



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #16

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

30/05/2023



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Capítulo 12: Revisão de Centroides e Momentos de Inércia

12.1 Introdução

12.2 Centroides de figuras planas

12.3 Centroides de figuras planas compostas

12.4 Momentos de inércia das figuras planas

12.5 Teorema dos eixos paralelos para momentos de inércia

12.6 Momentos de inércia polar

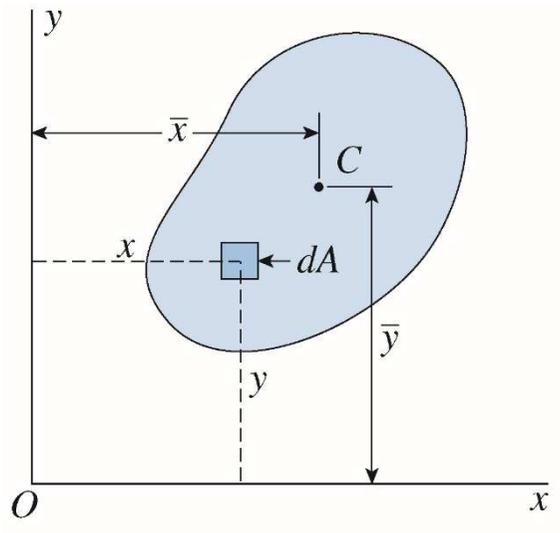
12.7 Produtos de inércia

12.8 Rotação de eixos

12.9 Eixos principais e momentos de inércia principais



12.2 Centroides de figuras planas



- Área:

$$A = \int dA$$

- Momentos de área de primeira ordem:

$$Q_x = \int y dA$$

$$Q_y = \int x dA$$

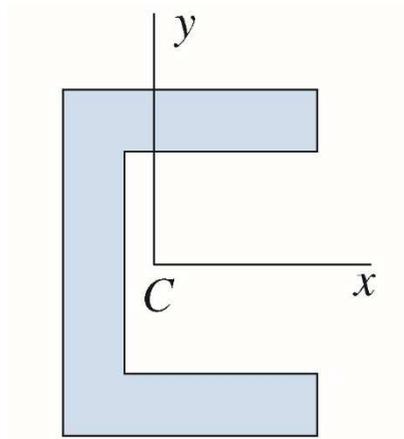
- Centroide: $C = (\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{1}{A} \int x dA \quad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{1}{A} \int y dA$$

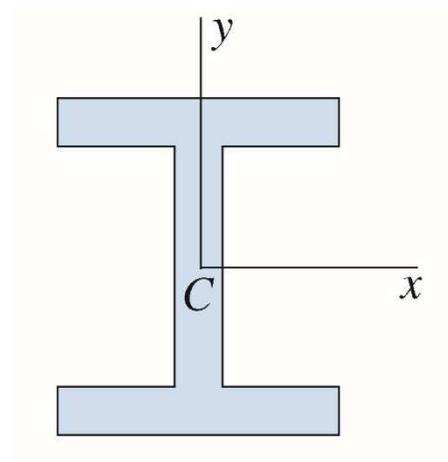


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

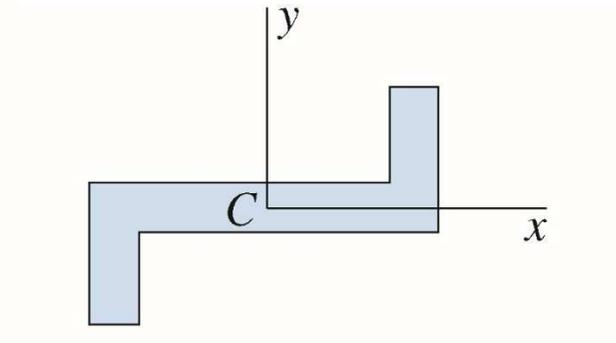
- Figuras com simetria:



a) um eixo



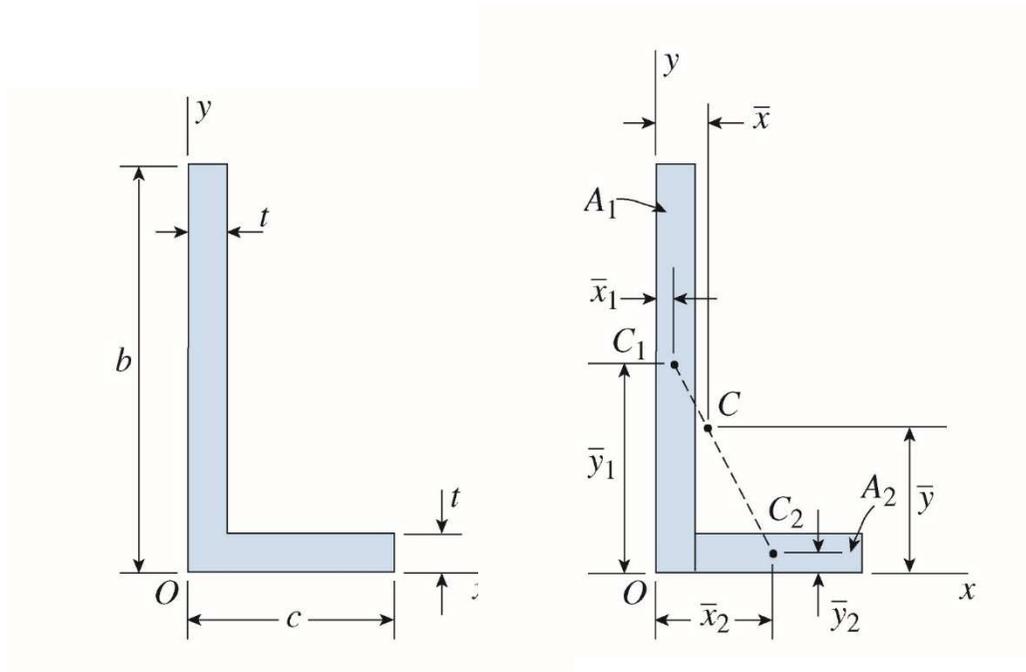
b) dois eixos



c) um ponto



12.3 Centroides de figuras planas compostas



- Composição de figuras

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$

$$Q_x = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i A_i$$

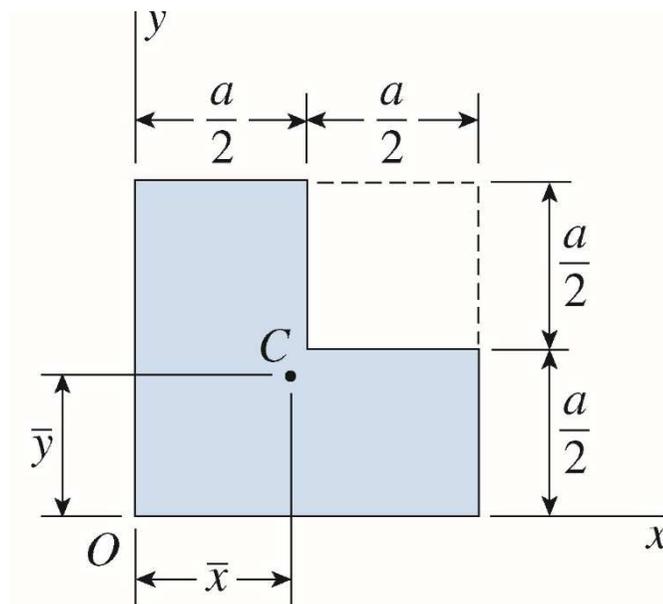
$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i A_i$$

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i$$



12.3 Centroides de figuras planas compostas

- Exemplo



$$A_1 = a^2$$

$$A_2 = -\frac{a^2}{4}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$\bar{x}_1 = \frac{a}{2}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{3}{4}a$$

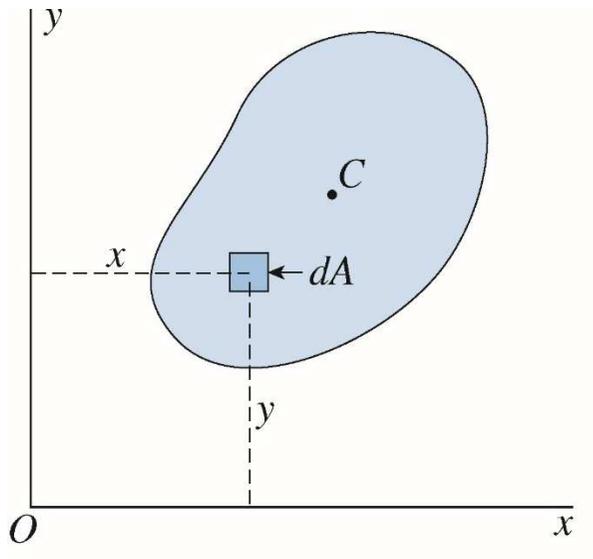
$$\bar{x} = \frac{A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2}{A} \Rightarrow \bar{x} = \frac{5}{12}a$$

$$\bar{x} = \bar{y} \text{ (simetria)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

12.4 Momentos de inércia de figuras planas



$$I_x = \int y^2 dA$$

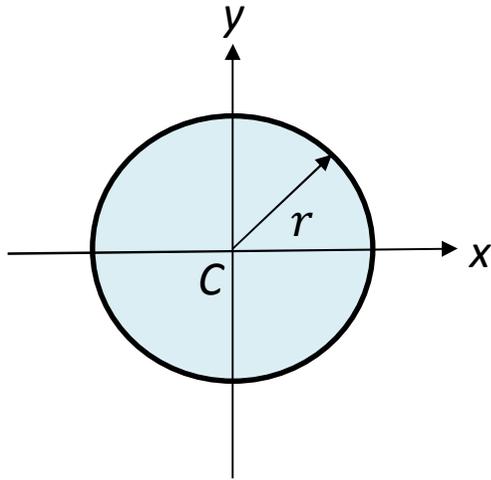
$$I_y = \int x^2 dA$$

(momentos de área de segunda ordem)

