



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #19

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

13/06/2023



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

Capítulo 5: Tensões em Vigas (Tópicos Básicos)

1. Introdução (5.1)
2. Flexão pura e flexão não uniforme (5.2)
3. Curvatura de uma viga (5.3)
4. Deformações longitudinais em vigas (5.4)
5. Tensões normais em vigas (materiais elásticos lineares) (5.5)



1. Introdução

O capítulo 5 trata das tensões e deformações em vigas submetidas a esforços transversais no plano xy , considerado um plano de simetria da seção transversal, resultando em deflexão da viga no mesmo plano, denominado plano de flexão.

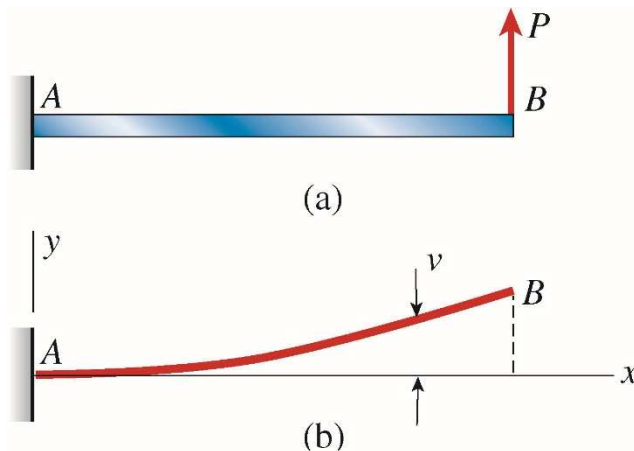


FIG. 5-1 Bending of a cantilever beam:
(a) beam with load, and (b) deflection curve

A deflexão da viga em qualquer ponto ao longo de seu eixo é o deslocamento desse ponto, em relação à sua posição original, medido na direção y . Denotaremos esse deslocamento pela letra latina v .



2. Flexão pura e flexão não uniforme

Diz-se que uma viga está em flexão pura (ou flexão uniforme) quando o momento fletor ao longo da viga é constante, como ilustrado na figura abaixo:

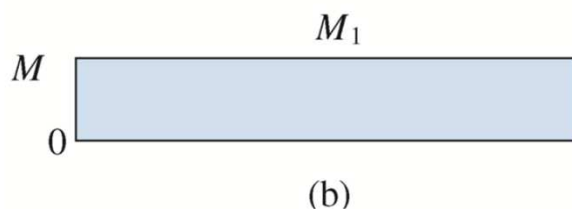
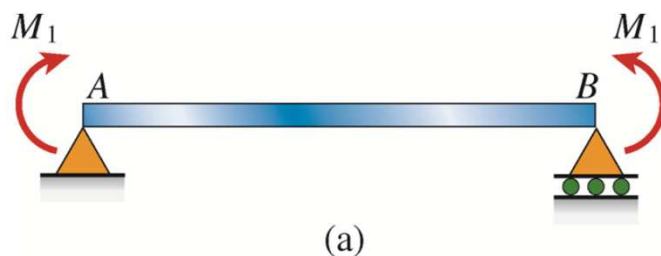


FIG. 5-2 Simple beam in pure bending
($M = M_1$)

Lembrando a relação entre força cortante e momento fletor dada por:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

Concluimos que, no caso em que há flexão pura:

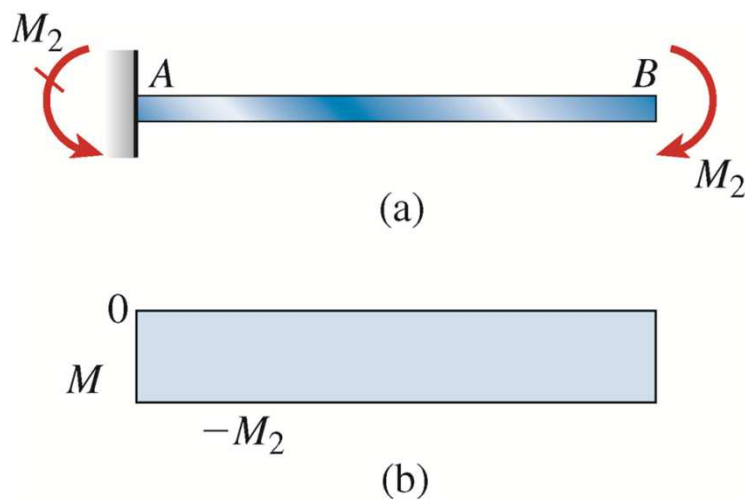
$$V(x) = 0$$

Note ainda que, para o carregamento indicado na figura, não há reações de apoio em A, nem em B.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Outro exemplo em que há flexão pura está ilustrado na figura 5.3 (viga engastada-livre, submetida a um momento M_2 na extremidade livre):



