



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica*

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #20

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

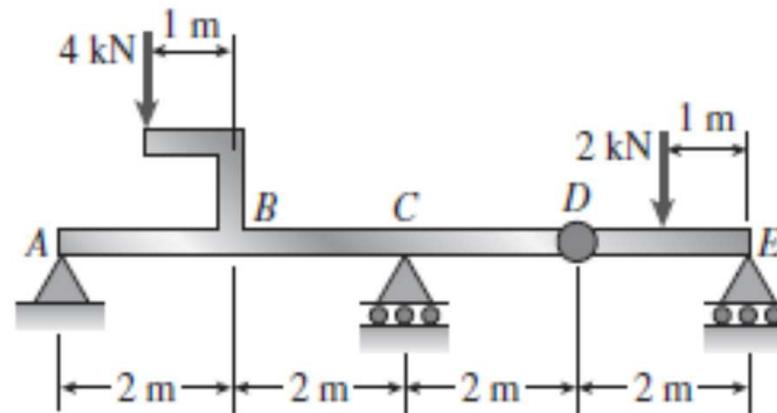
16/06/2023



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 4.5-30 The compound beam $ABCDE$ shown in the figure consists of two beams (AD and DE) joined by a hinged connection at D . The hinge can transmit a shear force but not a bending moment. The loads on the beam consist of a 4-kN force at the end of a bracket attached at point B and a 2-kN force at the midpoint of beam DE .

Draw the shear-force and bending-moment diagrams for this compound beam.

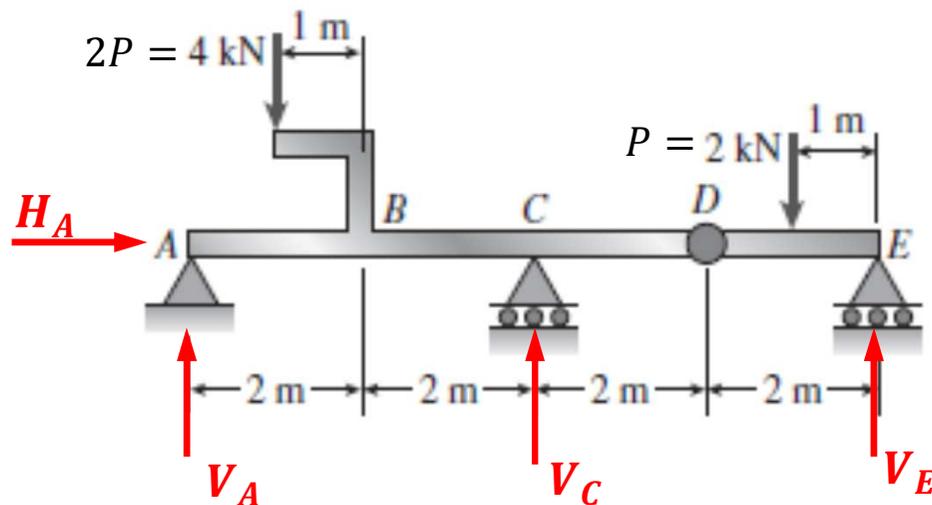




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

1) D.C.L.:



$$L = 1 \text{ m}$$

$$P = 2 \text{ kN}$$

2) Grau de hiperestaticidade estrutural: $g = 4 - 4 = 0$ (estrutura isostática)

3) Equações de equilíbrio estático:

$$H_A = 0$$

$$V_E \cdot 2L = PL$$

$$V_A \cdot 4L + P \cdot 3L = V_E \cdot 4L + 2P \cdot 3L$$

$$V_E = \frac{P}{2} = 1 \text{ kN}$$

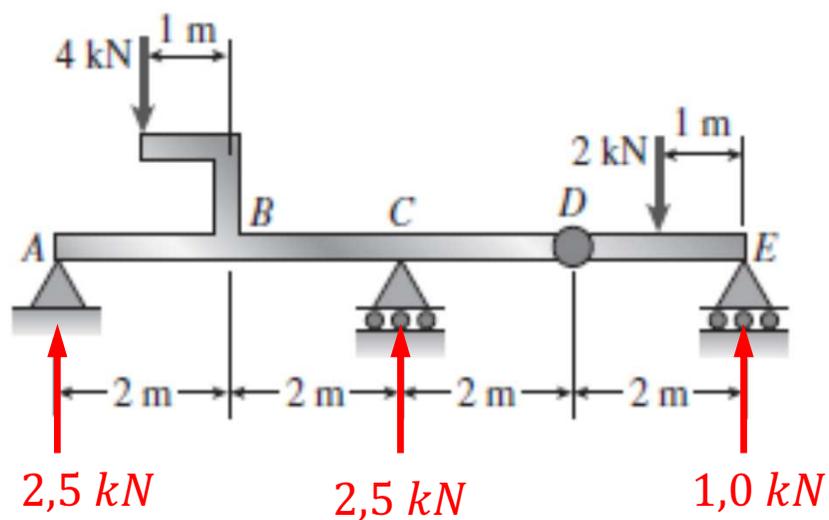
$$V_A = \frac{5P}{4} = 2,5 \text{ kN}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Finalmente: $V_A + V_C + V_E = 3P$ \longleftrightarrow $\frac{5P}{4} + V_C + \frac{P}{2} = 3P$