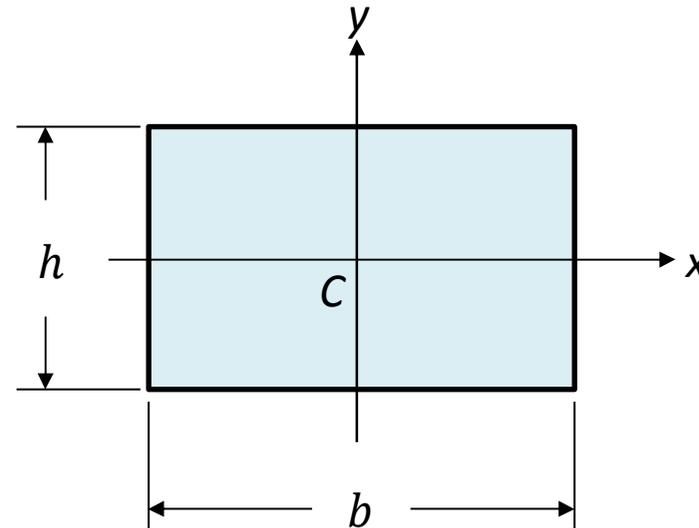


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Figuras comuns:



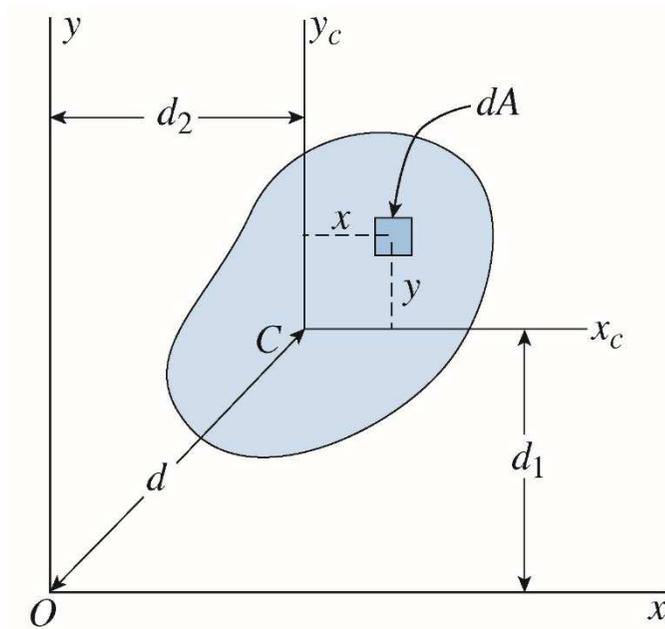
$$I_x = I_y = \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{64} \pi d^4$$



$$I_x = \frac{1}{12} b h^3 \quad I_y = \frac{1}{12} h b^3$$



12.5 Teorema dos eixos paralelos para momentos de inércia



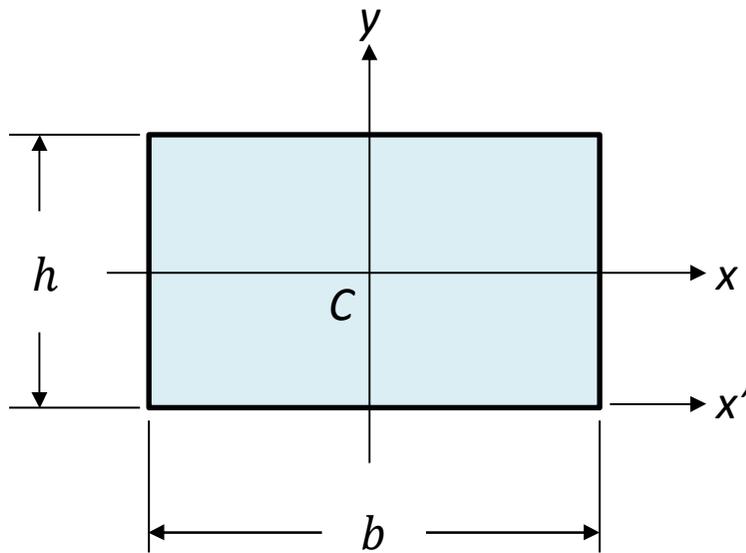
$$I_x = I_{x_c} + Ad_1^2$$

$$I_y = I_{y_c} + Ad_2^2$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Exemplo:

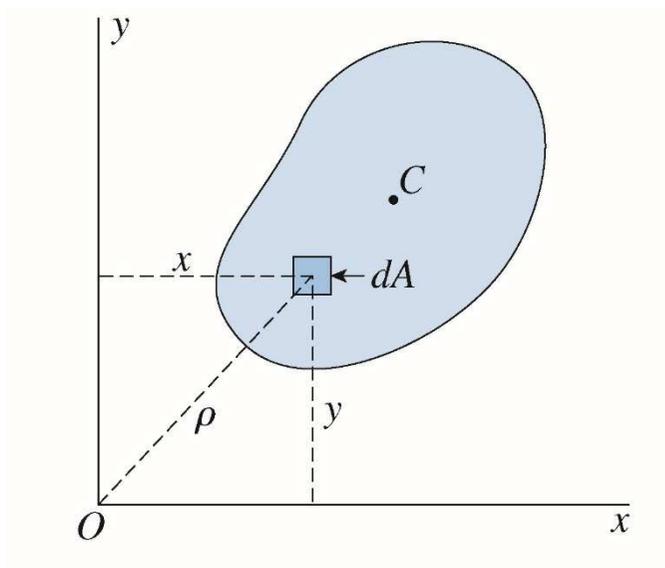


$$I_x = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_{x'} = I_x + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{x'} = \frac{1}{3}bh^3$$