Como no caso anterior, não há forças cortantes ao longo da viga:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = 0$$

... e a única reação de apoio será um momento de magnitude igual ao momento M_2 aplicado na extremidade livre, mas com sentido oposto.

FIG. 5-3 Cantilever beam in pure bending
($M = -M_2$)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Um 3º exemplo em que podemos verificar a existência de flexão pura é o caso da viga biapoiada submetida a carregamentos concentrados equidistantes dos apoios A e B: é possível verificar prontamente que na região central da viga temos momentos fletores que não variam (dados pelo produto Pa) e, conseqüentemente, $V(x) = 0$, na região central.

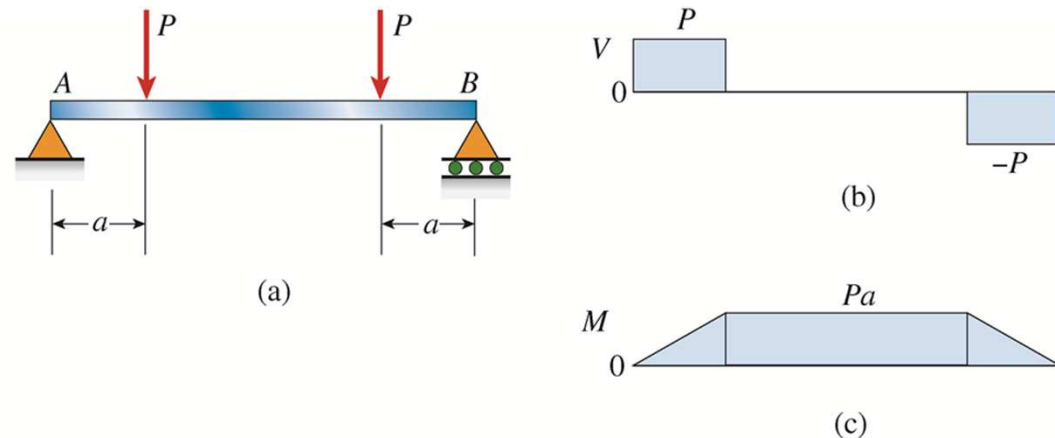


FIG. 5-4 Simple beam with central region in pure bending and end regions in nonuniform bending

Observe, contudo, que nas extremidades da viga, temos a presença de forças cortantes e de momentos fletores variáveis, o que caracteriza a flexão não-uniforme.



3. Curvatura de uma viga

Quando cargas são aplicadas a uma viga, seu eixo longitudinal (eixo central) é deformado em uma curva (que será plana, nesses casos). As tensões e deformações resultantes estão diretamente relacionadas à curvatura da curva de deflexão.