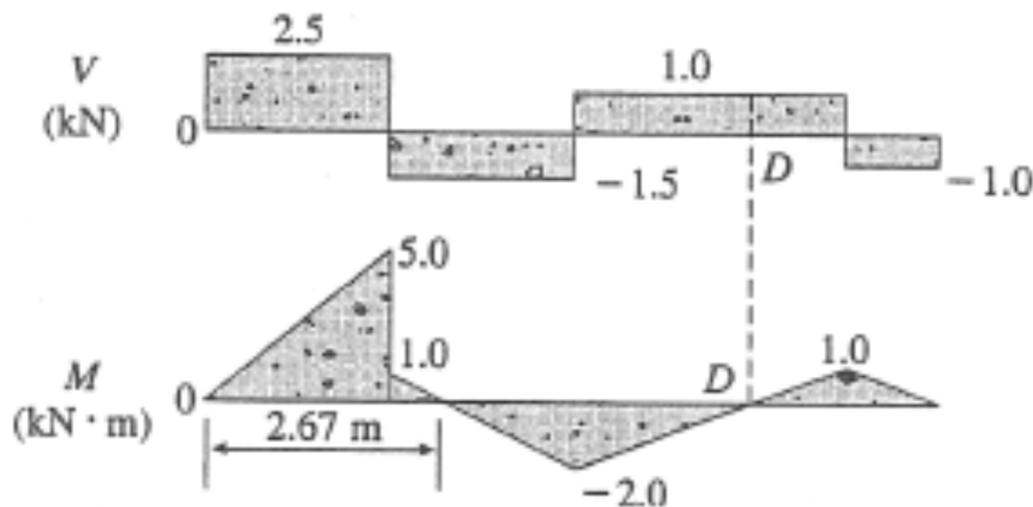
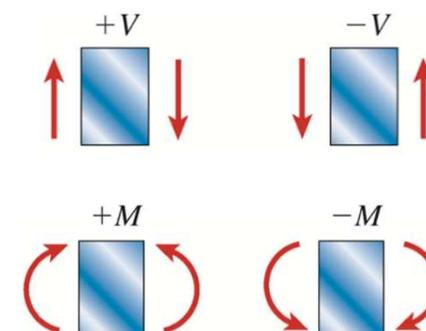
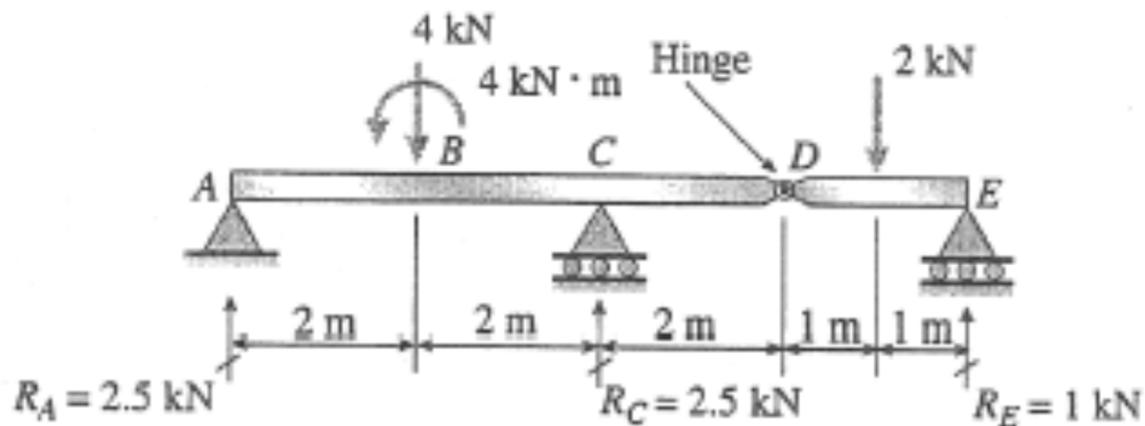
$$V_C = \frac{5P}{4} = 2,5 \text{ kN}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Diagramas de forças cortantes e de momentos fletores:



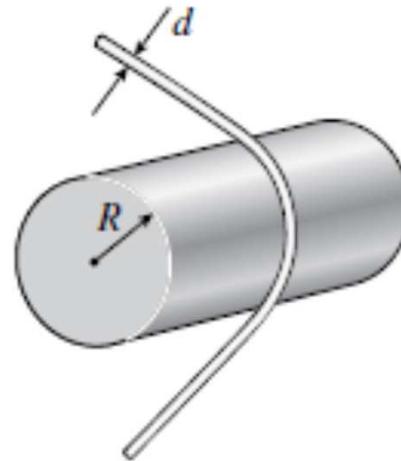
$V \text{ (kN)}$

$M \text{ (kN} \cdot \text{m)}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 5.4-1 Determine the maximum normal strain ϵ_{\max} produced in a steel wire of diameter $d = 1/16$ in. when it is bent around a cylindrical drum of radius $R = 24$ in. (see figure).





