



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica*

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #18

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

06/06/2023



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Relações entre cargas, forças cortantes e momentos fletores (4.4)
2. Diagramas de força cortante e momento fletor (4.5)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. Relações entre Cargas, Forças Cortantes e Momentos Fletores

Serão apresentadas nesta aula algumas relações particularmente úteis para a determinação das distribuições de momentos fletores e de forças cortantes em vigas submetidas a carregamentos transversais (apenas). Deve-se ressaltar, contudo, que as relações a serem apresentadas são válidas dentro das seguintes hipóteses:

- A viga deve possuir eixo central reto e possuir, ao menos, um plano de simetria (de forma que o plano de flexão coincida com o plano de simetria);
- Devem existir condições de linearidade geométrica (pequenos deslocamentos e pequenas rotações), de tal modo que as linhas de ação das forças não sejam alteradas de modo significativo, e que o equilíbrio possa ser feito com base na configuração de referência (não deformada) da estrutura.

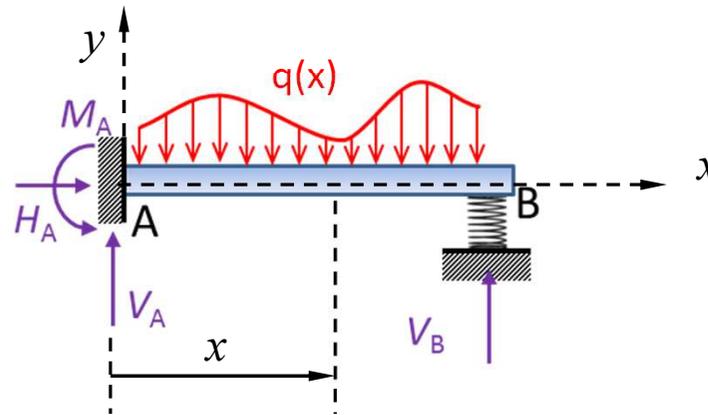
Seguindo a metodologia utilizada no livro texto, dividiremos nosso estudo em três partes, de acordo com o tipo de carregamento:

- A) Carregamentos distribuídos sobre a viga;
- B) Carregamentos na forma de forças concentradas;
- C) Carregamentos na forma de momentos concentrados.

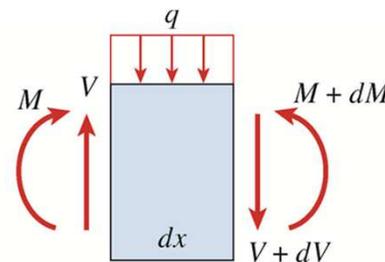


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A) Carregamentos distribuídos sobre a viga:



Para obter as relações entre cargas, forças cortantes e momentos fletores em vigas (de eixo reto), consideremos um elemento infinitesimal de comprimento dx retirado da viga (na configuração deformada) por meio de cortes ortogonais ao eixo central:



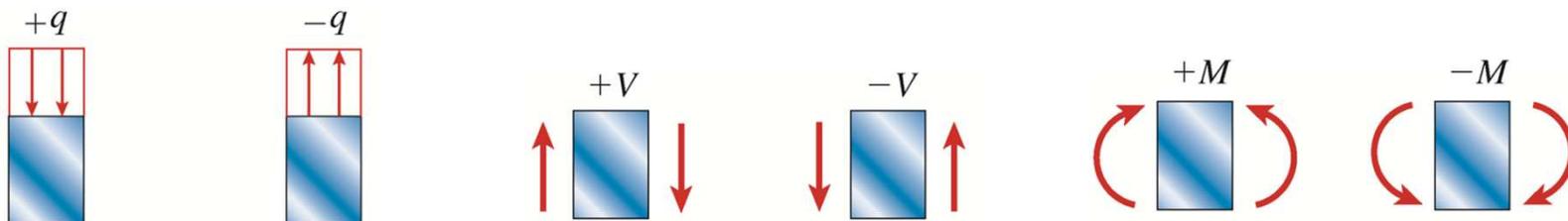


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Deve-se observar que, embora o carregamento $q(x)$ possa variar livremente ao longo do eixo central, sua variação ao longo do comprimento infinitesimal dx pode ser desprezada (já que o comprimento dx pode ser tão pequeno quanto necessário). Desta forma, consideraremos $q(x)$ constante ao longo de dx .

Nas faces à esquerda e à direita do elemento, temos tensões internas (forças distribuídas por unidade de área) cujos efeitos devem ser equivalentes a forças cortantes e a momentos fletores que atuam nas respectivas seções.

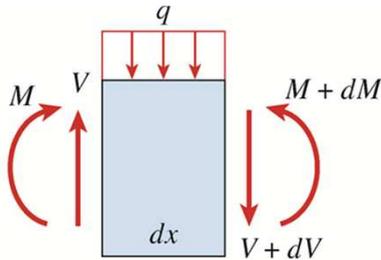
Denominaremos por V e M os esforços que atuam na face à esquerda, e por $V + dV$ e $M + dM$ os esforços que atuam na face situada à direita. Consideraremos, também, que todos estes esforços internos atuam nos sentidos positivos, conforme a convenção de sinais vista na aula anterior. Para o carregamento, consideraremos que ele é positivo se estiver orientado para baixo e negativo se estiver orientado para cima:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Retomando o elemento em consideração e impondo o equilíbrio de forças na direção vertical, teremos:



$$V(x) = [V(x) + dV] + q(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dV(x)}{dx} = -q(x)$$

Impondo agora o equilíbrio de momentos, tomando como polo o centroide da seção que fica à direita do elemento, teremos:

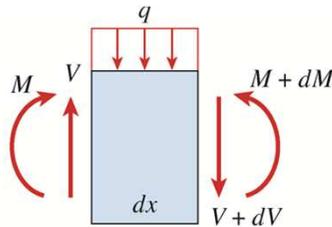
$$M(x) + dM + [q(x)dx] \frac{dx}{2} = M(x) + V(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dM(x)}{dx} + \frac{q(x)dx}{2} = V(x) \Leftrightarrow \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resumindo, as relações entre cargas, forças cortantes e momentos fletores para vigas submetidas a carregamentos distribuídos, dentro das condições estabelecidas no slide 3, são:



$$\frac{dV(x)}{dx} = -q(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

A 1ª relação diz que a taxa de variação da força cortante em qualquer ponto do eixo da viga é igual à intensidade da carga distribuída no mesmo ponto (mas com o sinal negativo). Desta forma, caso não haja carga distribuída em algum trecho da viga (ou seja, $q(x) = 0$, $a < x < b$), então $dV(x)/dx = 0$, e portanto a força cortante será constante (mas não necessariamente nula) nesse trecho.

Analogamente, a 2ª relação diz que a taxa de variação do momento fletor em qualquer ponto do eixo da viga é igual à força cortante nesse mesmo ponto. Assim, caso não haja forças cortantes em algum trecho da viga (ou seja, $V(x) = 0$, $a < x < b$), então $dM(x)/dx = 0$, e portanto o momento fletor será constante (mas não necessariamente nulo) nesse trecho.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observe ainda que as relações apresentadas são dimensionalmente corretas, como esperado:

$$\left[\frac{dV}{dx} \right] = \frac{N}{m} = [q] \qquad \left[\frac{dM}{dx} \right] = \frac{Nm}{m} = N = [V]$$

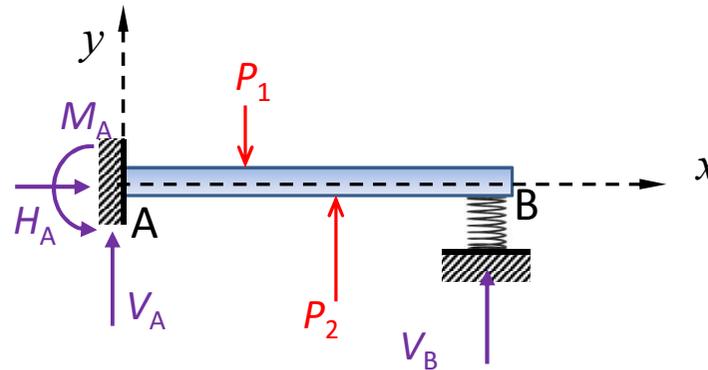
Das relações vistas, podemos concluir também que, nos casos em que o carregamento distribuído é dado por uma função contínua e com derivadas contínuas até 2ª ordem em um determinado trecho da viga (digamos, $a < x < b$), então os valores críticos (máximo local ou mínimo local) da força cortante ocorrerão nos pontos em que $q(x) = 0$, e os valores críticos de momento fletor (máximo local ou mínimo local) ocorrerão nos pontos em que $V(x) = 0$.

Naturalmente, para uma análise completa e para um dimensionamento correto da viga devem ser investigados, também, os valores da força cortante e do momento fletor nos extremos do intervalo (ou seja, em $x = a$ e em $x = b$).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

B) Carregamentos na forma de forças concentradas:



Neste caso, consideremos um elemento infinitesimal da viga tendo sua face esquerda situada imediatamente antes do ponto de aplicação da carga concentrada e sua face direita situada imediatamente após o ponto de aplicação da carga concentrada.

A convenção para os sinais das forças concentradas é a mesma utilizada para os carregamentos distribuídos: sinal positivo se a carga estiver orientada para baixo e sinal negativo se ela estiver orientada para cima:

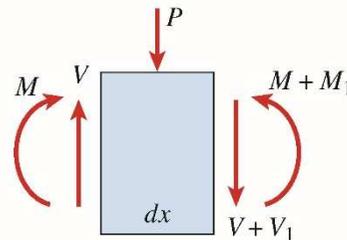




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Como no caso anterior, nas faces à esquerda e à direita do elemento, temos tensões internas (forças distribuídas por unidade de área) cujos efeitos são equivalentes a forças cortantes e a momentos fletores que atuam nas respectivas seções.

Denominaremos por V e M os esforços que atuam na face à esquerda, e por $V + V_1$ e $M + M_1$ os esforços que atuam na face situada à direita. Consideraremos, também, que todos estes esforços internos atuam nos sentidos positivos, conforme a convenção de sinais já apresentada:



Impondo o equilíbrio de forças na direção vertical, teremos:

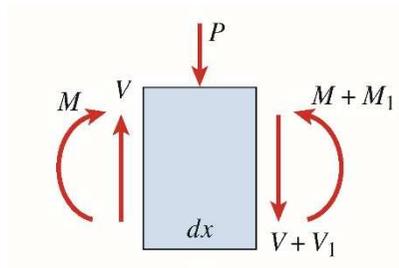
$$V + V_1 + P = V \quad \Leftrightarrow \quad V_1 = -P$$

Esse resultado mostra que ocorre uma mudança abrupta na força cortante sempre que há uma força concentrada aplicada em um ponto da viga: quando passamos da esquerda para a direita do ponto de aplicação da carga, a força cortante diminui (ou aumenta) de um valor igual à intensidade da carga concentrada aplicada.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Impondo agora o equilíbrio de momentos, tomando como polo o centroide da seção que fica à direita do elemento, teremos:



$$M + M_1 + P \frac{dx}{2} = Vdx + M \Leftrightarrow M_1 = \left(V - \frac{P}{2} \right) dx \rightarrow 0$$

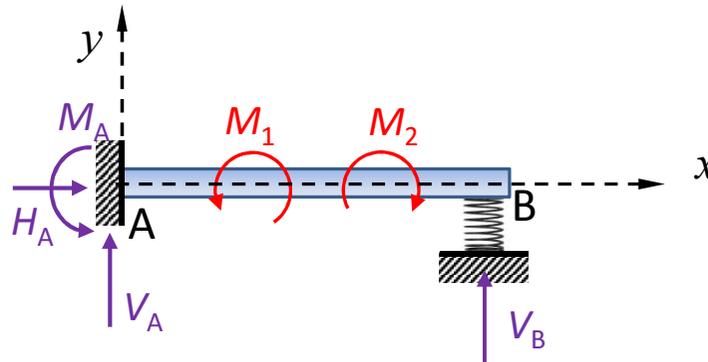
Desta forma, o valor do momento fletor não se altera quando passamos pelo ponto de aplicação de uma força concentrada.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

C) Carregamentos na forma de momentos concentrados:

O último caso a ser considerado é o carregamento na forma de momentos concentrados, como indicado na figura abaixo:



A convenção de sinais para os momentos concentrados será a seguinte:

O momento será considerado positivo se o vetor correspondente (obtido pela aplicação da regra da mão direita) estiver no mesmo sentido do eixo z (“saindo” da página), e será negativo caso contrário.

Tomando a figura acima como exemplo, teremos $M_1 > 0$ e $M_2 < 0$.

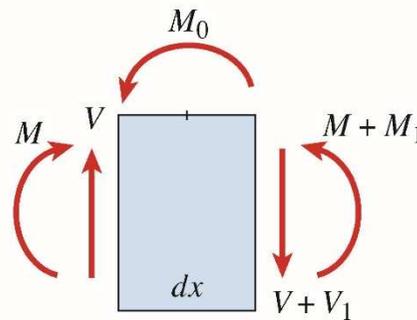


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tomemos, novamente, um elemento infinitesimal da viga tendo sua face esquerda situada imediatamente antes do ponto de aplicação do momento concentrado e sua face direita situada imediatamente após o ponto de aplicação desse momento.

Como nos demais casos, teremos nas faces à esquerda e à direita do elemento tensões internas (forças distribuídas por unidade de área) cujos efeitos são equivalentes a forças cortantes e a momentos fletores que atuam nas respectivas seções.

Denominaremos por V e M os esforços que atuam na face à esquerda, e por $V + V_1$ e $M + M_1$ os esforços que atuam na face situada à direita. Consideraremos, novamente, que todos estes esforços internos atuam nos sentidos positivos, seguindo a convenção de sinais:

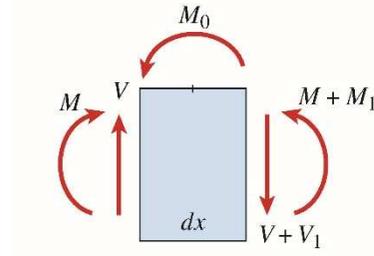




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Impondo o equilíbrio de forças na direção vertical, teremos:

$$V + V_1 = V \Leftrightarrow V_1 = 0$$



Conclusão: a aplicação de momentos concentrados não altera a força cortante, que permanece igual (imediatamente antes e imediatamente após o ponto de aplicação do momento concentrado).

Impondo agora o equilíbrio de momentos, tomando como polo o centroide da seção que fica à direita do elemento, teremos:

$$M + M_1 + M_0 = Vdx + M$$

Simplificando a expressão e levando ao limite para $dx \rightarrow 0$, virá: $M_1 = -M_0$

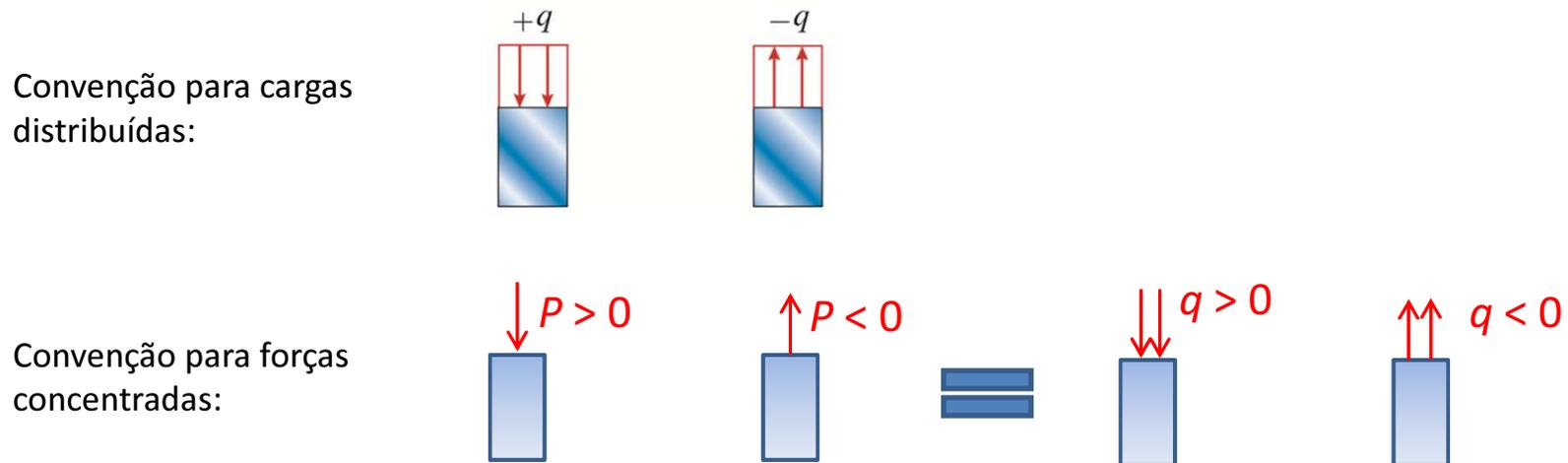
Conclusão: o momento fletor diminui de um valor igual a M_0 quando passamos da seção imediatamente à esquerda (do ponto de aplicação do momento M_0) para a seção imediatamente à direita (do mesmo ponto).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observação:

Note que as convenções de sinais para os casos de forças concentradas e de momentos concentrados podem ser associados de uma forma direta à convenção de sinais utilizada para as cargas distribuídas. Veja:

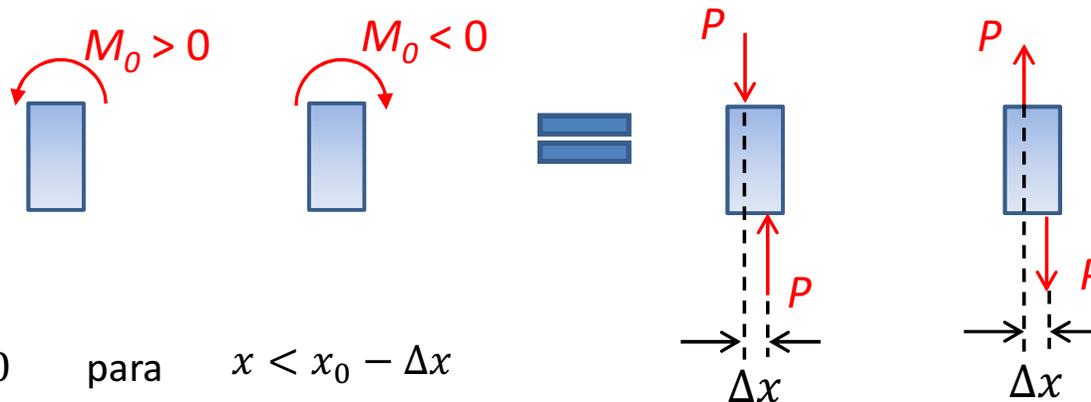


Onde:
$$\left[\begin{array}{ll} q(x) = 0 & \text{para } x < x_0 - \Delta x \\ q(x) = 0 & \text{para } x > x_0 + \Delta x \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0 + \Delta x} q(x) dx = P$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Convenção para momentos concentrados:



Onde:

$$q(x) = 0 \quad \text{para} \quad x < x_0 - \Delta x$$

$$q(x) = 0 \quad \text{para} \quad x > x_0 + \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0 + \Delta x} q(x) dx = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0 + \Delta x} q(x)(x_0 - x) dx = M_0$$

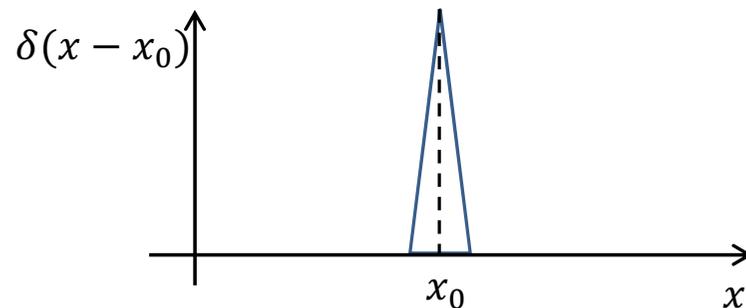


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

As seguintes “funções” podem ser usadas para representar carregamentos formados por cargas concentradas ou momentos concentrados como carregamentos distribuídos:

“Função” Delta de Dirac (ou Impulso Unitário): $\delta(x - x_0)$

$$\left[\begin{array}{l} \delta(x - x_0) = 0 \quad \text{para} \quad x < x_0 - \Delta x \\ \delta(x - x_0) = 0 \quad \text{para} \quad x > x_0 + \Delta x \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0 + \Delta x} \delta(x - x_0) dx = 1 \quad (\text{Nota: esse “1” é adimensional}). \end{array} \right.$$



Assim, o carregamento distribuído decorrente de uma força concentrada de magnitude P , orientada para baixo e aplicada em $x = x_0$, pode ser expresso por:

$$q(x) = P \cdot \delta(x - x_0)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

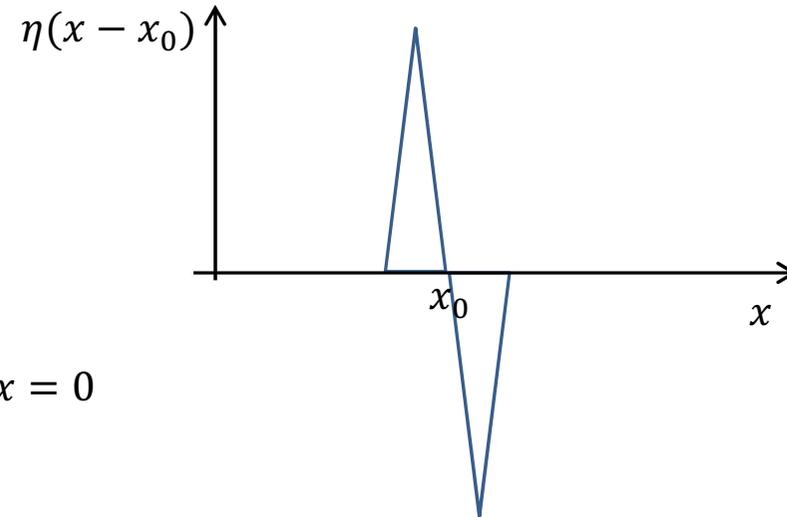
“Função” Dipolo Unitário: $\eta(x - x_0)$

$$\eta(x - x_0) = 0 \quad \text{para} \quad x < x_0 - \Delta x$$

$$\eta(x - x_0) = 0 \quad \text{para} \quad x > x_0 + \Delta x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x - x_0) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0 + \Delta x} \eta(x - x_0) dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x - x_0) \cdot (x_0 - x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_{x_0 - \Delta x}^{x_0 + \Delta x} \eta(x - x_0) \cdot (x_0 - x) dx = 1 \quad (\text{Nota: esse “1” é adimensional}).$$



Desta forma, o carregamento distribuído decorrente de um momento concentrado de magnitude M_0 , cujo vetor “sai” da folha e que está aplicado em $x = x_0$, pode ser dado por:

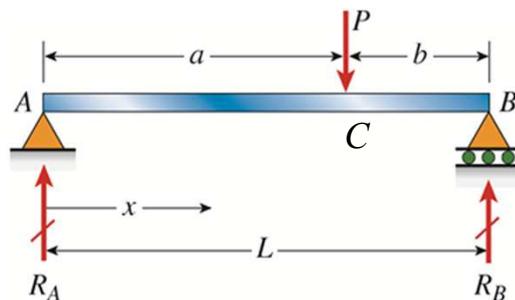
$$q(x) = M_0 \cdot \eta(x - x_0)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2. Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor

Exemplo 1:



Reações de Apoio:

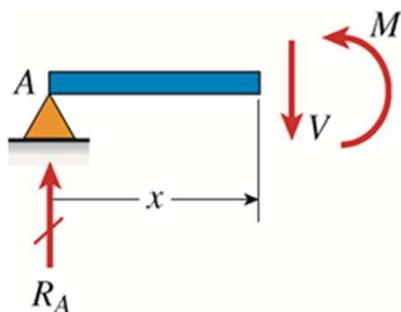
$$R_A L = P b \Leftrightarrow R_A = P \frac{b}{L}$$

$$R_B L = P a \Leftrightarrow R_B = P \frac{a}{L}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

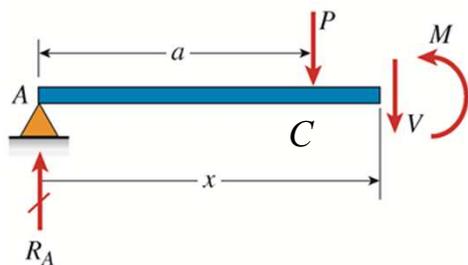
Força cortante e momento fletor no trecho AC:



$$V(x) = R_A = \frac{Pb}{L}$$
$$(0 \leq x < a)$$

$$M(x) = R_A x = \left(\frac{Pb}{L}\right)x$$
$$(0 \leq x < a)$$

Força cortante e momento fletor no trecho CB:



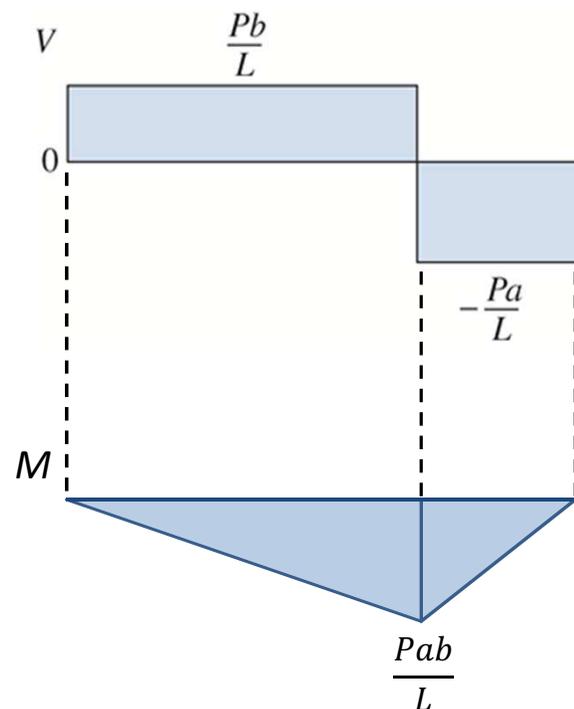
$$V(x) + P = R_A = \frac{Pb}{L} \Leftrightarrow V(x) = \frac{P}{L}(b - L) = -\frac{Pa}{L}$$
$$(a < x \leq L)$$

$$M(x) = R_A x - P(x - a) = \left(\frac{Pa}{L}\right)(L - x) \quad (a < x \leq L)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resultam os diagramas:



$$|V_{m\acute{a}x}| = m\acute{a}x \left\{ \frac{Pb}{L}, \frac{Pa}{L} \right\}$$

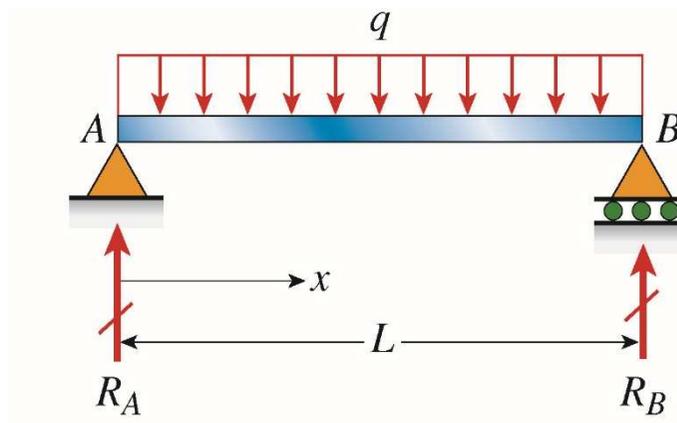
$$|M_{m\acute{a}x}| = \frac{Pab}{L}$$

Seção transversal mais solicitada: seção C



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo 2:



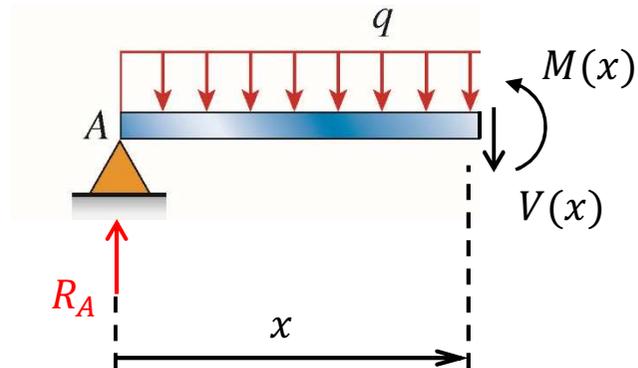
Reações de Apoio:

$$\left[\begin{array}{l} R_A = R_B \quad (\text{simetria}) \\ R_A + R_B = \int_0^L q(x) dx = qL \end{array} \right.$$

Logo: $R_A = R_B = \frac{qL}{2}$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



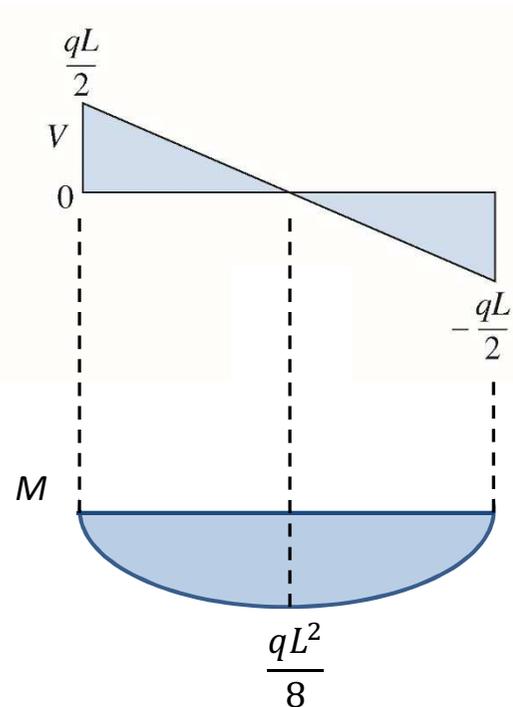
$$V(x) + qx = R_A = \frac{qL}{2} \Leftrightarrow V(x) = q\left(\frac{L}{2} - x\right) \quad (0 \leq x \leq L)$$

$$M(x) + \frac{qx^2}{2} = R_A x = \frac{qLx}{2} \Leftrightarrow M(x) = \frac{qx}{2}(L - x) \quad (0 \leq x \leq L)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resultam os diagramas:



$$|V_{m\acute{a}x}| = \frac{qL}{2}$$

$$|M_{m\acute{a}x}| = \frac{qL^2}{8}$$

Obs: Note que, neste caso, o máximo momento fletor ocorre no ponto em que a força cortante é nula, que é um ponto crítico da função $M(x)$.

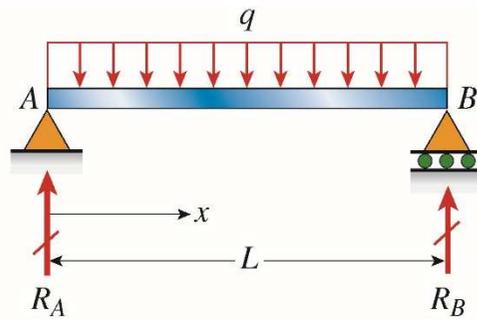


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Obs: As expressões da força cortante e do momento fletor também podem ser obtidas pela integração das relações vistas anteriormente:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -q(x) \qquad \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

Utilizando o caso anterior como exemplo, teremos:



Onde: $R_A = R_B = \frac{qL}{2}$

e: $q(x) = q$

Note que a carga distribuída ao longo da viga é constante e positiva neste caso.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo: $\frac{dV}{dx} = -q \Leftrightarrow \int_{V(0)}^{V(x)} dV = - \int_0^x q dx \Leftrightarrow V(x) - V(0) = -qx$

Mas, $V(0) = R_A = \frac{qL}{2}$ (note que o sinal de $V(0)$ deve estar de acordo com a convenção de sinais para força cortante e com o sentido correto da reação R_A indicada no D.C.L.)

Portanto:

$$V(x) = \frac{qL}{2} - qx, \quad 0 \leq x \leq L \quad (\text{compare com a expressão de } V(x) \text{ indicada no slide 23})$$

Utilizando agora a 2ª relação:

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \Leftrightarrow \int_{M(0)}^{M(x)} dM = \int_0^x V(x) dx = \int_0^x \left(\frac{qL}{2} - qx \right) dx = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$M(x) - M(0) = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

Mas, $M(0) = 0$ (pois não há momento fletor no apoio A)

Portanto:
$$M(x) = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq L$$

(compare com a expressão de $M(x)$ indicada no slide 23)

Obs: As duas formas de solução apresentadas são possíveis, mas a integração das relações entre $q(x)$, $V(x)$ e $M(x)$ torna a solução mais simples quando a expressão do carregamento distribuído deixa de ser trivial.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.4.
- [2] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.9.