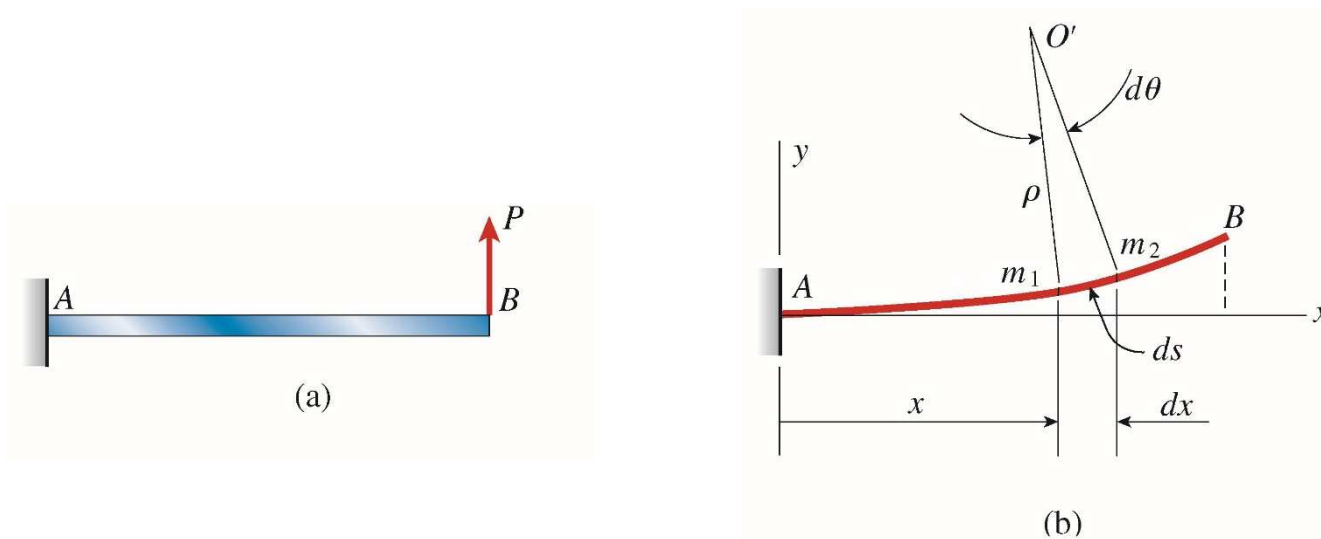


FIG. 5-5 Curvature of a bent beam:
(a) beam with load, and (b) deflection
curve

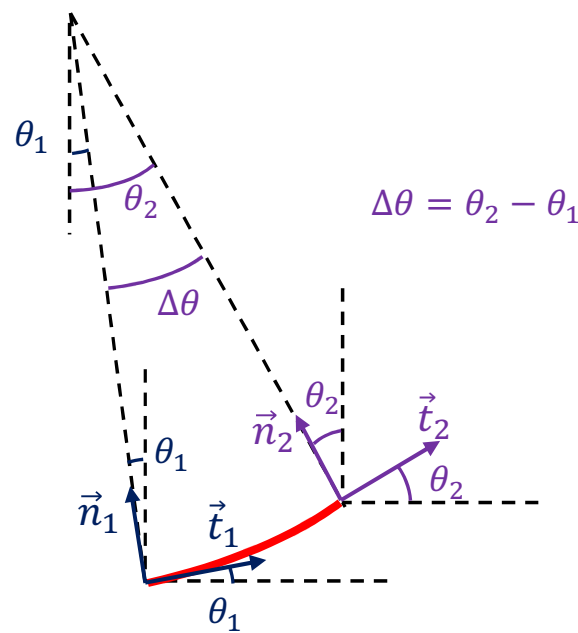
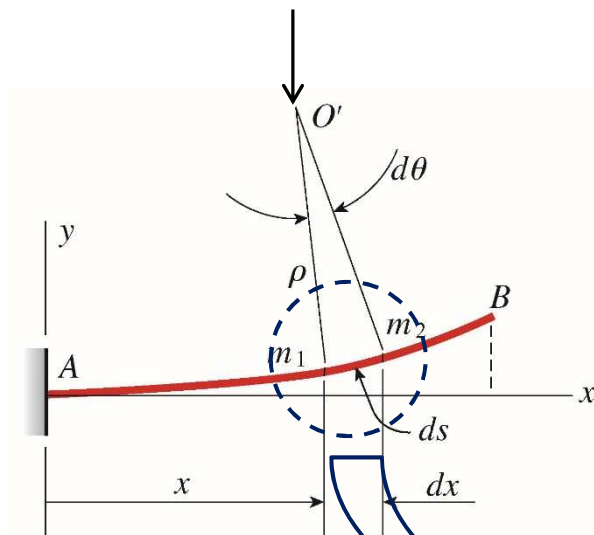


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Determinação da expressão (exata) da curvatura em um ponto de uma curva plana

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$

O': Centro de curvatura



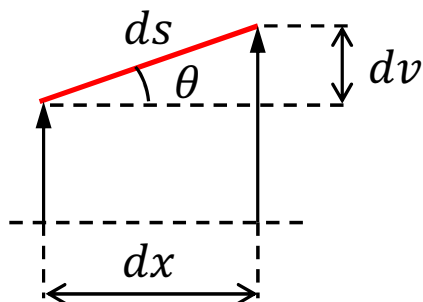


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Podemos escrever: $\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}$