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:

O alongamento depende da distância (y) do ponto da seção transversal (mais afastado da linha neutra) até a linha neutra e da curvatura imposta ao eixo central do fio. Em valor absoluto:

$$|\varepsilon|_{m\acute{a}x} = |\kappa \cdot y_{m\acute{a}x}|$$

No caso:

$$|\kappa| = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R + 0,5d} = \frac{1}{(24 + 1/32)in} \cong 0,0416125 \text{ in}^{-1}$$

$$|y_{m\acute{a}x}| = \frac{d}{2} = \frac{1}{32} \text{ in} = 0,03125 \text{ in}$$

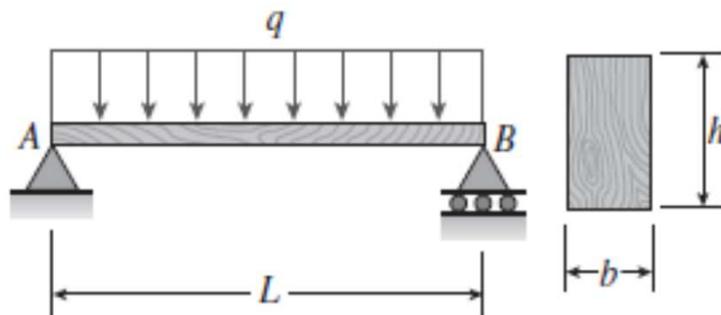
$$\text{Logo: } |\varepsilon|_{m\acute{a}x} = \frac{0,5d}{R + 0,5d} = \frac{d}{2R + d} \cong 0,0013$$



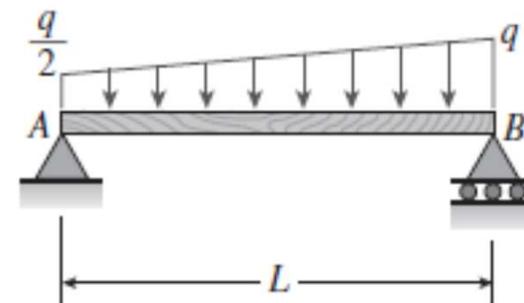
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 5.5-4 A simply supported wood beam AB with span length $L = 4$ m carries a uniform load of intensity $q = 5.8$ kN/m (see figure).

- Calculate the maximum bending stress σ_{\max} due to the load q if the beam has a rectangular cross section with width $b = 140$ mm and height $h = 240$ mm.
- Repeat (a) but use the trapezoidal distributed load shown in the figure part (b).



(a)



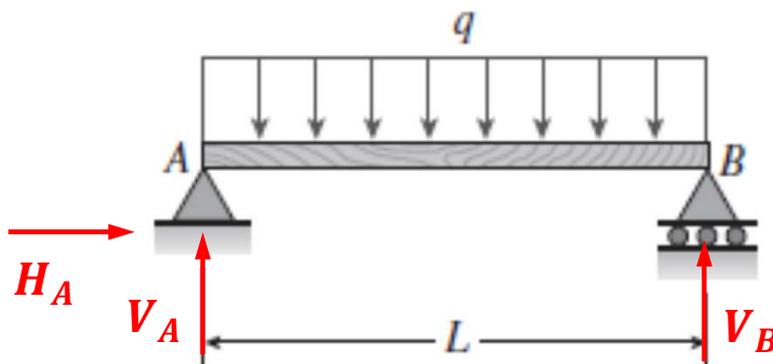
(b)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

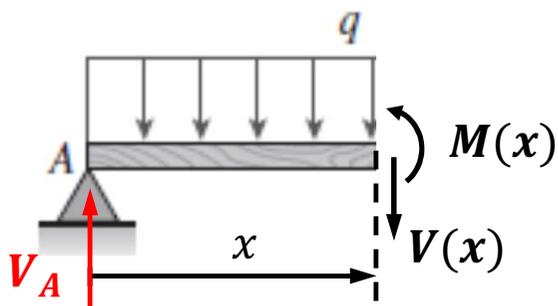
Solução:

a) D.C.L.:



Pelas equações da estática, encontramos:

$$V_A = V_B = \frac{qL}{2} = \frac{(5,8 \text{ kN/m}) \cdot (4\text{m})}{2} = 11,6 \text{ kN}$$



