrow I_P = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$d = 2r(\text{ diâmetro})$$

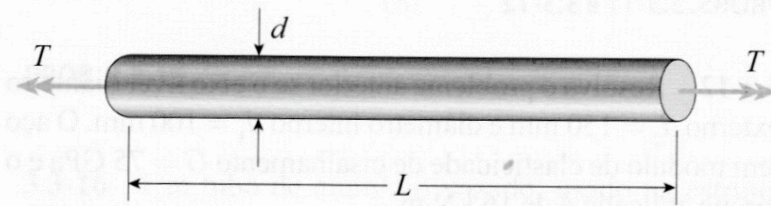


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3.3-4 Uma barra de alumínio de seção transversal circular é torcida por torques T agindo nas extremidades (veja a figura). As dimensões e o módulo de elasticidade de cisalhamento são os seguintes: $L = 1,4$ m, $d = 32$ mm e $G = 28$ GPa.

(a) Determine a rigidez à torção ^{linear} da barra.

(b) Se o ângulo de torção da barra for 5° , qual será a máxima tensão de cisalhamento? Qual será a máxima deformação de cisalhamento (em radianos)?



a)

$$k_T = \frac{GI_P}{L} \quad I_P = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\Rightarrow k_T = \frac{\pi G d^4}{32 L} = 2,06 \text{ kNm/rad}$$

b)

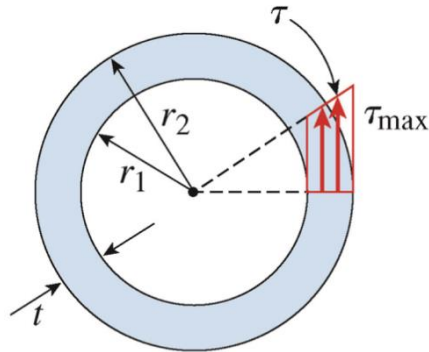
$$\gamma_{\max} = \frac{d \phi}{2 L} = 997 \mu \text{ rad}$$

$$\tau_{\max} = G \gamma_{\max} = 27,9 \text{ MPa}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tubos circulares:



$$I_P = \frac{\pi (r_2^4 - r_1^4)}{2} \quad \text{ou} \quad I_P = \frac{\pi (d_2^4 - d_1^4)}{32}$$

$$\tau_{\text{máx}} = Gr_2\theta = \frac{T}{I_p}r_2$$

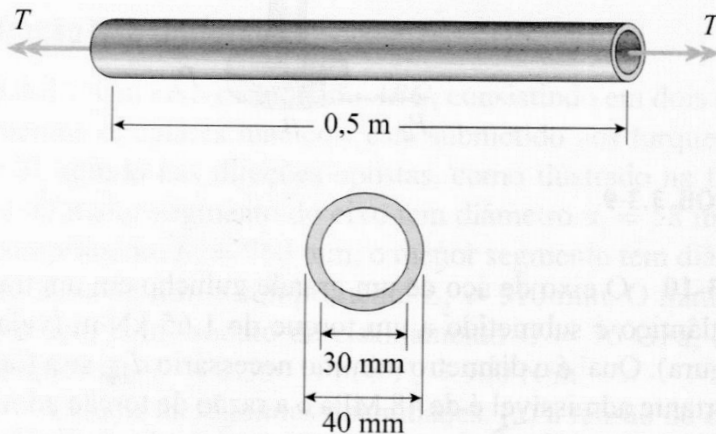
$$\tau_{\text{mín}} = Gr_1\theta = \frac{T}{I_p}r_1 = \frac{T}{I_p}r_1$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3.3-7 Um tubo circular de alumínio é submetido à torção por torques T aplicados nas extremidades (veja a figura). A barra tem 0,5 m de comprimento, e os diâmetros interno e externo têm 30 mm e 40 mm, respectivamente. Foi determinado através de medições que o ângulo de torção é de $3,57^\circ$ quando o torque é igual a 600 N·m.

Calcule a tensão de cisalhamento máxima $\tau_{\max}$ no tubo, o módulo de elasticidade de cisalhamento G e a máxima deformação de cisalhamento $\gamma_{\max}$ (em radianos).



$$\gamma_{\max} = \frac{d_{\text{ext}}}{2} \frac{\phi}{L} = 2492 \mu \text{ rad}$$

$$\phi = \frac{TL}{GI_P} \Rightarrow G = \frac{TL}{\phi I_P} = 28,0 \text{ GPa}$$

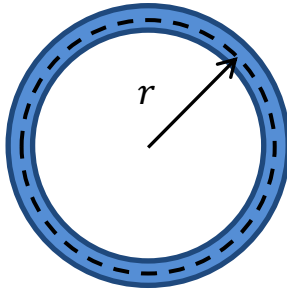
$$I_P = \frac{\pi}{32} (d_{\text{ext}}^4 - d_{\text{int}}^4) = 1,718 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$\tau_{\max} = G \gamma_{\max} = 69,8 \text{ MPa}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tubos de parede fina:



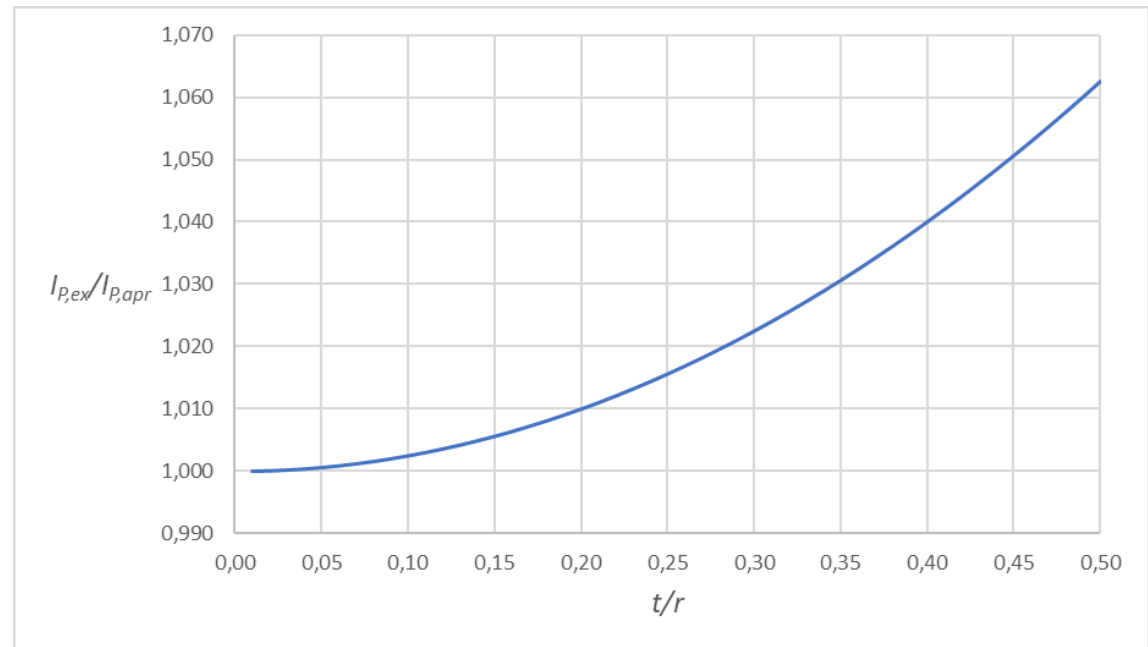
$$I_p \cong Ar^2 = 2\pi r^3 t = \frac{\pi}{4} d^3 t$$

$r \rightarrow$ raio médio

$t \rightarrow$ espessura

Mostra-se que:

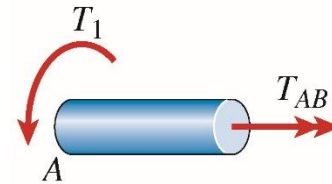
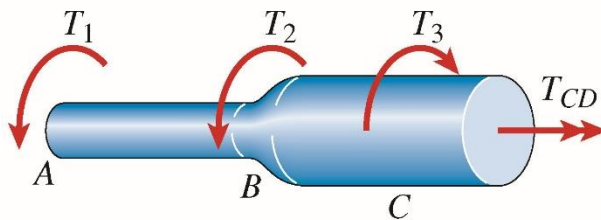
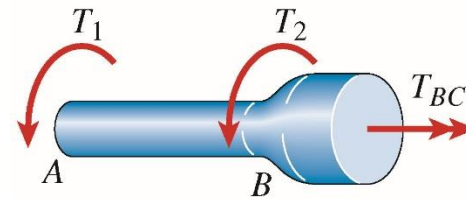
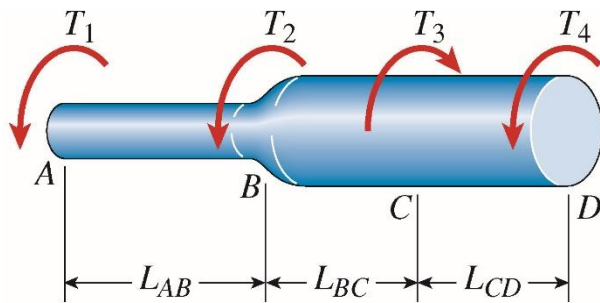
$$\frac{I_{p,ex}}{I_{p,apr}} = 1 + \left(\frac{t}{2r}\right)^2$$





3.4 Torção não-uniforme

Eixo escalonado:



$$\phi = \sum_i^n \phi_i = \sum_i^n \frac{T_i L_i}{G_i (I_P)_i}$$

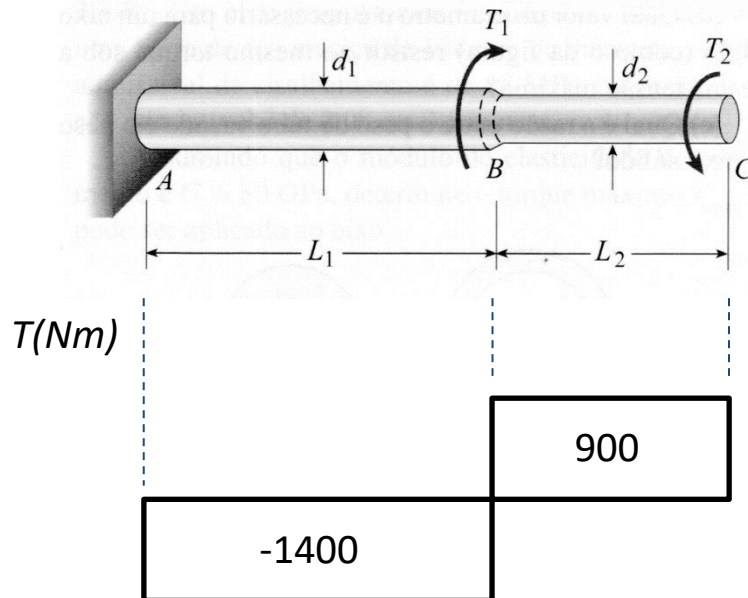


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

3.4-1 Um eixo escalonado ABC , consistindo em dois segmentos circulares maciços, está submetido aos torques T_1 e T_2 agindo nas direções opostas, como ilustrado na figura. O maior segmento do eixo tem diâmetro $d_1 = 58 \text{ mm}$ e comprimento $L_1 = 760 \text{ mm}$; o menor segmento tem diâmetro $d_2 = 45 \text{ mm}$ e comprimento $L_2 = 510 \text{ mm}$. O material é o aço, com módulo de cisalhamento $G = 76 \text{ GPa}$, e os torques são $T_1 = 2.300 \text{ N}\cdot\text{m}$ e $T_2 = 900 \text{ N}\cdot\text{m}$.

Calcule as seguintes quantidades: (a) a tensão de cisalhamento máxima $\tau_{\max}$ no eixo e (b) o ângulo de torção ϕ_C (em graus) na extremidade C .



a) $\tau_{\max} = \frac{Tr}{I_P} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3}$

i) Trecho AB

$$\tau'_{\max} = \frac{16T_{AB}}{\pi d_{AB}^3} = 36,5 \text{ MPa}$$

ii) Trecho BC

$$\tau''_{\max} = \frac{16T_{BC}}{\pi d_{BC}^3} = 50,3 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow \tau_{\max} = 50,3 \text{ MPa}$$

b)

$$\phi_i = \frac{T_i L_i}{(GI_P)_i} = \frac{32T_i L_i}{G\pi d_i^4}$$

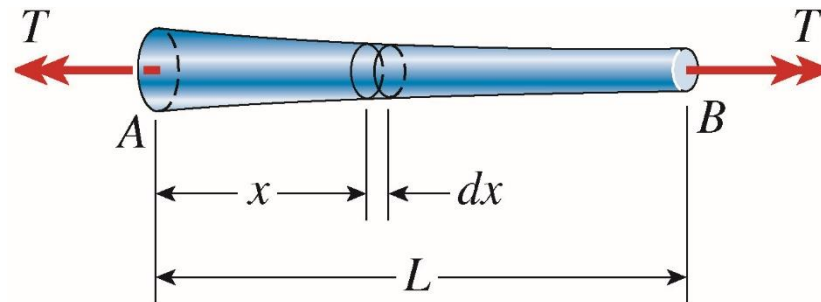
$$\phi = \frac{32}{G\pi} \left(\frac{T_{AB} L_{AB}}{d_1^4} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{d_2^4} \right)$$

$$\Rightarrow \phi = 2,40 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,138^\circ$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Eixo com parâmetros variando continuamente:



$$d\phi = \frac{Tdx}{GI_p(x)}$$

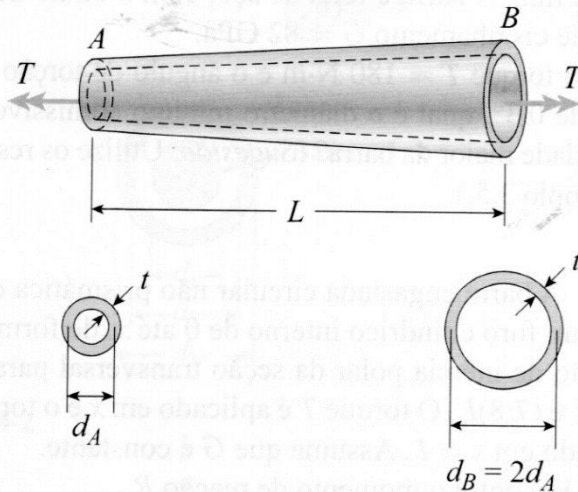
$$\phi = \int_0^L d\phi = \int_0^L \frac{T(x)}{GI_p(x)} dx$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3.4-12 Um tubo uniformemente afilado AB , de seção transversal circular vazada, está representado na figura. O tubo tem espessura de parede constante t e comprimento L . Os diâmetros médios nas extremidades são d_A e $d_B = 2d_A$. O momento de inércia polar pode ser representado pela fórmula aproximada $I_p \approx \pi d^3 t / 4$ (veja a Equação 3.18).

Deduza uma fórmula para o ângulo de torção ϕ do tubo quando ele está submetido a torques T agindo nas extremidades.



$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)}{GI_P(x)} dx$$

$$I_P(x) = \frac{\pi d^3(x)t}{4}$$

$$d(x) = d_A \left(1 + \frac{x}{L} \right)$$

$$\phi = \frac{4T}{\pi G t d_A^3} \int_0^L \left(1 + \frac{x}{L} \right)^{-3} dx$$

$$= \frac{4T}{\pi G t d_A^3} \left(-\frac{L}{2} \right) \left(1 + \frac{x}{L} \right)^{-2} \Big|_0^L$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{3TL}{2\pi G t d_A^3}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência:

Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Capítulo 3.