Mas, no limite para $\Delta s \rightarrow 0$: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dv)^2$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = 1 + (v'(x))^2$$



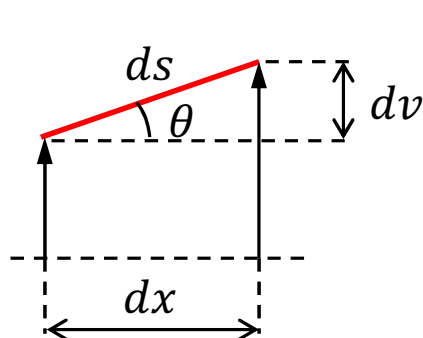
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (v'(x))^2}$$

Logo: $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (v'(x))^2}}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Por outro lado: $\tan(\theta) = \frac{dv}{dx}$



Logo: $\frac{d}{dx}(\tan(\theta)) = v''(x)$

$$\frac{d(\tan(\theta))}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = v''(x)$$

Mas: $\frac{d(\tan(\theta))}{d\theta} = \sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ E: $\cos \theta = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (v'(x))^2}}$

Logo: $\frac{d\theta}{dx} = \cos^2 \theta \cdot v''(x) = \frac{v''(x)}{1 + (v'(x))^2}$

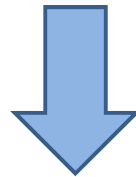


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Finalmente:

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{v''(x)}{1 + (v'(x))^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (v'(x))^2}}$$

$$\kappa = \frac{v''(x)}{[1 + (v'(x))^2]^{3/2}}$$



Expressão exata, porém não linear para a curvatura
(válida tanto para pequenos quanto para grandes deslocamentos)

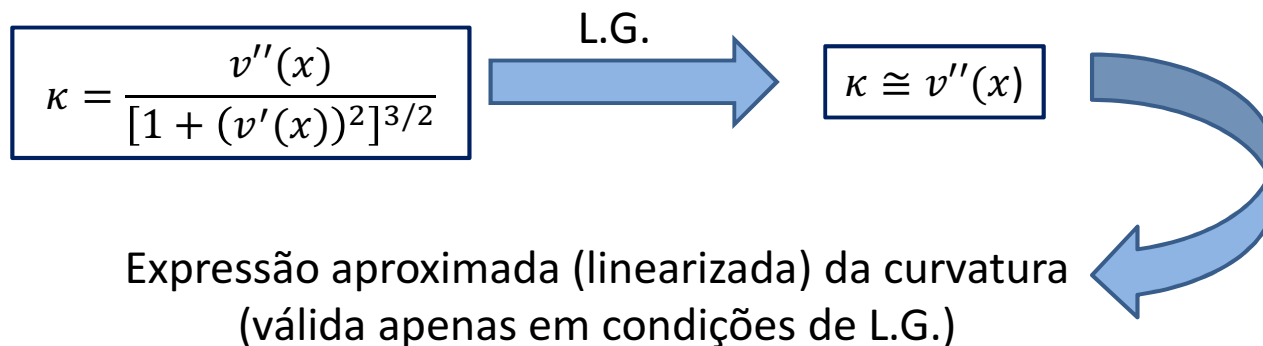


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Porém, se tivermos condições de linearidade geométrica (pequenos deslocamentos e pequenas rotações):

$$v'(x) = \tan(\theta) \cong \theta \ll 1$$

Obs: note que, aqui, θ é medido em radianos, não em graus!



Obs: Para $\theta = 0,1 \text{ rad} \cong 5,73^\circ$, o erro cometido, ao utilizarmos a expressão linearizada da curvatura para o cálculo de κ , é de cerca de 1,5%.



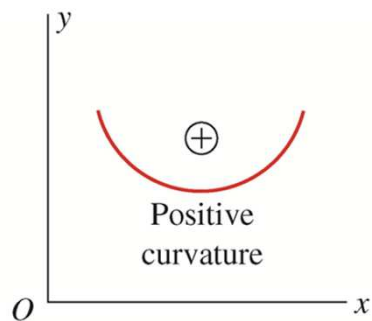
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Convenção de sinais para a curvatura:

Lembrando que, por definição:

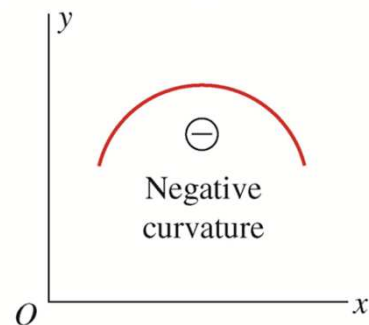
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$

Então:



(a)

$$\kappa > 0$$



(b)

$$\kappa < 0$$



4. Deformações longitudinais em vigas

Hipóteses:

- O eixo central da viga na configuração inicial (não deformada) é reto;
- O plano xy é um plano de simetria da viga e de suas seções transversais;
- A viga está submetida à flexão uniforme e o plano de simetria xy é o plano de flexão da viga;
- Existem condições de linearidade geométrica.

Nestas condições, “...as seções transversais, planas e ortogonais ao eixo central da viga antes da deformação, continuarão planas e ortogonais ao eixo central da viga na configuração deformada” (Hipótese de Euler-Bernoulli).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

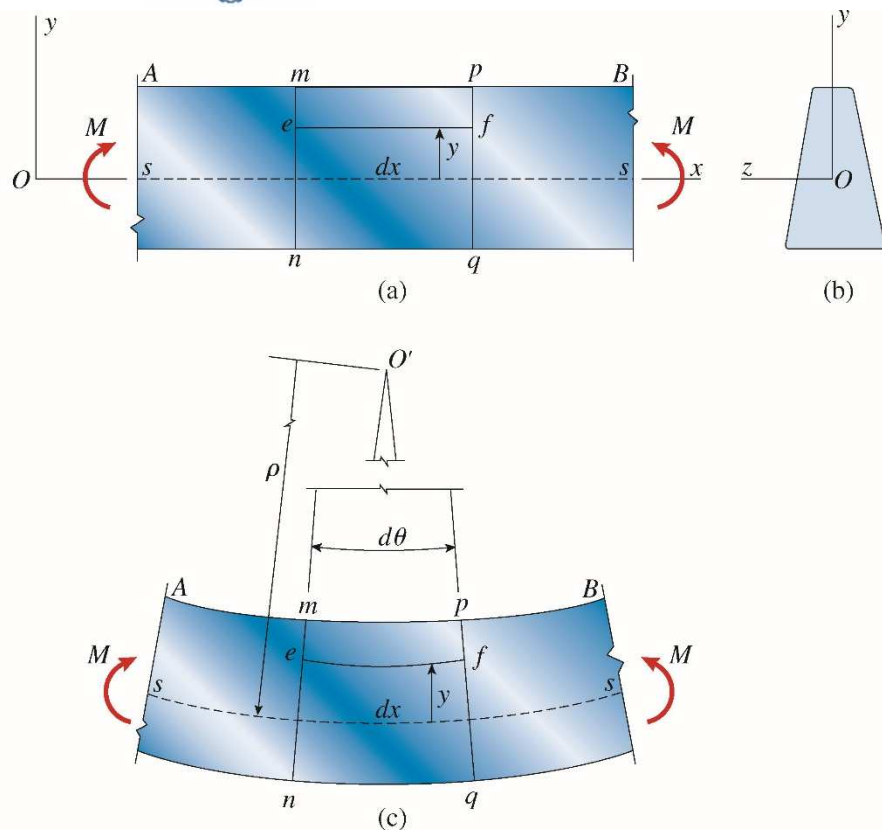


FIG. 5-7 Deformations of a beam in pure bending: (a) side view of beam, (b) cross section of beam, and (c) deformed beam

O alongamento da fibra ef é dado por:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L_f - L_0}{L_0}$$

Onde:
$$\left[\begin{array}{l} L_0 = dx = \rho d\theta \\ L_f = (\rho - y)d\theta \end{array} \right.$$

Logo:

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta}$$

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y$$



5. Tensões normais em vigas (materiais elásticos lineares)

Considerando que o material da viga tenha comportamento elástico linear, e que as demais tensões normais (σ_y e σ_z) sejam desprezíveis face às tensões normais σ_x , teremos:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