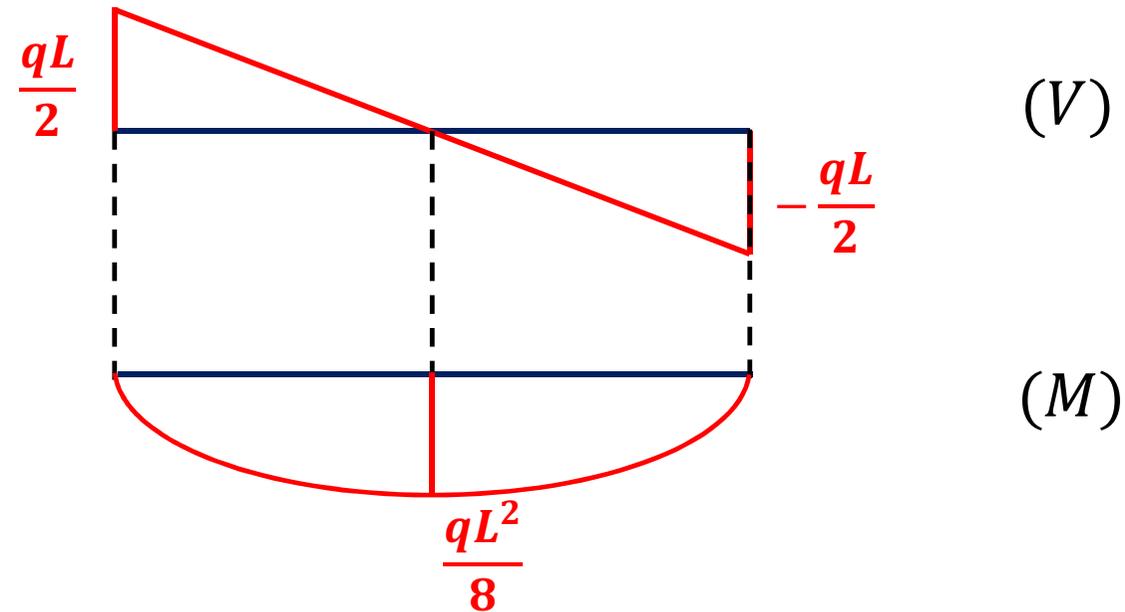
$$V(x) + qx = V_A = \frac{qL}{2} \quad \Leftrightarrow \quad V(x) = q \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

$$M(x) + \frac{qx^2}{2} = V_A x = \frac{qLx}{2} \quad \Leftrightarrow \quad M(x) = \frac{qx(L-x)}{2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Diagramas:



Note que o ponto onde a força cortante é nula é um ponto crítico do momento fletor, podendo ser um ponto de máximo local ou mínimo local, pois, como vimos:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Do exposto: $M_{m\acute{a}x} = \frac{qL^2}{8}$

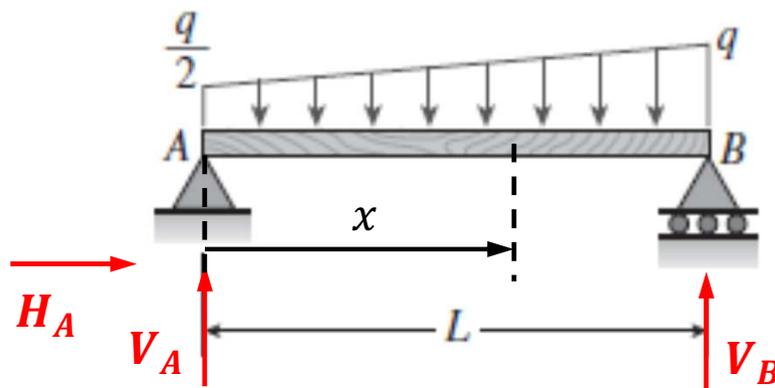
$$|\sigma_{m\acute{a}x}| = \frac{|M_{m\acute{a}x}|}{I} |y_{m\acute{a}x}| = \frac{|M_{m\acute{a}x}|}{bh^3/12} \cdot \frac{h}{2} = \frac{|M_{m\acute{a}x}|}{bh^2/6} = \frac{6}{bh^2} \frac{qL^2}{8} = \frac{3q}{4b} \left(\frac{L}{h}\right)^2$$

$$|\sigma_{m\acute{a}x}| = \frac{3}{4} \frac{(5,8 \text{ N/mm})}{140 \text{ mm}} \left(\frac{4000}{240}\right)^2 = \frac{3}{4} (0,04143 \text{ MPa}) \cdot (277,78) \cong 8,63 \text{ MPa}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

b) D.C.L.:



$$q(x) = \frac{q}{2} \left(1 + \frac{x}{L} \right)$$

Pelas equações da estática, encontramos:

$$V_B L = \int_0^L q(x) x dx = \int_0^L \frac{q}{2} \left(x + \frac{x^2}{L} \right) dx = \frac{q}{2} \left(\frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{3} \right) = \frac{5}{12} q L^2 \Leftrightarrow V_B = \frac{5}{12} q L$$

$$V_A + V_B = \int_0^L q(x) dx = \int_0^L \frac{q}{2} \left(1 + \frac{x}{L} \right) dx = \frac{q}{2} \left(L + \frac{L}{2} \right) = \frac{3}{4} q L \Leftrightarrow V_A = \frac{q L}{3}$$