12.6 Momentos de inércia polar



$$I_O = \int \rho^2 dA$$

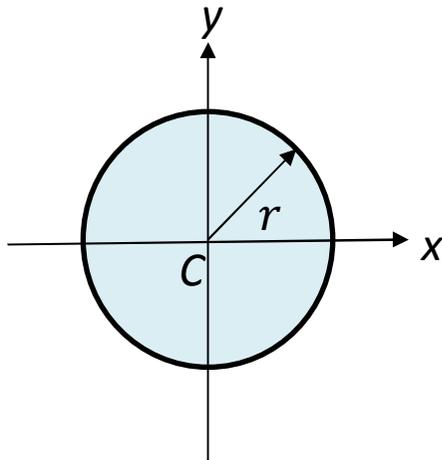
Propriedade:

$$I_O = I_x + I_y$$

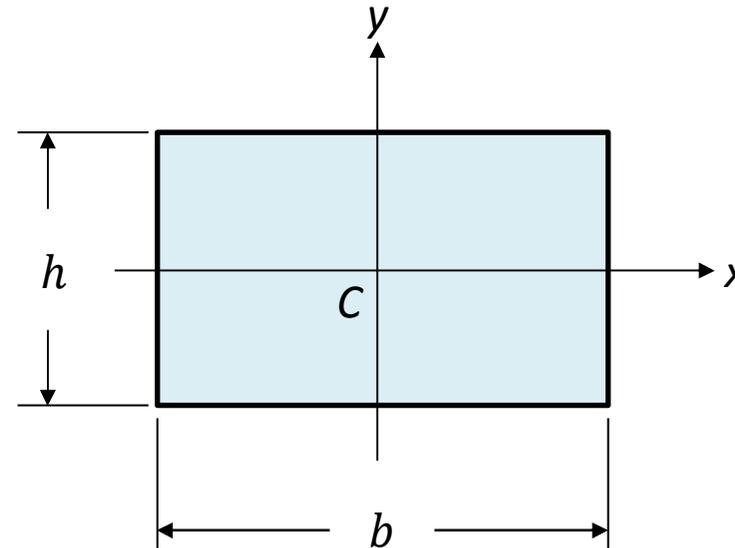


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Figuras comuns:



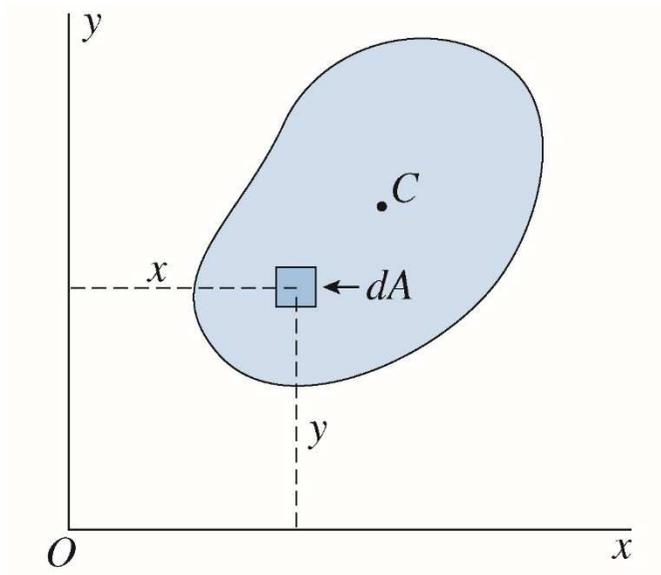
$$I_c = \frac{1}{2} \pi r^4 = \frac{1}{32} \pi d^4$$