Mas, considerando válida a relação deduzida no item anterior (mesmo para os casos de flexão não uniforme), teremos:

$$\varepsilon_x = -\kappa y$$

De onde resulta a seguinte distribuição de tensões na seção transversal:

$$\sigma_x = -E \kappa y$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A relação anterior mostra que a tensão σ_x varia linearmente com a distância y do ponto (onde a tensão atua) até a linha neutra, como mostra a figura abaixo:

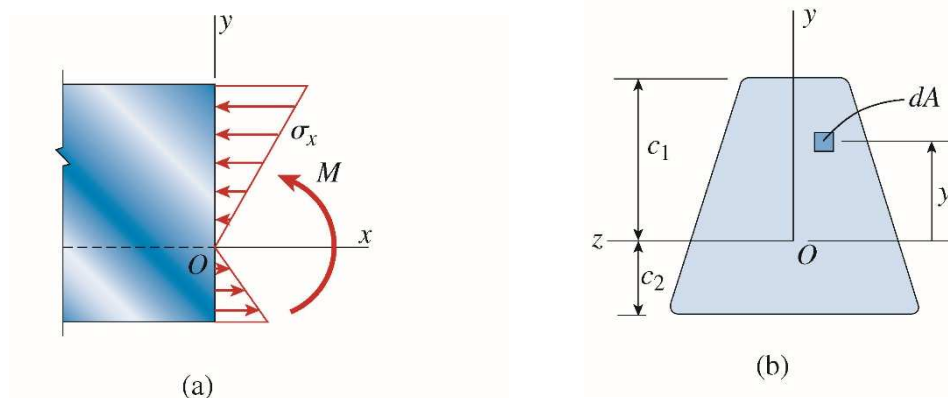


FIG. 5-9 Normal stresses in a beam of linearly elastic material: (a) side view of beam showing distribution of normal stresses, and (b) cross section of beam showing the z axis as the neutral axis of the cross section

Resta saber:

1. Onde se encontra a linha neutra?
2. Como a curvatura local está relacionada com o momento fletor na seção?



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. Considerando que sobre as seções transversais da viga não atuem forças normais, teremos (considerando uma seção transversal genérica):

$$N = \iint_A \sigma_x dA = - \iint_A E\kappa y dA = -E\kappa \iint_A y dA = 0 \Leftrightarrow \iint_A y dA = 0$$

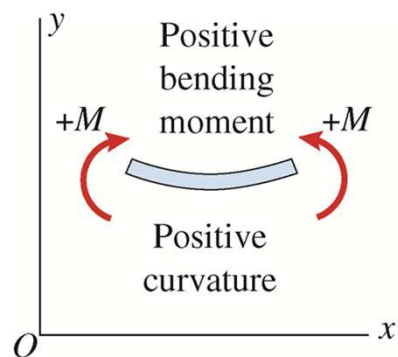
Logo, a linha neutra deve passar, obrigatoriamente, pelo centroide da seção transversal.

2. Impondo que o momento das forças distribuídas na área (ou seja, das tensões σ_x) seja estaticamente equivalente ao momento fletor na seção transversal, virá:

$$M = - \iint_A \sigma_x y dA = - \iint_A (-E\kappa y) y dA = E\kappa \iint_A y^2 dA \Leftrightarrow M = EI_z \kappa$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$M = EI_z \kappa$$

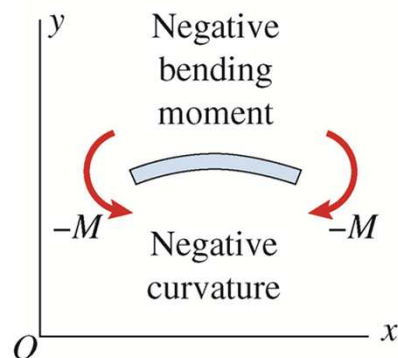


FIG. 5-10 Relationships between signs of bending moments and signs of curvatures

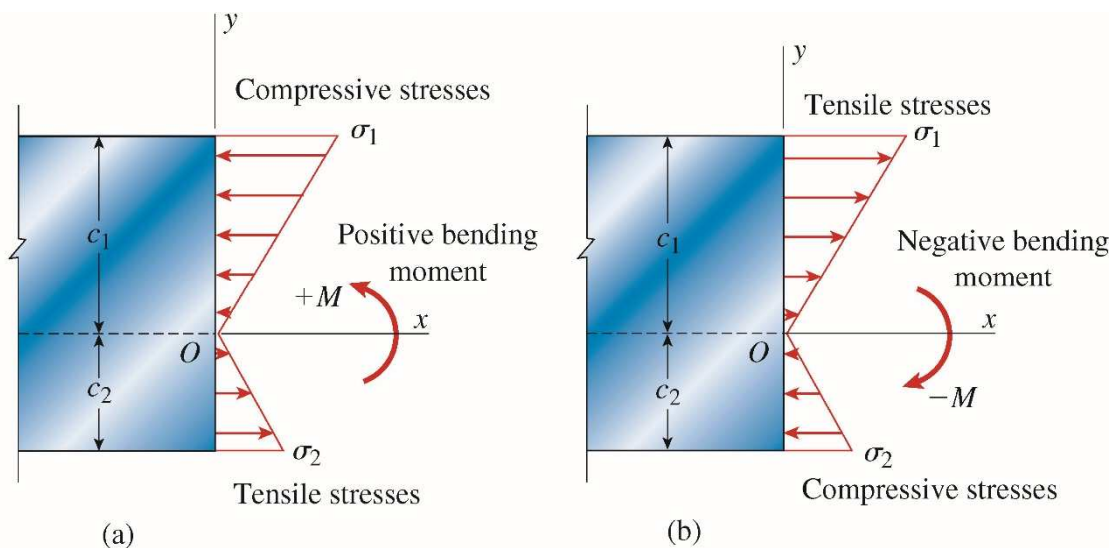


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Combinando as fórmulas anteriores:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_x = -E\kappa y \\ M = EI_z \kappa \end{array} \right] \longrightarrow \sigma_x = -\frac{M}{I_z} y$$

FIG. 5-11 Relationships between signs of bending moments and directions of normal stresses: (a) positive bending moment, and (b) negative bending moment





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observações finais:

1. Pode-se verificar facilmente que todas as relações obtidas são dimensionalmente corretas, como:

$$\sigma_x = -E\kappa y \quad \Rightarrow \quad [\sigma_x] = [E][\kappa][y] = \frac{N}{m^2} \cdot \frac{1}{m} \cdot m = \frac{N}{m^2}$$

$$\sigma_x = -\frac{M}{I_z} y \quad \Rightarrow \quad [\sigma_x] = \frac{[M]}{[I_z]}[y] = \frac{N \cdot m}{m^4} \cdot m = \frac{N}{m^2}$$

2. Dentro das condições de validade do Princípio da Superposição, podemos determinar o estado tensional nos pontos de uma seção submetida a flexo-tração (ou flexo-compressão) como:

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_{x1} = \frac{N}{A} \\ \sigma_{x2} = -\frac{M}{I_z} y \end{array} \right] \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = \sigma_{x1} + \sigma_{x2} = \frac{N}{A} - \frac{M}{I_z} y$$



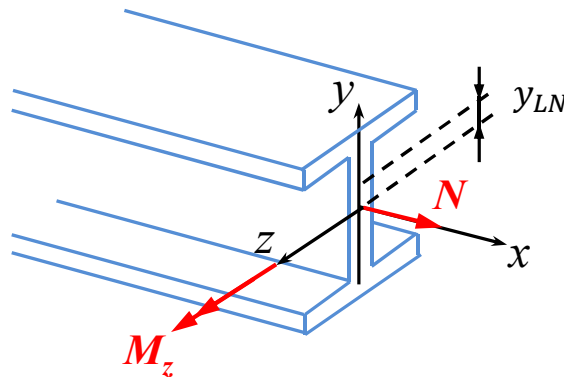
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Nesse caso, a linha neutra não passa mais pelo centroide (em virtude da ação da força normal) mas pode ser determinada facilmente impondo que $\sigma_x = 0$:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{M}{I_z} y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_{LN} = \frac{I_z}{A} \cdot \frac{N}{M}$$

Sendo a distância y_{LN} medida a partir do eixo z , onde está situado o centroide.

No caso em que, por exemplo, $N > 0$ e $M = M_z > 0$, teremos $y_{LN} > 0$.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

[1] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.5.