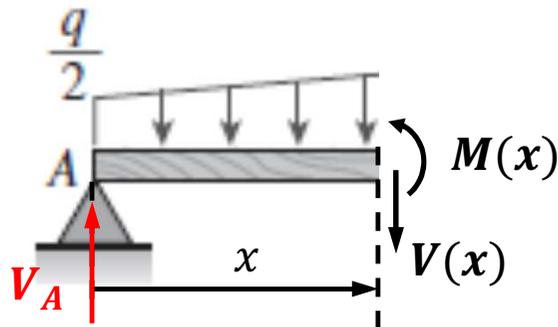
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Utilizando as relações entre $q(x)$, $V(x)$ e $M(x)$, teremos:

$$-\frac{dV(x)}{dx} = q(x) = \frac{q}{2} \left(1 + \frac{x}{L}\right) \iff V(x) = V_A - \int_0^x q(x) dx = V_A - \int_0^x \frac{q}{2} \left(1 + \frac{x}{L}\right) dx$$

$$V(x) = \frac{qL}{3} - \frac{q}{2} \left(x + \frac{x^2}{2L}\right)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \iff M(x) = M(0) + \int_0^x V(x) dx = \int_0^x \left[\frac{qL}{3} - \frac{q}{2} \left(x + \frac{x^2}{2L}\right) \right] dx$$



$$M(x) = \frac{qLx}{3} - \frac{q}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6L}\right)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Determinação dos pontos críticos da função $M(x)$:

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{qL}{3} - \frac{q}{2} \left(x + \frac{x^2}{2L} \right) = 0$$

$$3x^2 + 6Lx - 4L^2 = 0$$

$$x = \frac{-6L}{6} \pm \frac{\sqrt{36 + 48}}{6} L$$

A única raiz possível no domínio $0 \leq x \leq L$ é: $x \cong 0,52753L$

$$x = 0,52753L \Rightarrow M = M_{m\acute{a}x} \cong 0,0940376qL^2$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo:

$$|\sigma_{m\acute{a}x}| = \frac{|M_{m\acute{a}x}|}{I} |y_{m\acute{a}x}| = \frac{|M_{m\acute{a}x}|}{bh^3/12} \cdot \frac{h}{2} = \frac{|M_{m\acute{a}x}|}{bh^2/6} = 0,5642255 \frac{q}{b} \left(\frac{L}{h}\right)^2$$

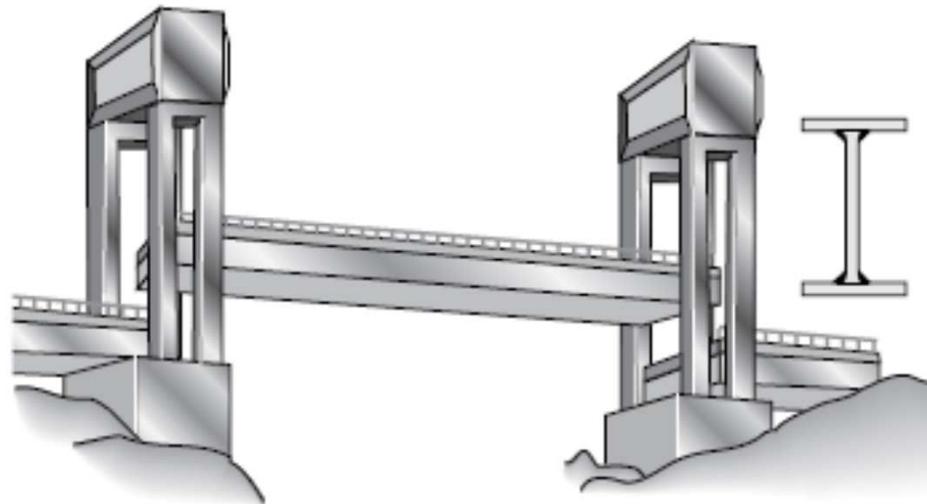
$$|\sigma_{m\acute{a}x}| = 0,5642255 \frac{(5,8 \text{ N/mm})}{140 \text{ mm}} \left(\frac{4000}{240}\right)^2 \cong 6,49 \text{ MPa}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 5.5-5 Each girder of the lift bridge (see figure) is 180 ft long and simply supported at the ends. The design load for each girder is a uniform load of intensity 1.6 k/ft. The girders are fabricated by welding three steel plates so as to form an I-shaped cross section (see figure) having section modulus $S = 3600 \text{ in.}^3$.