$$I_c = \frac{1}{12} b h (b^2 + h^2)$$

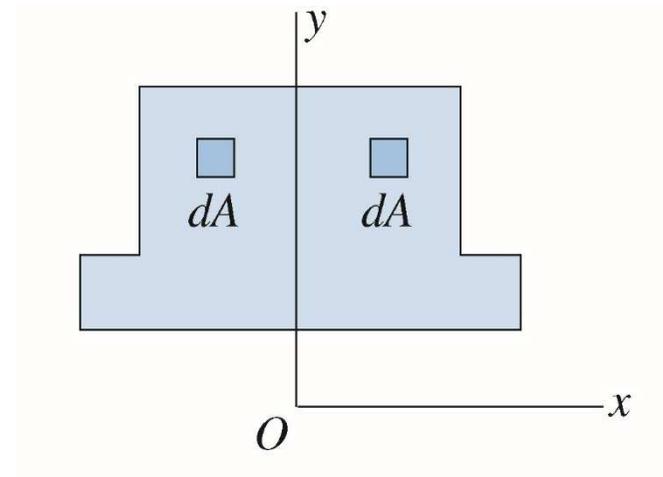


12.7 Produtos de inércia



$$I_{xy} = \int xy dA$$

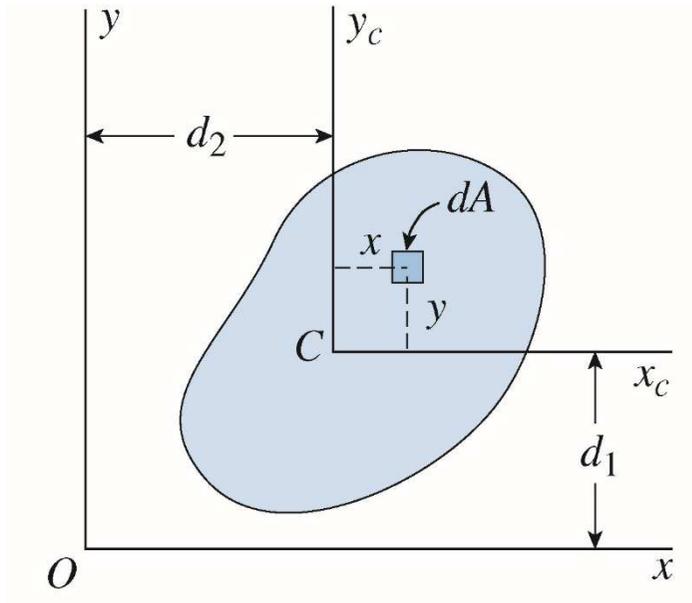
- Simetria: $I_{xy} = 0$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Teorema dos Eixos Paralelos:

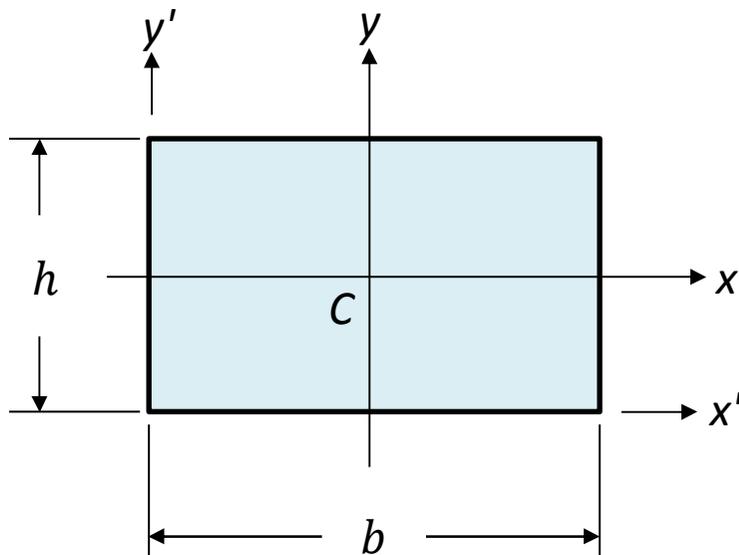


$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + A d_1 d_2$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Exemplo:

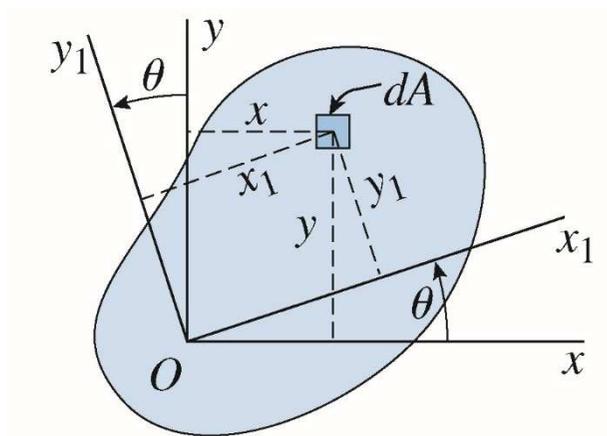


$$I_{xy} = 0 \text{ (simetria)}$$

$$I_{x'y'} = bh \frac{hb}{22} \Rightarrow I_{x'y'} = \frac{1}{4} b^2 h^2$$



12.8 Rotação de eixos



$$I_{x_1} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{(I_x - I_y)}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{(I_x - I_y)}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

Propriedade: $I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

12.9 Eixos principais e momentos de inércia principais

Definições:

Os momentos principais de inércia são o momento de inércia mínimo e o momento de inércia máximo, considerando todos os eixos que passam por um ponto.

Os eixos principais de inércia são os eixos em relação aos quais o momento de inércia é mínimo ou máximo.

Posição dos eixos principais: $\tan 2\theta_p = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$

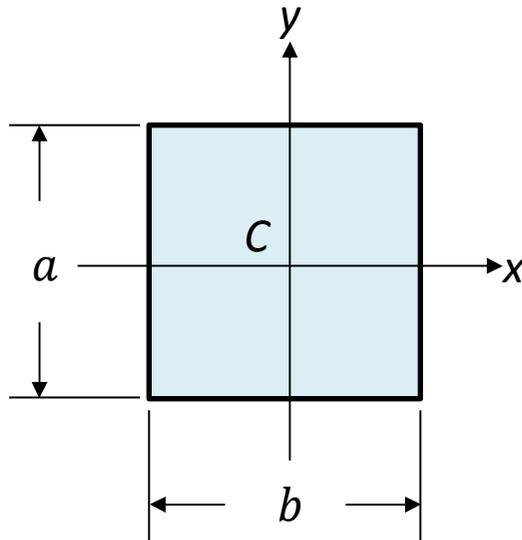
Momentos principais:

$$\left[\begin{array}{l} I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \\ I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \end{array} \right.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo:



$$I_x = I_y = \frac{1}{12} a^4 \quad \Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{1}{12} a^4$$
$$I_{xy} = 0$$

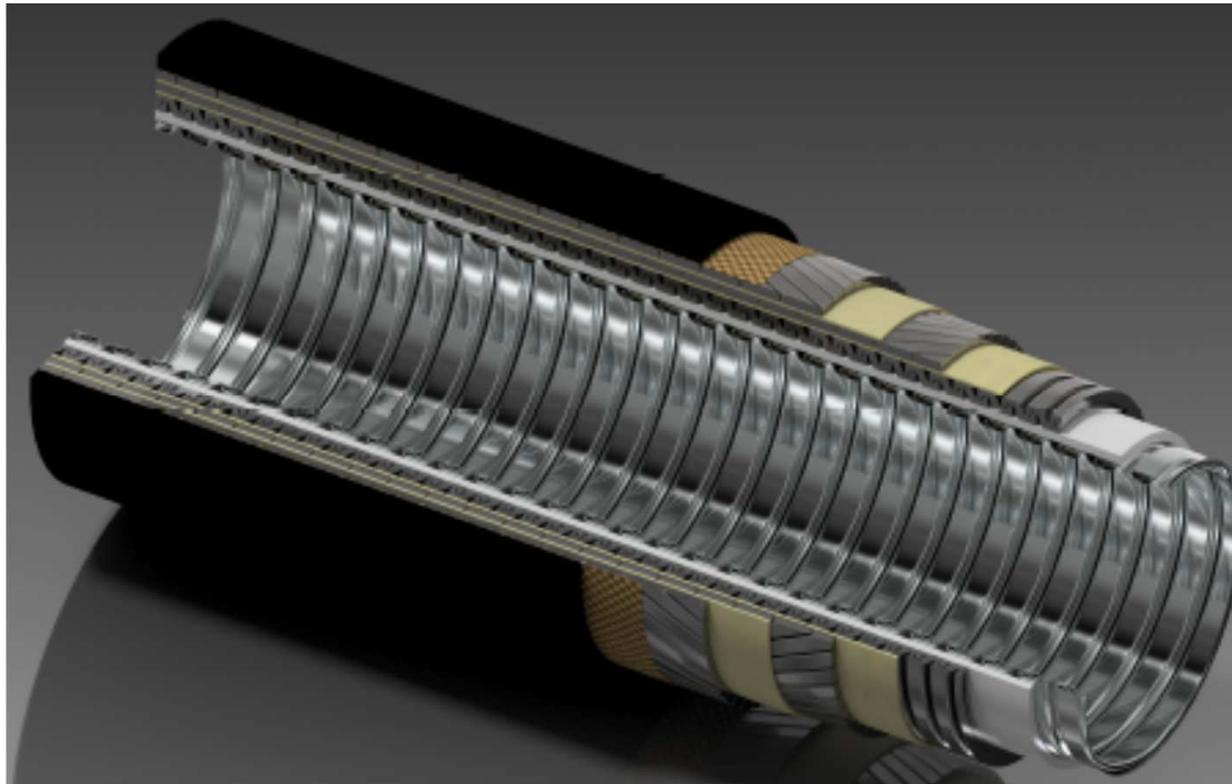
- Neste caso todos os eixos que passam pelo ponto *C* são eixos principais
- Um ponto como esse é chamado de *ponto principal*.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplo de Aplicação:

Utilizando as definições vistas no capítulo 12, podemos determinar as propriedades seccionais das seções transversais de barras utilizadas na fabricação de dutos flexíveis, apesar da complexidade geométrica que possuem.





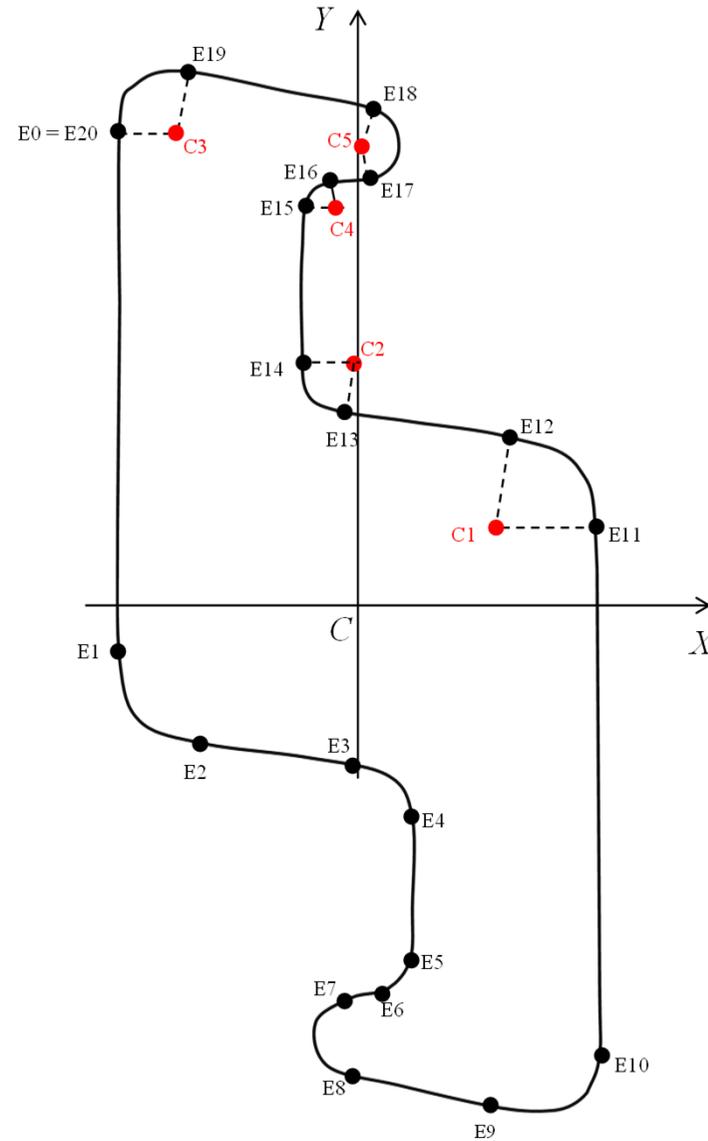
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



Detalhe do intertravamento existente na armadura de pressão (perfil zeta) de dutos flexíveis

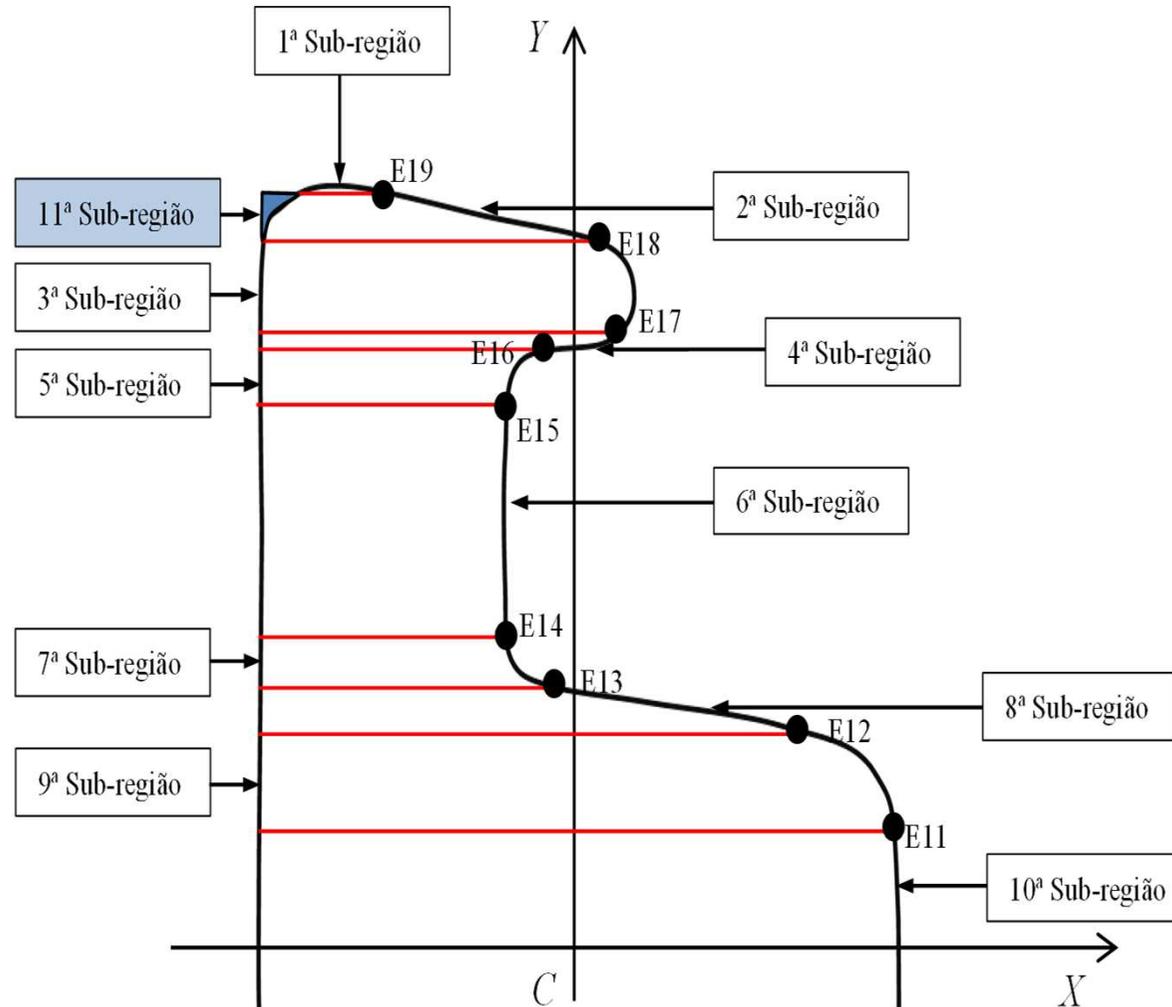


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



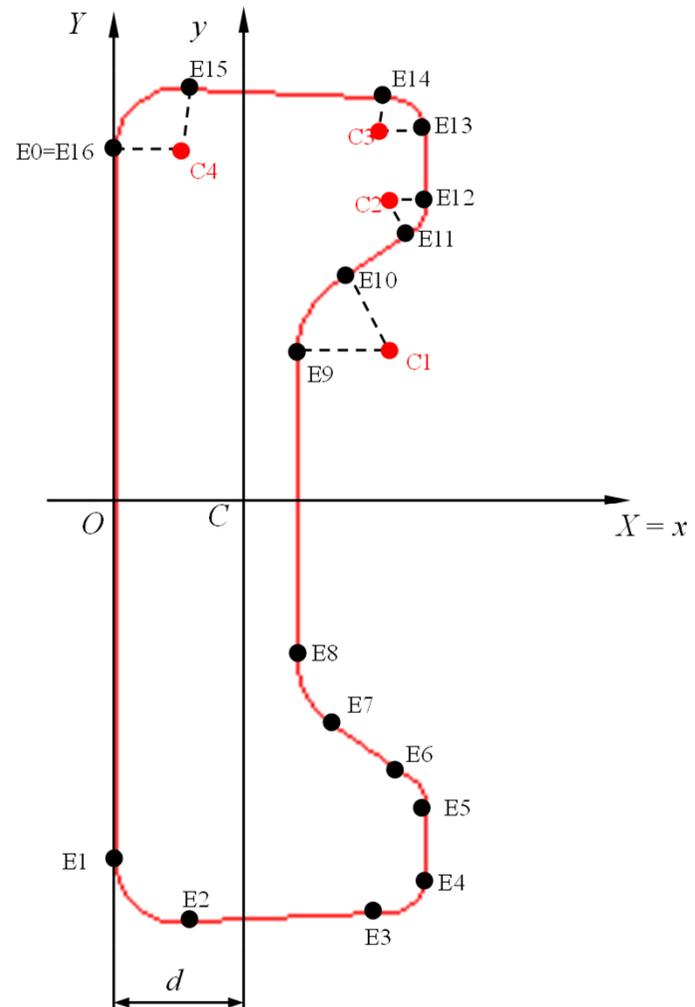


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica



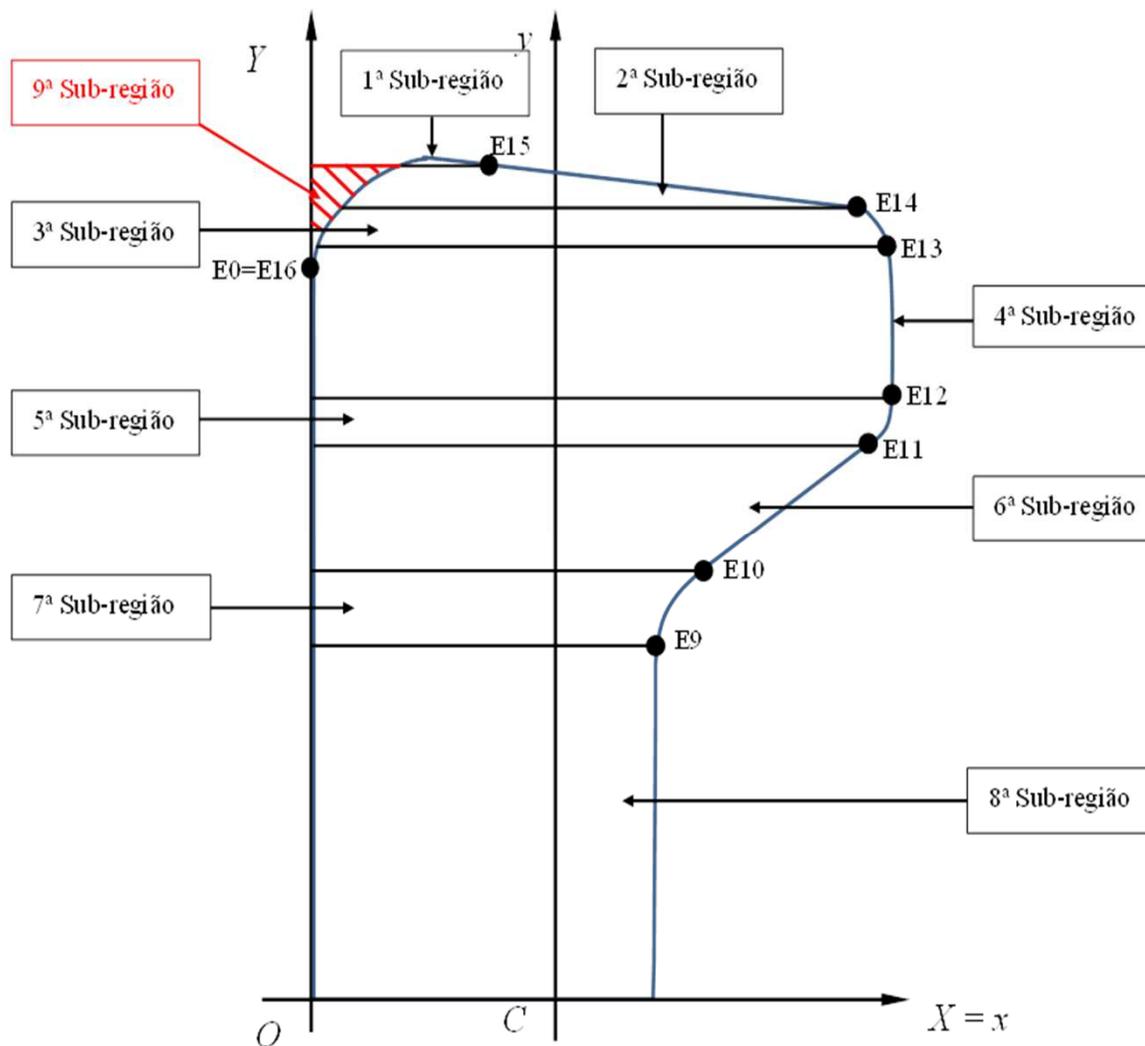


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência:

[1] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.12