



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica*

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #17

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

02/06/2023



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

Capítulo 4: Forças Cortantes e Momentos Fletores

1. Introdução (4.1)
2. Tipos de vigas, cargas e reações (4.2)
3. Forças cortantes e momentos fletores (4.3)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. Forças Cortantes e Momentos Fletores - Introdução

No capítulo 4 serão estudadas as vigas, que são elementos estruturais sob a ação de carregamentos transversais, ou seja, carregamentos que são aplicados transversalmente ao eixo central do elemento. Serão estudados também os dois esforços solicitantes internos gerados a partir destes carregamentos: a força cortante e o momento fletor.

Determinar os diagramas de força cortante e de momento fletor é um passo essencial para o dimensionamento de qualquer viga. Uma vez determinados estes esforços internos, podemos encontrar as tensões, deformações e deslocamentos, o que será visto nos capítulos 5 e 9.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2. Tipos de Vigas, Cargas e Reações

De modo geral, podemos dizer que uma viga é um elemento estrutural que possui uma dimensão (comprimento) que é preponderante sobre as demais dimensões que caracterizam as seções transversais, e que suporta carregamentos transversais ao eixo central.



Fig.1: Vigas na construção civil.



Fig.2: Ponte-rolante dupla viga apoiada.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Os conceitos vistos na teoria de vigas podem ser utilizados, guardadas as devidas proporções, em diferentes estruturas que atendem estas condições:



Fig.3: Tubulações industriais.

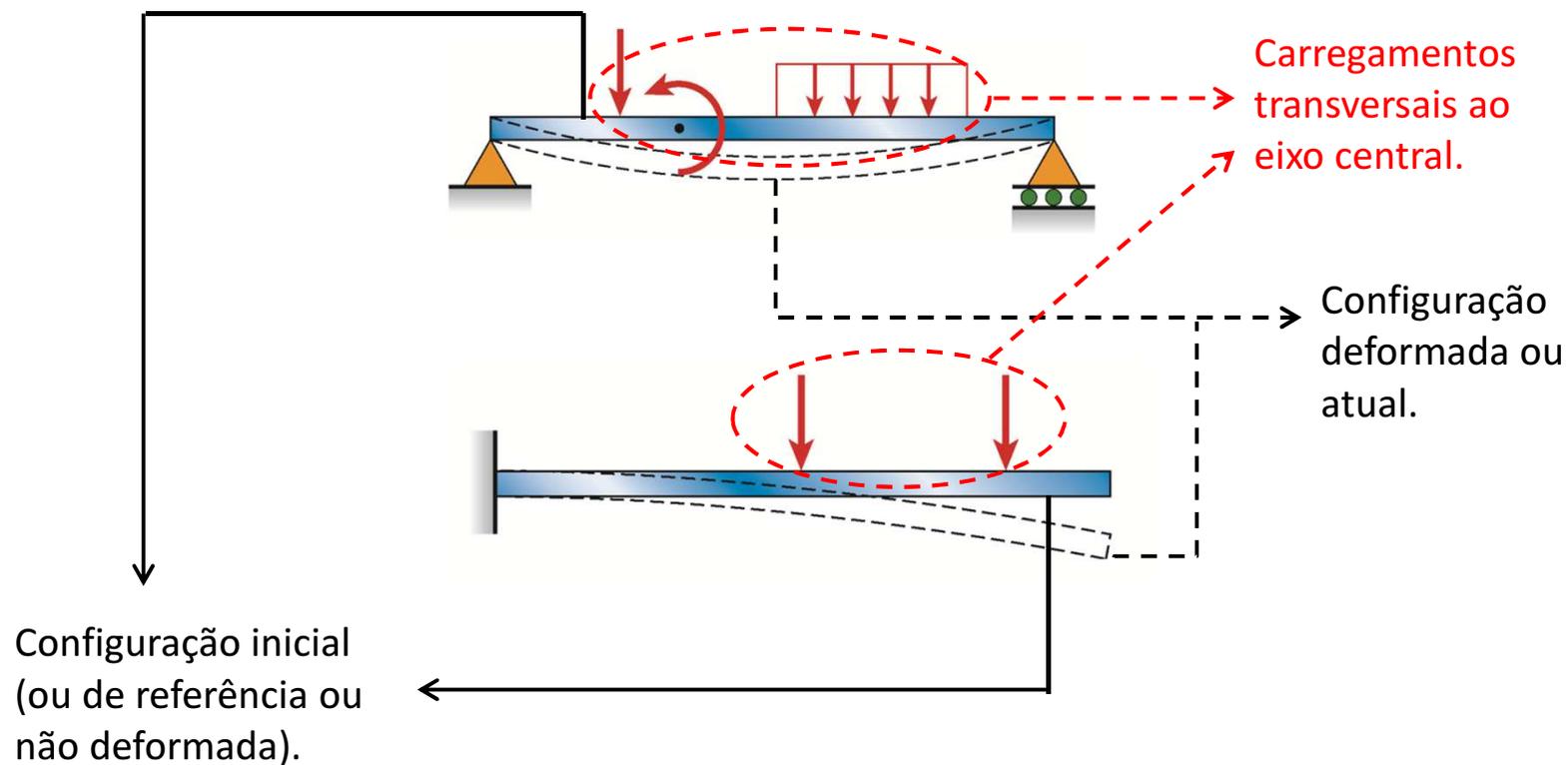


Fig.4: O conceito de viga-navio é útil para a determinação das tensões primárias na estrutura.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplos de vigas submetidas a carregamentos transversais:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Uma das formas de classificar as vigas pode ser feita pela maneira como estão apoiadas:

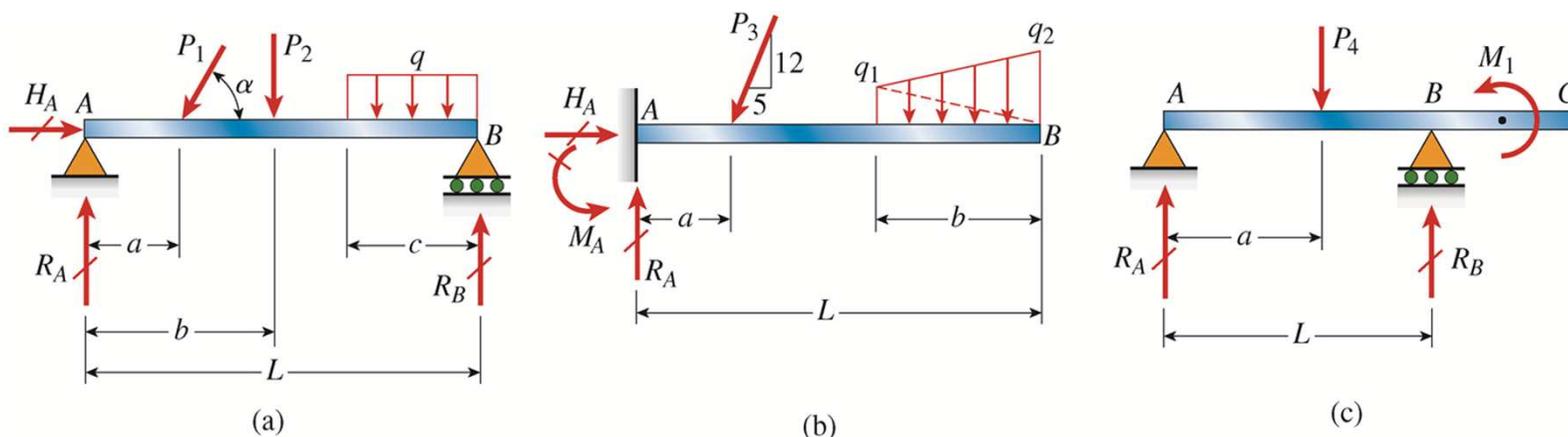


FIG. 4-2 Types of beams: (a) simple beam, (b) cantilever beam, and (c) beam with an overhang

Em (a) : viga biapoiada;

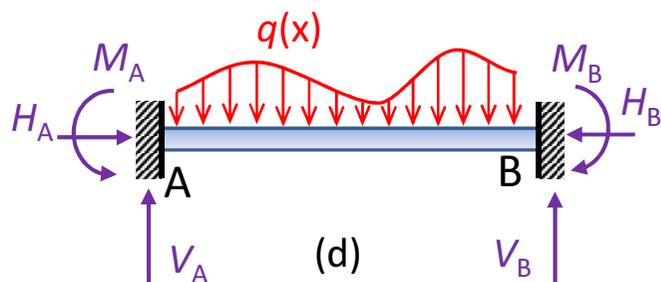
Em (b): viga engastada-livre (ou viga em balanço);

Em (c): viga simplesmente apoiada com trecho em balanço.

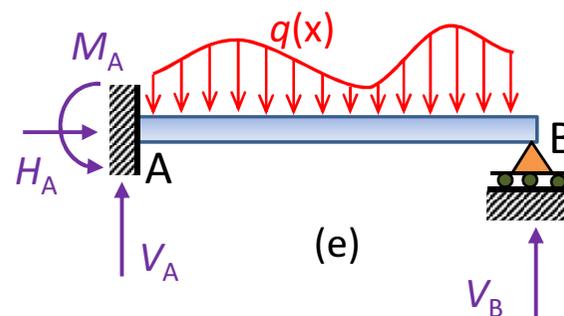
Os três exemplos acima são de vigas isostáticas (estaticamente determinadas).



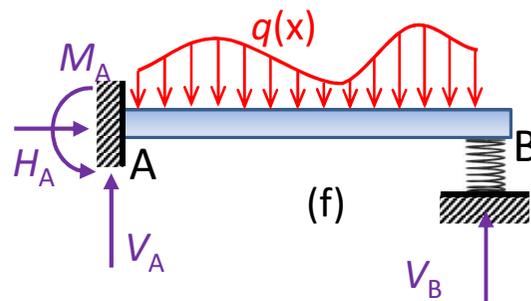
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



(d)



(e)



(f)

Em (d) : viga bi-engastada: ($g = 4 - 2 = 2$, desprezando o efeito das forças normais)

Em (e): viga engastada-simplesmente apoiada ($g = 4 - 3 = 1$)

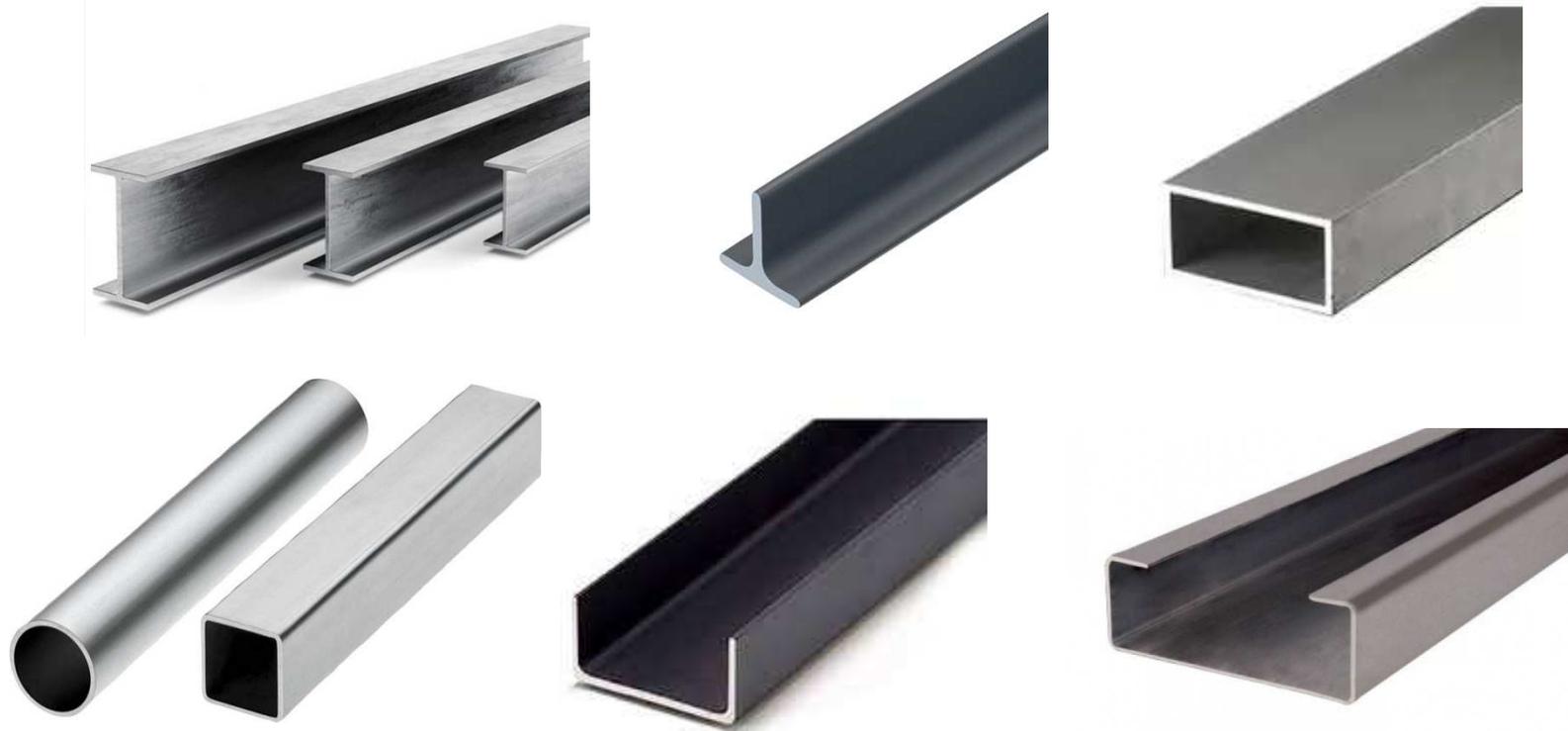
Em (f): viga engastada com apoio elástico ($g = 4 - 3 = 1$)

Os três exemplos acima são de vigas hiperestáticas (estaticamente indeterminadas).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

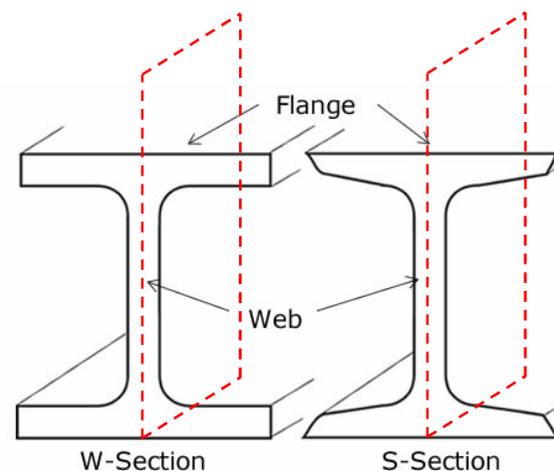
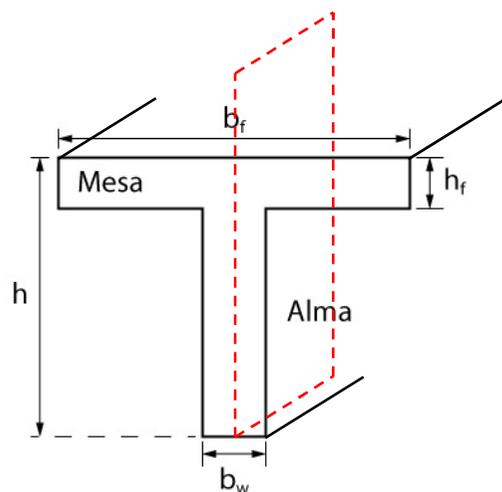
As vigas que serão analisadas no curso serão, em geral, vigas simétricas (com um eixo de simetria) ou duplamente simétricas (com dois eixos de simetria) carregadas em um único plano (denominado plano de flexão). Seguem exemplos de vigas simétricas ou duplamente simétricas:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Terminologia utilizada no estudo de vigas:



Mesa / Aba / Flange: partes da viga que suportam a maior parte do momento fletor.

Alma (web): parte da viga que suporta a maior parte da força cortante.

Obs: Os planos de flexão estão assinalados em vermelho



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Construção Real × Modelo Representativo

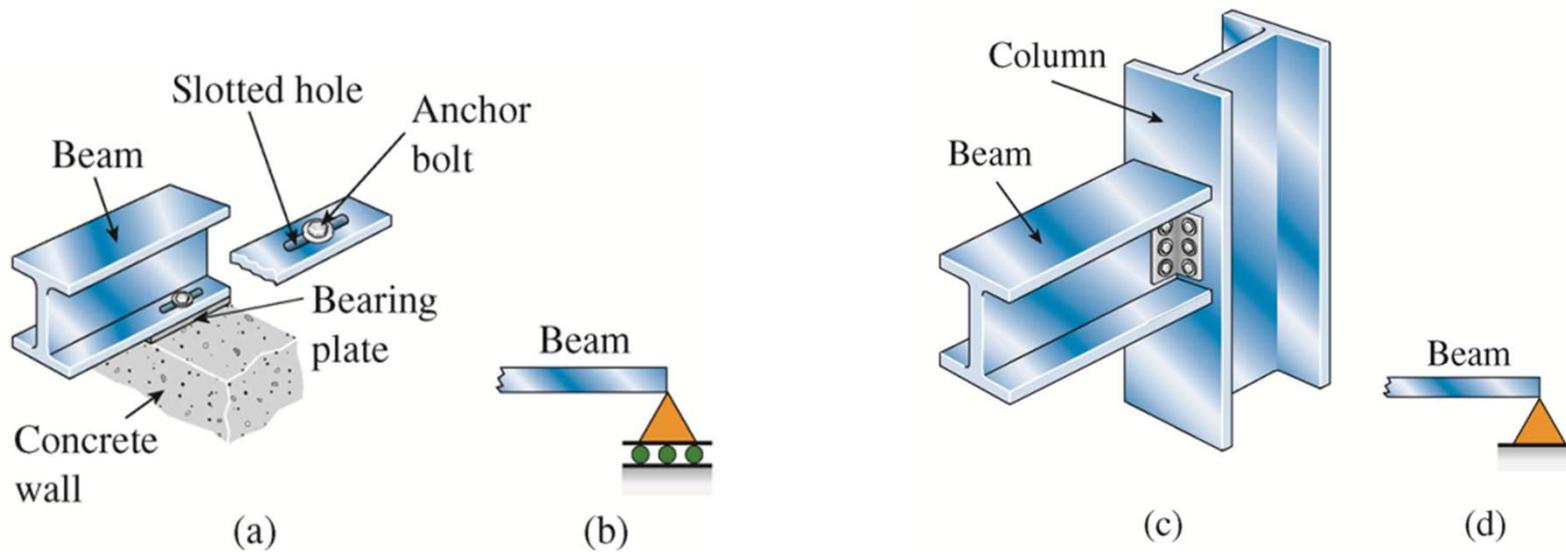


FIG. 4-3 Beam supported on a wall:
(a) actual construction, and
(b) representation as a roller support.
Beam-to-column connection: (c) actual
construction, and (d) representation as a
pin support.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Construção Real × Modelo Representativo

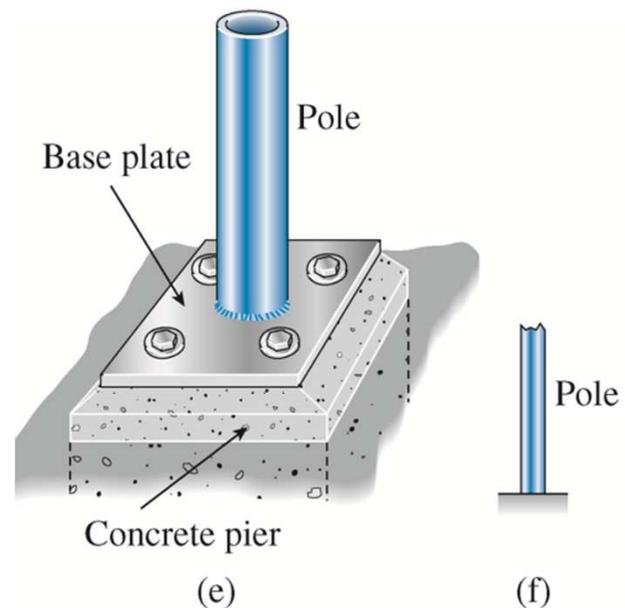


FIG. 4-3 Pole anchored to a concrete pier:
(e) actual construction, and
(f) representation as a fixed support



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Fig. 5: Ligações próximas a articulações (não permitem a transmissão de momentos fletores para os apoios).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Fig. 5: Ligações “rígidas” (permitem a transmissão de momentos fletores e de forças entre os elementos estruturais: ligação viga-viga ou viga-coluna).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tipos de carregamento:

- Cargas concentradas – Unidade no S.I.: $[P] = N$ (newton);
- Carregamentos distribuídos – Unidade no S.I.: $[q] = N/m$ (newton por metro);
- Binários – Unidade no S.I.: $[M] = Nm$ (newton-metro).

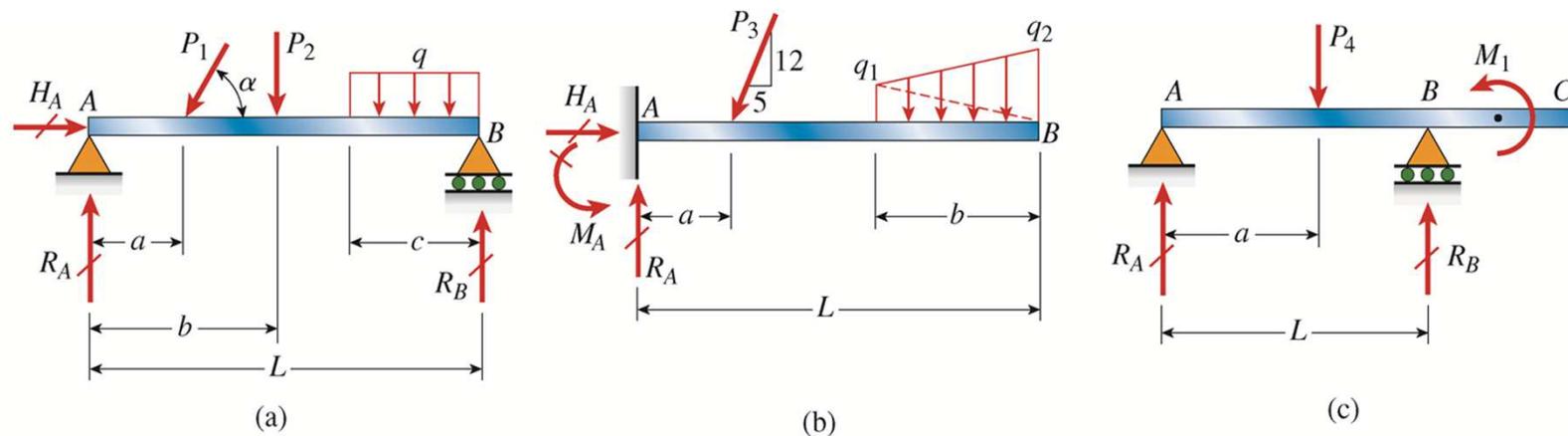


FIG. 4-2 Types of beams: (a) simple beam, (b) cantilever beam, and (c) beam with an overhang



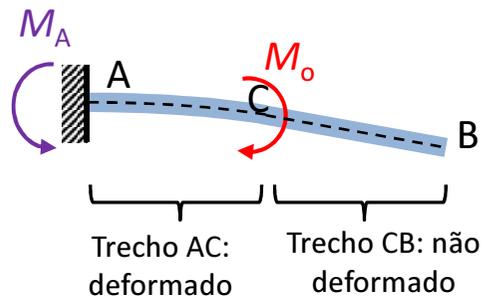
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observações:

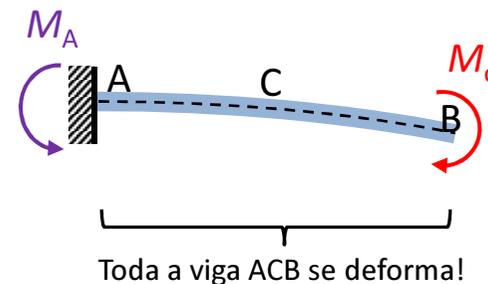
1. Quando um carregamento é aplicado sobre uma área muito pequena, ele pode ser idealizado como uma carga concentrada;
2. Diferentemente do que ocorre na Mecânica dos Corpos Rígidos (Mecânica Geral I), o ponto de aplicação de um binário leva a diferentes deformadas da estrutura, como podemos ver no exemplo abaixo:



Viga engastada-livre AB na configuração de referência.



Estrutura deformada sob a ação de um binário aplicado na seção intermediária (C)



Estrutura deformada sob a ação de um binário aplicado na extremidade B



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

**Equações de Equilíbrio (no plano) e Equações
Adicionais (em virtude da adição de alívios internos)**

Em estruturas planas submetidas a carregamentos em seu próprio plano, dispomos de três equações de equilíbrio para a determinação das reações de apoio. São elas:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

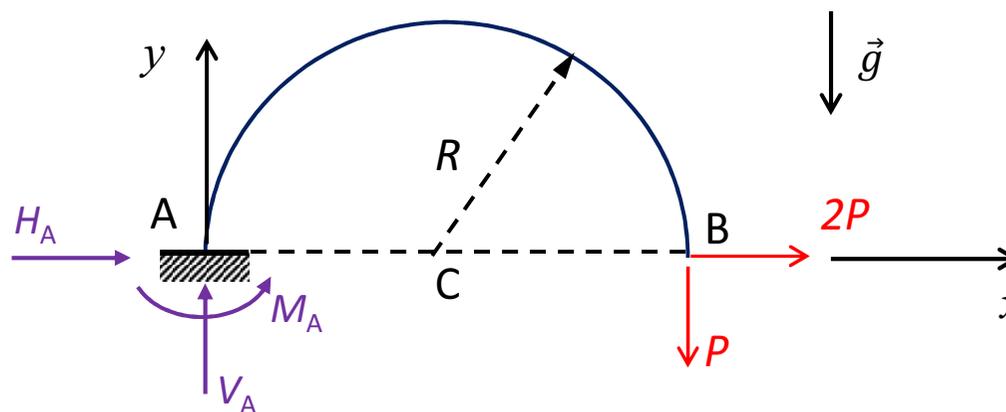
$$\sum M_{pólo} = 0$$

Dados:

P, R, g, μ, A

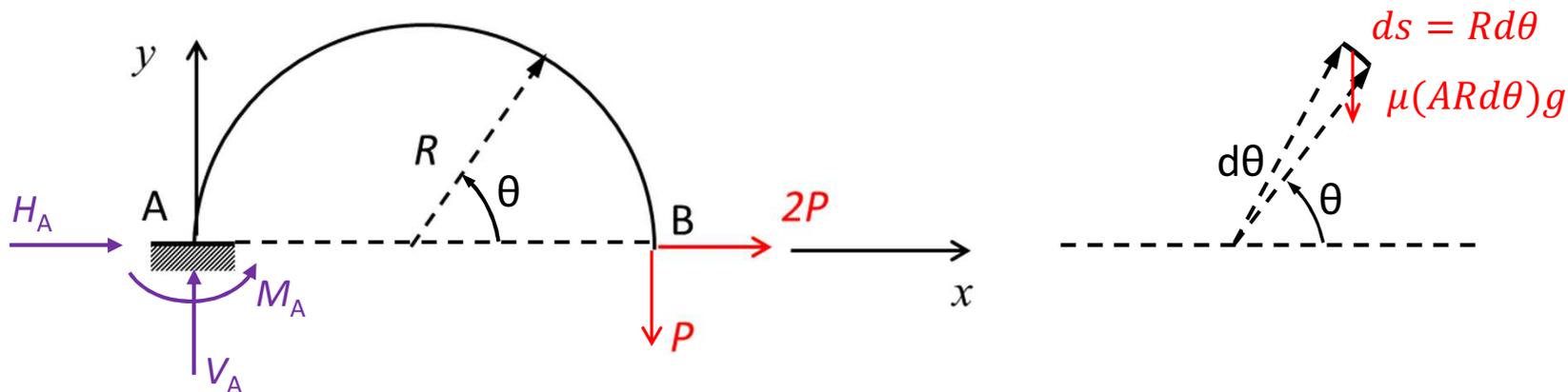
Pede-se:

H_A, V_A, M_A





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow H_A + 2P = 0 \Leftrightarrow H_A = -2P \quad (\text{sentido arbitrado para } H_A \text{ precisa ser invertido})$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V_A - P - \int_0^{\pi} \mu g A R d\theta = 0 \Leftrightarrow V_A = P + \mu g A R \pi \quad (\text{sentido arbitrado para } V_A \text{ está correto})$$

$$\begin{aligned} \sum M_{\text{pólo } A} = 0 &\Leftrightarrow M_A - 2PR - \int_0^{\pi} \mu g A R (R + R \cos \theta) d\theta = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_A = 2PR + \mu g A R^2 (\theta + \text{sen} \theta)_0^{\pi} = 2PR + \mu g A \pi R^2 \quad (\text{sentido arbitrado para } M_A \text{ está correto}) \end{aligned}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tipos de Alívio e Formas de Representação

- Alívio de força axial;
- Alívio de força cortante;
- Alívio de momento fletor;
- Alívio de momento torçor:

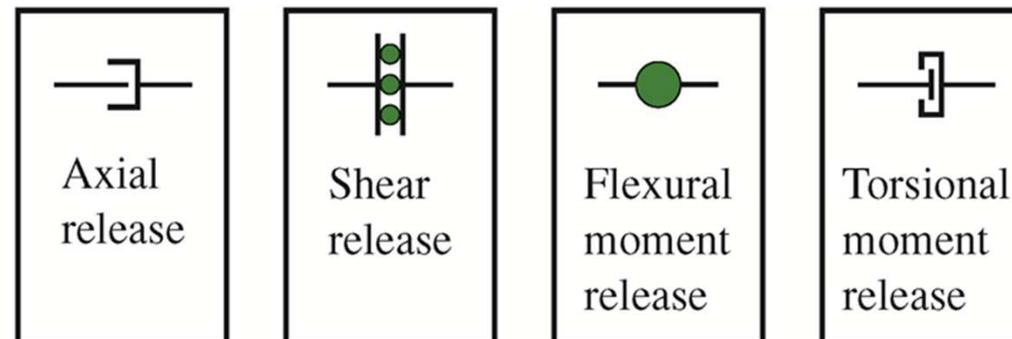


FIG. 4-4 Types of internal member releases for two-dimensional beam and frame members



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para cada alívio existente, ganhamos uma equação adicional que impõe que o esforço solicitante associado deve ser nulo junto ao alívio criado. Neste caso, basta impor tal condição considerando todos os esforços externos (ativos ou reativos) que estão à esquerda ou à direita do alívio.

Exemplo:

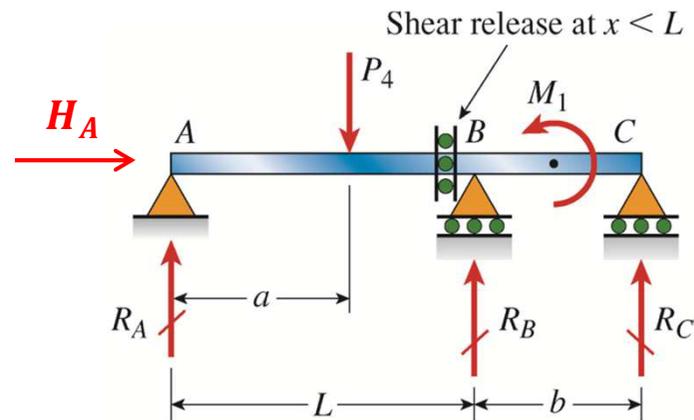
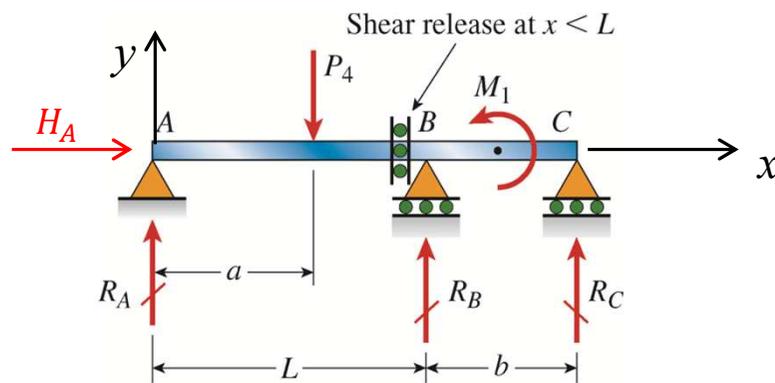


FIG. 4-7 Modified beam with overhang—
add shear release

$$g = 4 - (3 + 1) = 0 \quad (\text{estrutura isostática})$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow R_A + R_B + R_C = P_4$$

$$\sum F_{y,esq.B} = 0 \Leftrightarrow R_A = P_4$$

$$\sum M_{pólo B} = 0 \Leftrightarrow R_C b + M_1 + P_4(L - a) = R_A L$$

Como $R_A = P_4$: $R_C b = -M_1 - P_4(L - a) + P_4 L = -M_1 + P_4 a$

$$R_C = -\frac{M_1}{b} + \frac{P_4 a}{b}$$

$$R_B = \frac{M_1}{b} - \frac{P_4 a}{b}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3. Forças Cortantes e Momentos Fletores – Convenção de Sinais

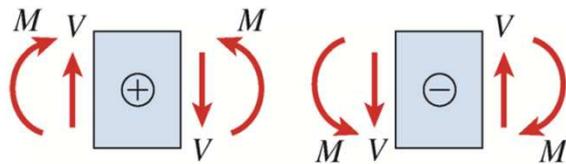
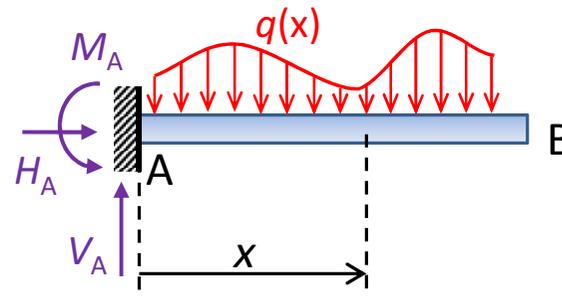


FIG. 4-9 Sign conventions for shear force V and bending moment M

Forças Cortantes: positivas se tendem a girar o elemento no sentido horário, e negativas se tendem a girar o elemento no sentido anti-horário;

Momentos fletores: positivos se causam tração nas fibras inferiores, e negativos se causam tração nas fibras superiores.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo 4.1: Uma viga AB simplesmente apoiada suporta duas cargas, uma força P e um momento $M_o = PL$, agindo como mostra a figura. Desenhe os diagramas de força cortante e de momento fletor em função dos parâmetros P e L .

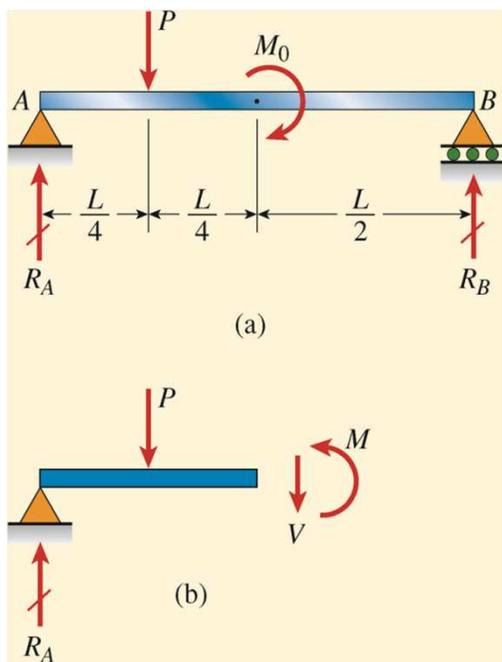


FIG. 4-11 Example 4-1. Shear forces and bending moment in a simple beam

Solução:

Passo 1: Desenhar o D.C.L. e determinar as reações de apoio R_A e R_B utilizando as equações de equilíbrio estático.

$$\sum M_{p\acute{o}lo A} = 0 \Leftrightarrow R_B L - M_o - \frac{PL}{4} = 0$$

$$R_B L = PL + \frac{PL}{4} = \frac{5PL}{4} \Leftrightarrow R_B = \frac{5P}{4}$$

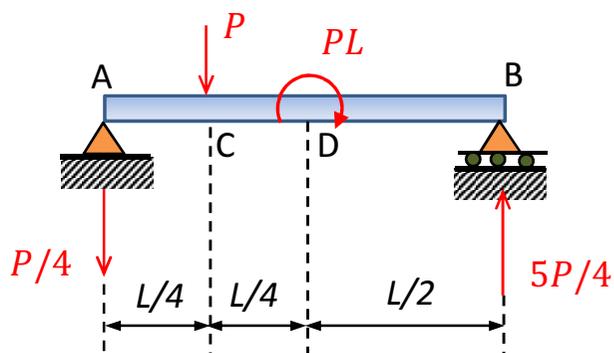
$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow R_A + R_B = P$$

$$R_A = P - R_B = -\frac{P}{4}$$

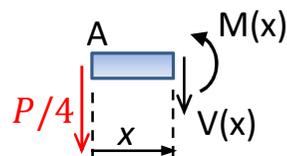


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Passo 2: Redesenhar o D.C.L. com os sentidos corretos e determinar os esforços solicitantes em cada trecho da viga.



Trecho AC:



$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V(x) + \frac{P}{4} = 0 \Leftrightarrow V(x) = -\frac{P}{4}$$

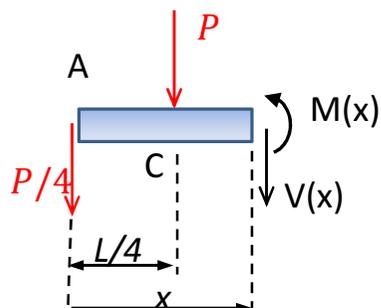
$$\sum M_{pólo A} = 0 \Leftrightarrow M(x) - V(x) \cdot x = 0 \Leftrightarrow M(x) = V(x) \cdot x = -\frac{P}{4}x$$

$$(0 \leq x < L/4)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Trecho CD:



$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V(x) + \frac{5P}{4} = 0 \Leftrightarrow V(x) = -\frac{5P}{4}$$

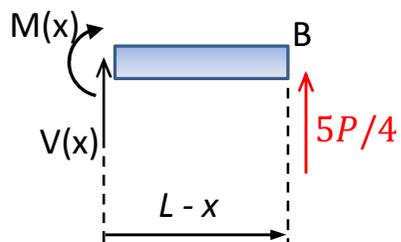
$$\sum M_{pólo A} = 0 \Leftrightarrow M(x) - V(x) \cdot x - \frac{PL}{4} = 0 \Leftrightarrow M(x) = -\frac{5Px}{4} + \frac{PL}{4}$$

$$(L/4 \leq x < L/2)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Trecho DB:



$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow V(x) + \frac{5P}{4} = 0 \Leftrightarrow V(x) = -\frac{5P}{4}$$

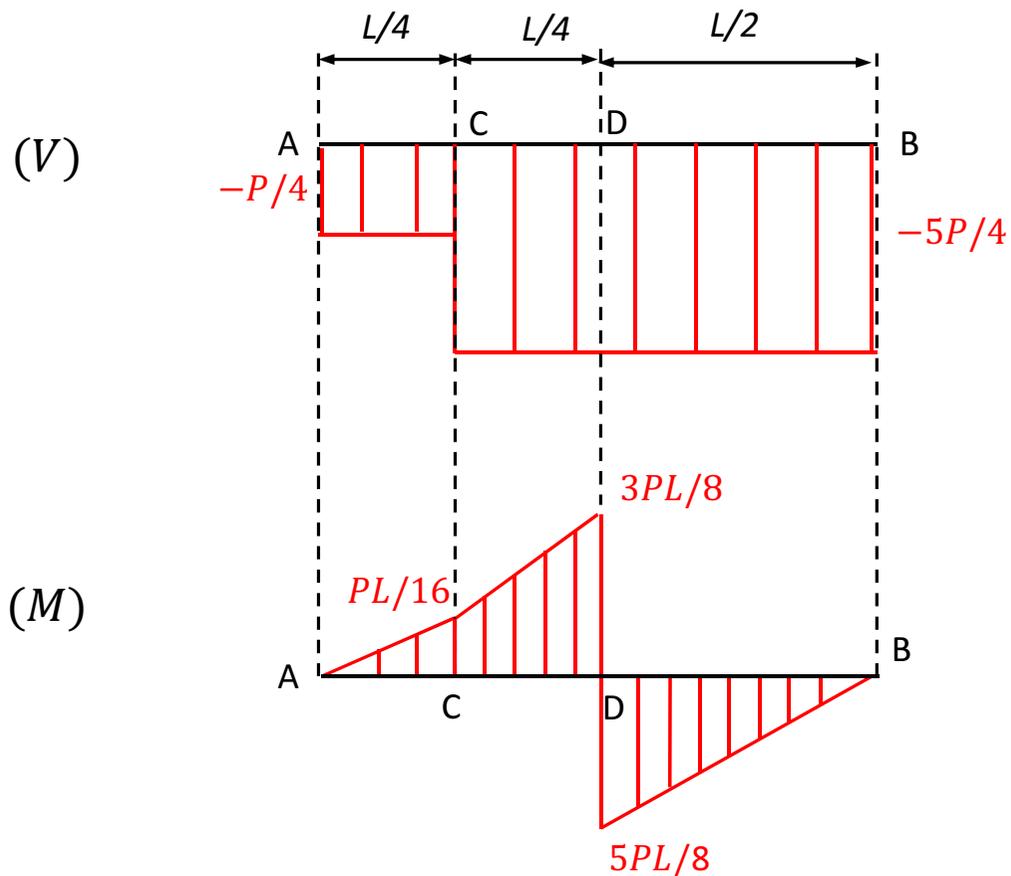
$$\sum M_{\text{pólo } B} = 0 \Leftrightarrow M(x) + V(x) \cdot (L - x) = 0 \Leftrightarrow M(x) = \frac{5P}{4} (L - x)$$

$$(L/2 \leq x < L)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Diagramas:



Seção mais solicitada: D

$$|V_{m\acute{a}x}| = \frac{5P}{4}$$

$$|M_{m\acute{a}x}| = \frac{5PL}{8}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

[1] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.4.