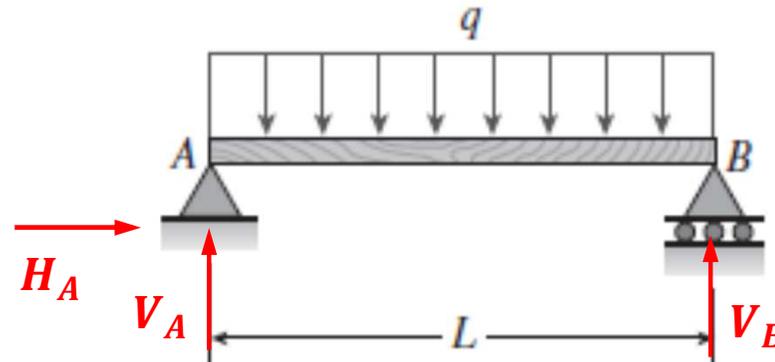
What is the maximum bending stress σ_{\max} in a girder due to the uniform load?





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução: O modelo de cálculo é o de uma viga simplesmente apoiada nas extremidades e submetida a um carregamento uniformemente distribuído de intensidade q como ilustra a figura:



Como vimos no problema anterior: $M_{m\acute{a}x} = \frac{qL^2}{8}$ (em $x = L/2$)

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{1600 \left(\frac{lbf}{ft} \right) \cdot \left(\frac{1 ft}{12 in} \right) \cdot (180 \times 12 in)^2}{8} = 7,776 \times 10^7 lbf \cdot in$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A tensão máxima será:

$$|\sigma_{m\acute{a}x}| = \frac{|M_{m\acute{a}x}|}{I} |y_{m\acute{a}x}| = \frac{|M_{m\acute{a}x}|}{S} = \frac{7,776 \times 10^7 \text{ lbf} \cdot \text{in}}{3600 \text{ in}^3}$$

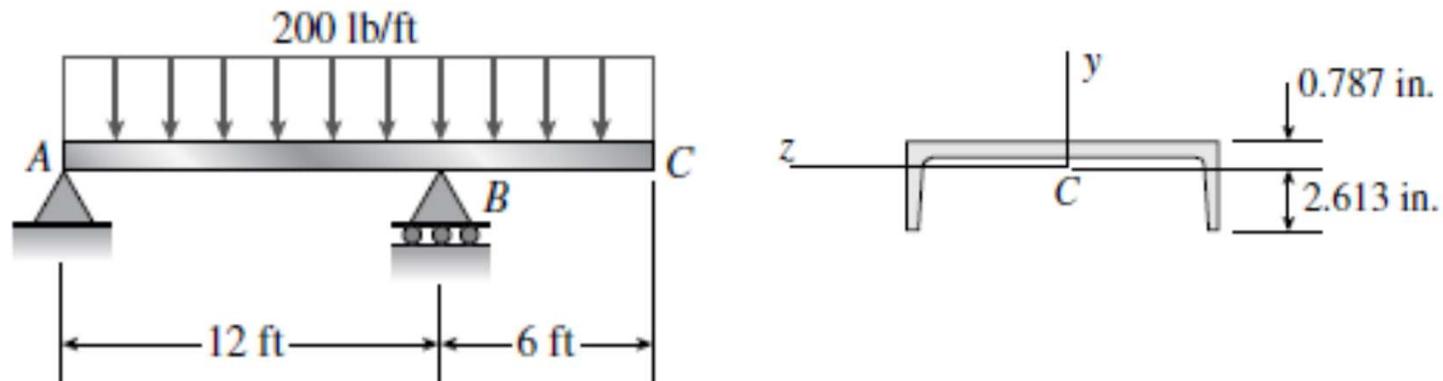
$$|\sigma_{m\acute{a}x}| = 21600 \text{ psi} = 21,6 \text{ ksi}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Problem 5.5-19 A beam ABC with an overhang from B to C supports a uniform load of 200 lb/ft throughout its length (see figure). The beam is a channel section with dimensions as shown in the figure. The moment of inertia about the z axis (the neutral axis) equals 8.13 in.^4

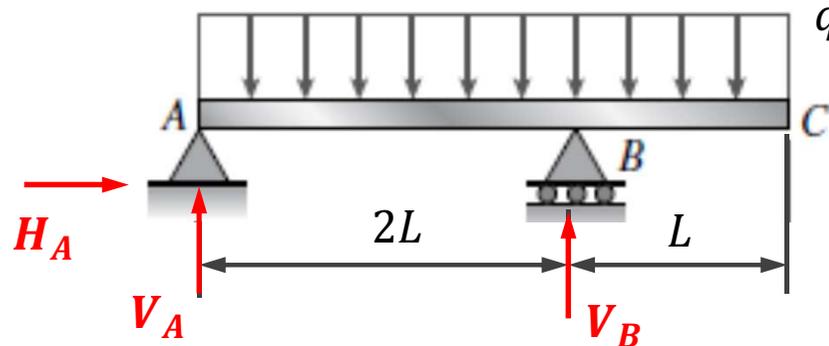
Calculate the maximum tensile stress σ_t and maximum compressive stress σ_c due to the uniform load.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Solução:



$$L = 6 \text{ ft} = 72 \text{ in}$$

$$q = 200 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}} = 16,667 \frac{\text{lbf}}{\text{in}}$$

$$V_B(2L) = \frac{q(3L)^2}{2} \Leftrightarrow V_B = \frac{9}{4}qL = 2,25qL$$

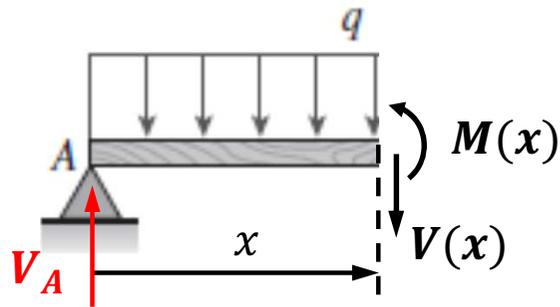
$$V_A + V_B = 3qL \Leftrightarrow V_A = \frac{3}{4}qL = 0,75qL$$

Como os momentos fletores são nulos nas extremidades A e C da viga, e como a distribuição de momentos é contínua (dado que não há momentos concentrados aplicados ao longo da viga), basta analisarmos o trecho AB.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A distribuição de força cortante no trecho AB será:



$$V(x) + qx = V_A = \frac{3}{4}qL \Leftrightarrow V(x) = q\left(\frac{3L}{4} - x\right)$$

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = 0 \Leftrightarrow x_{cr} = \frac{3L}{4}$$

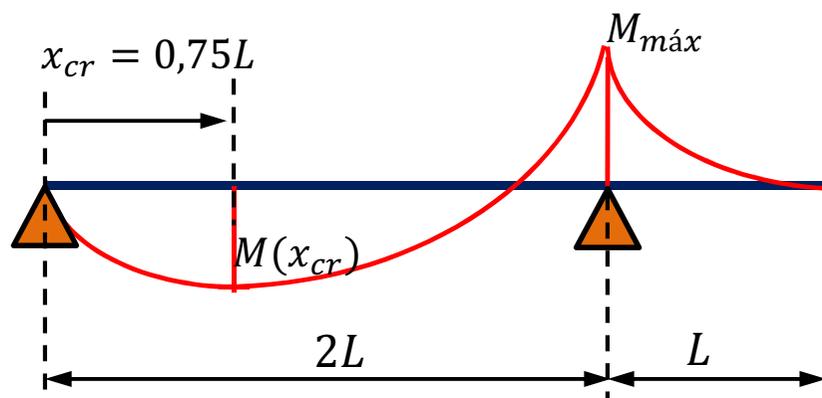
$$M(x) = V_A x - \frac{qx^2}{2} = \frac{3}{4}qLx - \frac{qx^2}{2}$$

$$x_{cr} = \frac{3L}{4}: \quad M(x_{cr}) = \frac{9}{32}qL^2 = 24300 \text{ lbf}\cdot\text{in}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Além disso: $M_{m\acute{a}x} = |M_B| = qL^2/2 = 43200 \text{ lbf}\cdot\text{in}$



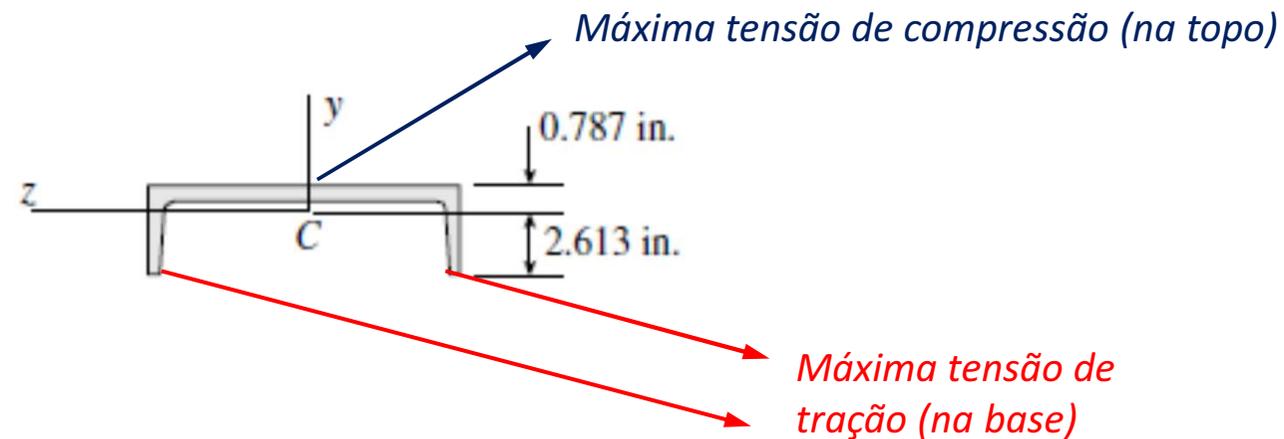
Como a seção não é simétrica em relação ao eixo de flexão, é preciso analisar as duas seções transversais: aquela para a qual $M = M(x_{cr})$ e aquela para a qual $M = M_{m\acute{a}x}$.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para a seção referente à $x = x_{cr}$: $M(x_{cr}) = 24300 \text{ lbf} \cdot \text{in}$

Temos:



$$|\sigma_{m\acute{a}x,t}| = \frac{|M(x_{cr})|}{I} |y_{m\acute{a}x,t}| = \frac{24300 \text{ lbf} \cdot \text{in}}{8,13 \text{ in}^4} \cdot 2,613 \text{ in} \cong 7810 \text{ psi}$$

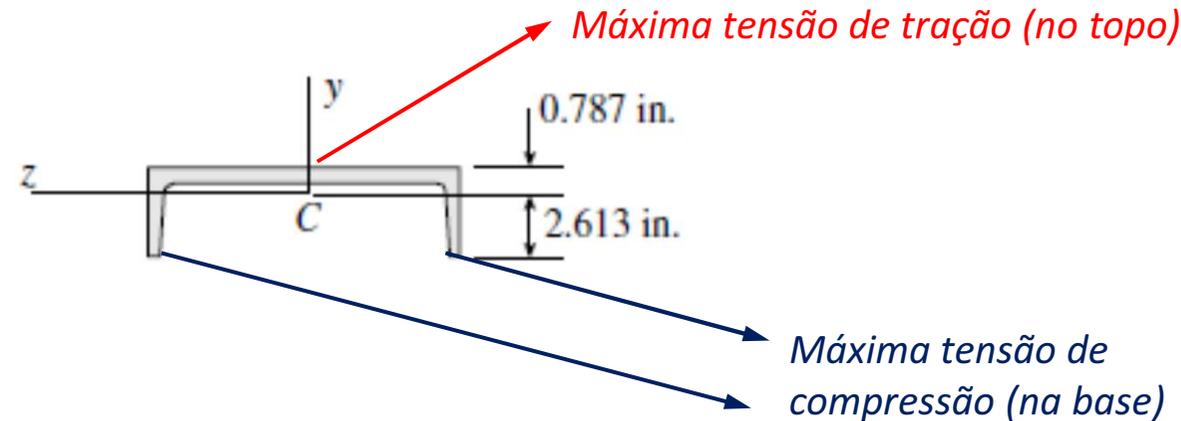
$$|\sigma_{m\acute{a}x,c}| = \frac{|M(x_{cr})|}{I} |y_{m\acute{a}x,c}| = \frac{24300 \text{ lbf} \cdot \text{in}}{8,13 \text{ in}^4} \cdot 0,787 \text{ in} \cong 2352 \text{ psi}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para a seção referente à $x = x_B$: $M = M_{máx} = |M_B| = qL^2/2 = 43200 \text{ lbf} \cdot \text{in}$

Temos:



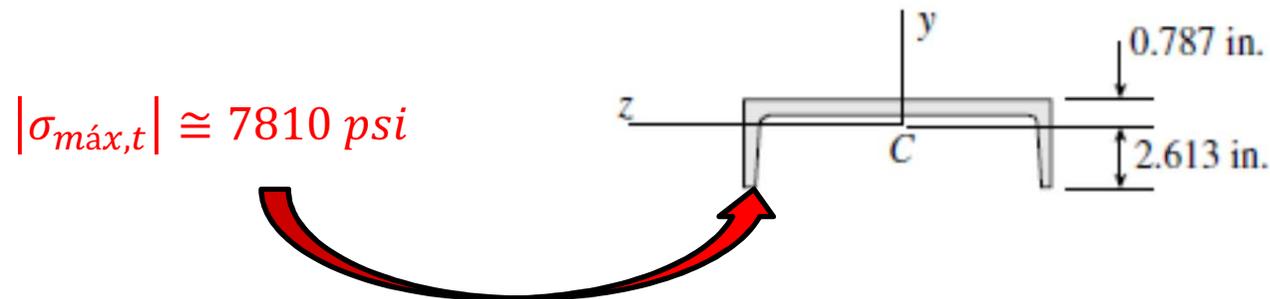
$$|\sigma_{máx,t}| = \frac{|M_{máx}|}{I} |y_{máx,t}| = \frac{43200 \text{ lbf} \cdot \text{in}}{8,13 \text{ in}^4} \cdot 0,787 \text{ in} \cong 4182 \text{ psi}$$

$$|\sigma_{máx,c}| = \frac{|M_{máx}|}{I} |y_{máx,c}| = \frac{43200 \text{ lbf} \cdot \text{in}}{8,13 \text{ in}^4} \cdot 2,613 \text{ in} \cong 13885 \text{ psi}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo, a máxima tensão de tração ocorre na seção em que $x = x_{cr} = 0,75L$ e vale:



E a máxima tensão de compressão ocorre na seção em que $x = x_B = 2L$ e vale:

