Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #14

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

23/05/2023

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Membros de torção estaticamente indeterminados (3.8), [1]
2. Exercícios.

1. Membros de Torção Estaticamente Indeterminados

As barras e eixos estudados até o momento eram estaticamente determinados, pois todos os torques internos e reações podiam ser obtidos a partir de diagramas de corpo livre e equações de equilíbrio.

Se restrições adicionais (como engastamentos) forem adicionadas aos eixos, as equações de equilíbrio não serão suficientes para a determinação dos torques internos e dos torques de reação. A estrutura, neste caso, é denominada *estaticamente indeterminada* (ou *hiperestática*).

A solução destes problemas envolve a utilização das seguintes equações:

- Equações de equilíbrio;
- Equações de compatibilidade;
- Relações torque-rotação.

Exemplo 1:

A estrutura indicada abaixo é formada por uma barra sólida e um tubo, estando ambos engastados na extremidade A e unidos a uma placa rígida (indeformável) na extremidade B. O conjunto é submetido a um torque T aplicado na extremidade B. Considere que sejam dados:

T : torque aplicado ao conjunto;

L : comprimento da barra e do tubo;

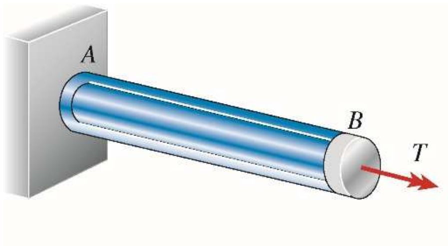
I_{p1} e I_{p2} : momentos de inércia polar da barra sólida (1) e do tubo (2);

G_1 e G_2 : módulos de cisalhamento dos materiais da barra (1) e do tubo (2).

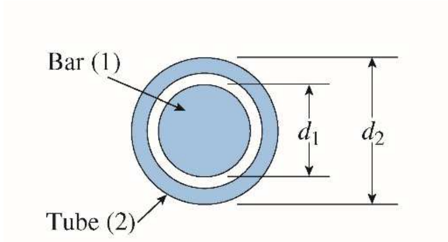
Pede-se:

a) torques atuantes em cada um dos elementos que formam o conjunto;

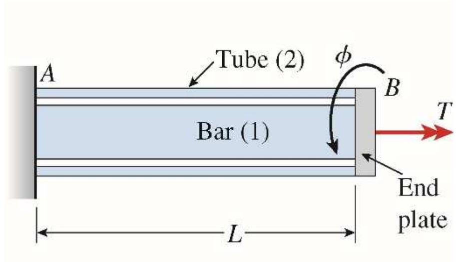
b) O ângulo de giro (ϕ) do conjunto.



(a)



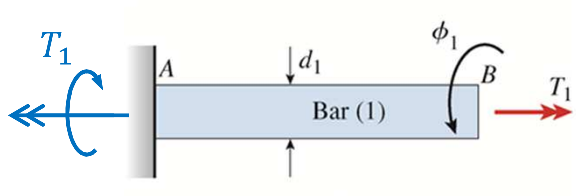
(b)



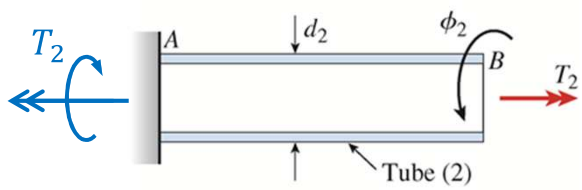
(c)

Solução:

Verificamos de imediato que temos uma estrutura hiperestática com grau de hiperestaticidade g = 1, pois temos dois torques a serem determinados e dispomos apenas de uma única equação de equilíbrio. Denotando por T_1 e ϕ_1 o torque suportado pela barra sólida e seu ângulo de giro (da seção B relativamente à seção A) e por T_2 e ϕ_2 as quantidades análogas para o tubo, teremos:



(d)



(e)

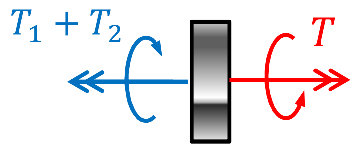
Cada uma destas estruturas, vistas separadamente, é uma estrutura isostática (veja os D.C.L.'s), e a determinação dos respectivos ângulos de giro é simples.

Para a barra: $\boxed{\phi_1 = \dfrac{T_1 L}{G_1 I_{p1}}}$

Para o tubo: $\boxed{\phi_2 = \dfrac{T_2 L}{G_2 I_{p2}}}$

→ *Relações torque-rotação*

Equação de equilíbrio: $\boxed{T = T_1 + T_2}$



Equação de compatibilidade de rotações: $\boxed{\phi_1 = \phi_2}$ $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{T_1}{k_{t1}} = \dfrac{T_2}{k_{t2}}$

$$\begin{cases} T = T_1 + T_2 \\ \dfrac{T_1}{k_{t1}} = \dfrac{T_2}{k_{t2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_1 = \left(\dfrac{k_{t1}}{k_{t1} + k_{t2}}\right) T \\ T_2 = \left(\dfrac{k_{t2}}{k_{t1} + k_{t2}}\right) T \end{cases}$$

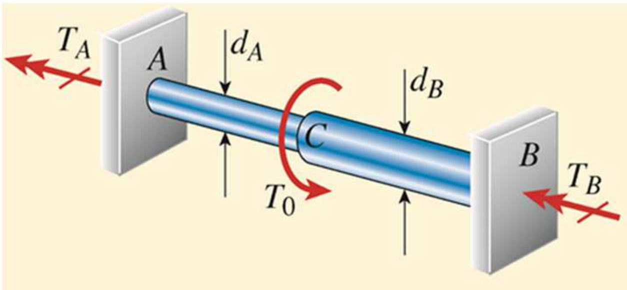
Onde: $k_{t1} = \dfrac{G_1 I_{p1}}{L}$ e $k_{t2} = \dfrac{G_2 I_{p2}}{L}$

Obs: $\phi = \dfrac{T_1}{k_{t1}} = \dfrac{T_2}{k_{t2}} = \dfrac{T}{k_{t,eq}}$ onde: $k_{t,eq} = k_{t,1} + k_{t,2}$

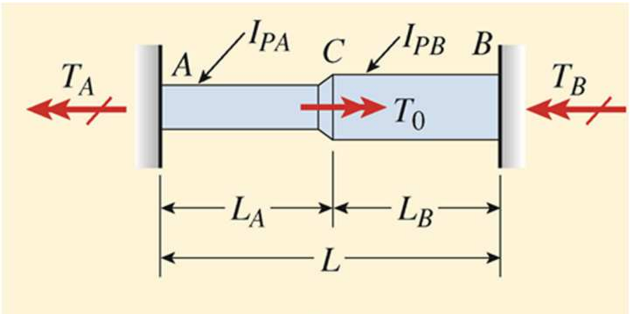
Logo: $\phi = \dfrac{T}{k_{t,eq}} = \dfrac{TL}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}}$ (“molas em paralelo”)

Exemplo 2:

A estrutura indicada abaixo é formada por uma barra sólida escalonada formada pelos segmentos AC e CB, estando ambos engastados nas extremidade A e B. O conjunto é submetido a um torque T_0 aplicado em C. São dados: T_0, L_A, L_B, d_A, d_B e G.
Pede-se:
a) torques atuantes em cada um dos elementos que formam o conjunto;
b) O ângulo de giro (ϕ) da seção C.



(a)

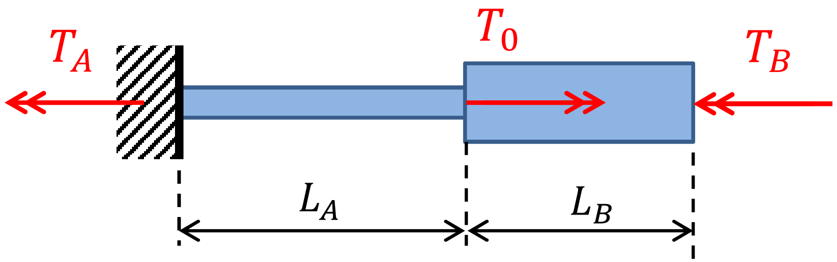


(b)

Solução:

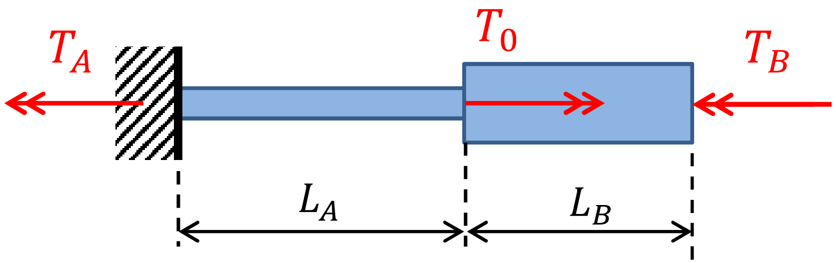
Verificamos, novamente, que se trata de uma estrutura hiperestática com grau de hiperestaticidade g = 1, pois temos dois torques reativos a serem determinados e dispomos apenas de uma única equação de equilíbrio.

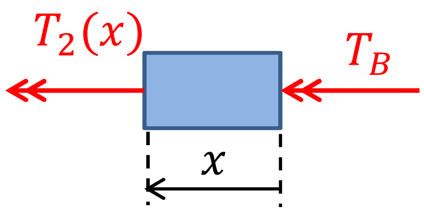
Liberando o ângulo de giro em B para obtermos uma estrutura isostática fundamental (E.I.F.), vamos determinar o ângulo de giro em B (relativamente à seção A, que está engastada) em função dos torques T_0 e T_B:



$$\phi_{B,A} = \sum_{i=1}^{2} \frac{T_i L_i}{G_i I_{pi}}$$

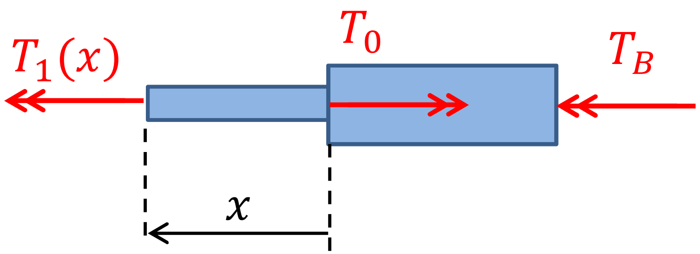
Torque interno no segmento CB (segmento 2):





$$T_2(x) + T_B = 0 \;\Leftrightarrow\; T_2(x) = -T_B \qquad (0 \leq x < L_B)$$

Torque interno no segmento AC (segmento 1):



$$T_1(x) + T_B = T_0 \;\Leftrightarrow\; T_1(x) = T_0 - T_B$$

$$(0 \leq x < L_A)$$

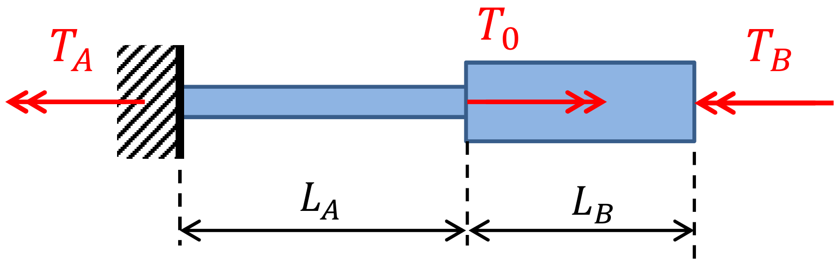
$$\phi_{B,A} = \sum_{i=1}^{2} \frac{T_i L_i}{G_i I_{pi}} = \frac{(T_0 - T_B) L_A}{G I_{pA}} + \frac{(-T_B) L_B}{G I_{pB}} = 0$$

(Equação de compatibilidade)

Resolvendo para T_B:

$$T_B \left(\frac{1}{k_{tA}} + \frac{1}{k_{tB}} \right) = \frac{T_0}{k_{tA}} \iff T_B = \left(\frac{k_{tB}}{k_{tA} + k_{tB}} \right) T_0$$

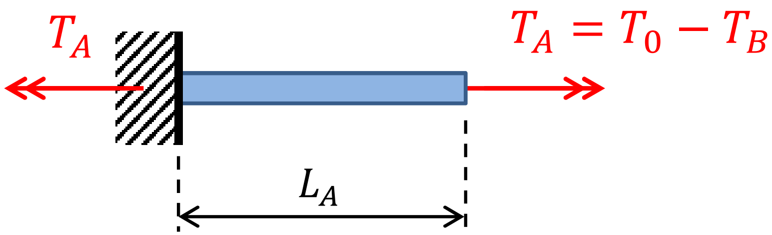
Pela equação de equilíbrio de momentos:



$$T_A + T_B = T_0$$

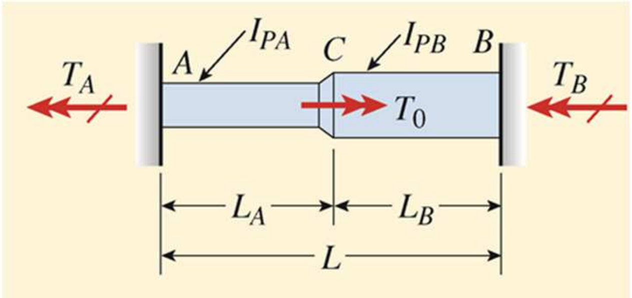
$$T_A = \left(\frac{k_{tA}}{k_{tA} + k_{tB}} \right) T_0$$

Para determinarmos o ângulo de giro em C basta analisar o trecho AC:

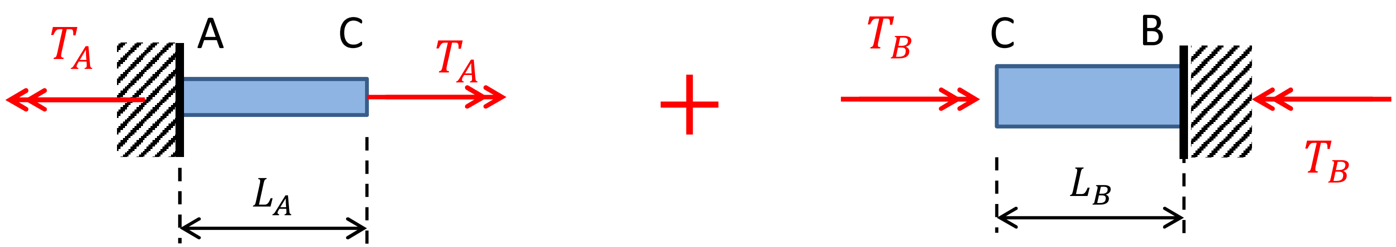


$$\phi_{C,A} = \frac{T_A L_A}{G I_{pA}} = \frac{T_A}{k_{tA}} = \frac{T_0}{k_{tA} + k_{tB}}$$

Observamos, por fim, que este problema é exatamente equivalente ao anterior, podendo ser resolvido da mesma maneira apresentada antes:



$$\equiv$$



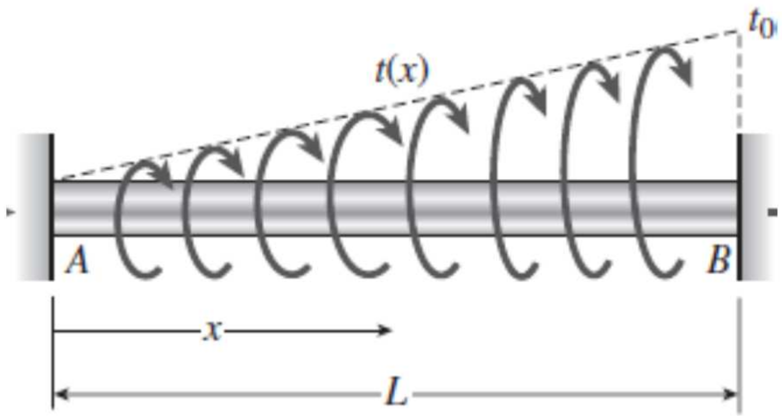
$$T_0 = T_A + T_B$$

$$\phi_{C,A} = \phi_{C,B} = \frac{T_A}{k_{tA}} = \frac{T_B}{k_{tB}} = \frac{T_0}{k_{tA} + k_{tB}}$$

2. Exercícios:

Problem 3.8-8 A circular bar AB of length L is fixed against rotation at the ends and loaded by a distributed torque $t(x)$ that varies linearly in intensity from zero at end A to t_0 at end B (see figure).

Obtain formulas for the fixed-end torques T_A and T_B.



<u>Solução em dez passos:</u>

1º Passo: apresentar o D.C.L.;

2º Passo: Determinar o grau de hiperestaticidade estrutural;

3º Passo: obter a expressão do torque distribuído ($t(x)$);

4º Passo: escrever a equação de equilíbrio global;

5º Passo: Escolher uma E.I.F. (estrutura isostática fundamental);

6º Passo: Determinar o momento de torção interno (em uma posição genérica), impondo o equilíbrio do trecho em análise;

7º Passo: Determinar o ângulo de giro de A em relação a B para a E.I.F. escolhida;

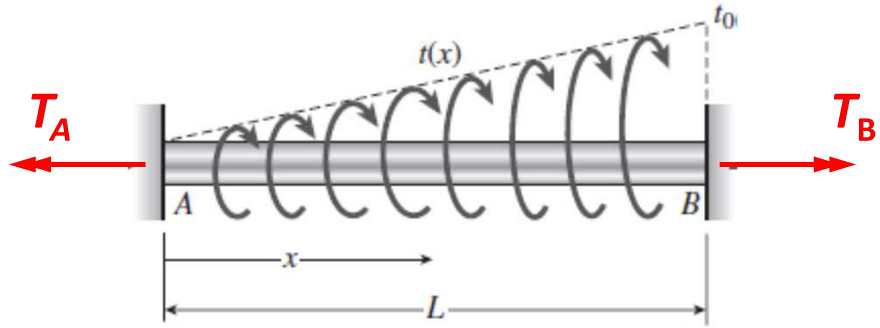
8º Passo: impor a compatibilidade de rotações entre a E.I.F. e a estrutura hiperestática original;

9º Passo: determinar o torque de reação da E.I.F. utilizando a equação de equilíbrio global;

10º Passo: apresentar o D.C.L. final.

Solução:

1º Passo: apresentar o D.C.L.



2º Passo: Determinar o grau de hiperestaticidade estrutural: $g = 2 - 1 = 1$

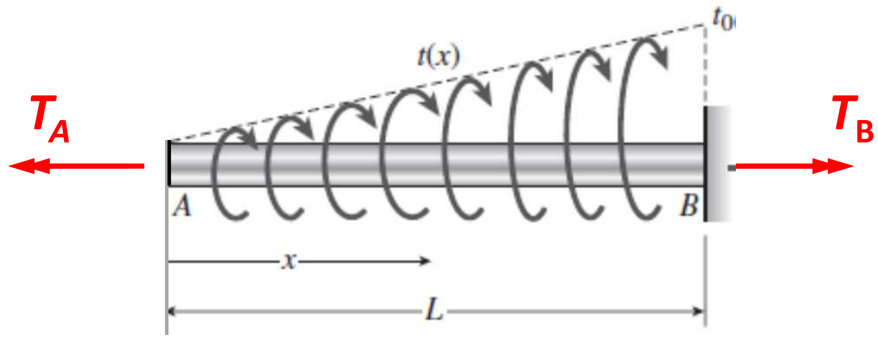
3º Passo: obter a expressão do torque distribuído ($t(x)$): $t(x) = t_0 \dfrac{x}{L}$

4º Passo: escrever a equação de equilíbrio global:

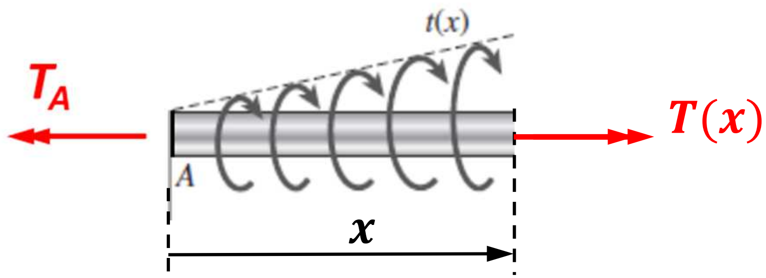
$$T_A + \int_0^L t_0 \left(\frac{x}{L}\right) dx = T_B \quad \Leftrightarrow \quad T_A + \frac{t_0 L}{2} = T_B$$

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

5º Passo: Escolher uma E.I.F. (estrutura isostática fundamental), liberando uma das reações (T_A ou T_B). Optando por T_A, p.ex., teremos a seguinte E.I.F.:



6º Passo: Determinar o momento de torção interno (em uma posição genérica), impondo o equilíbrio do trecho em análise:



$$T_A + \int_0^x t_0 \left(\frac{x}{L}\right) dx = T(x)$$

$$T(x) = T_A + \frac{t_0 x^2}{2L}$$

7º Passo: Determinar o ângulo de giro de A em relação a B para a E.I.F. escolhida:

$$\phi_{A,B} = \int_0^L \frac{T(x)}{GI_p} dx = \frac{1}{GI_p} \int_0^L \left(T_A + \frac{t_0 x^2}{2L} \right) dx = \frac{1}{GI_p} \left(T_A L + \frac{t_0 L^2}{6} \right)$$

8º Passo: impor a compatibilidade de rotações entre a E.I.F. e a estrutura hiperestática original:

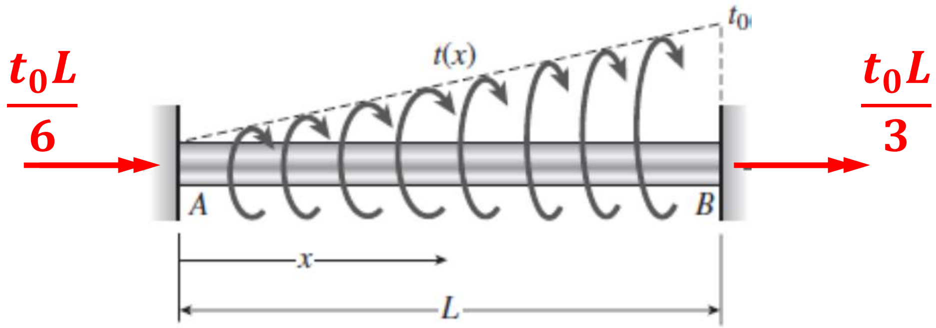
$$\phi_{A,B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_A = -\frac{t_0 L}{6}$$

Obs: O sinal negativo indica apenas que o sentido arbitrado para T_A no D.C.L. deve ser invertido.

9º Passo: determinar a reação T_B utilizando a equação de equilíbrio:

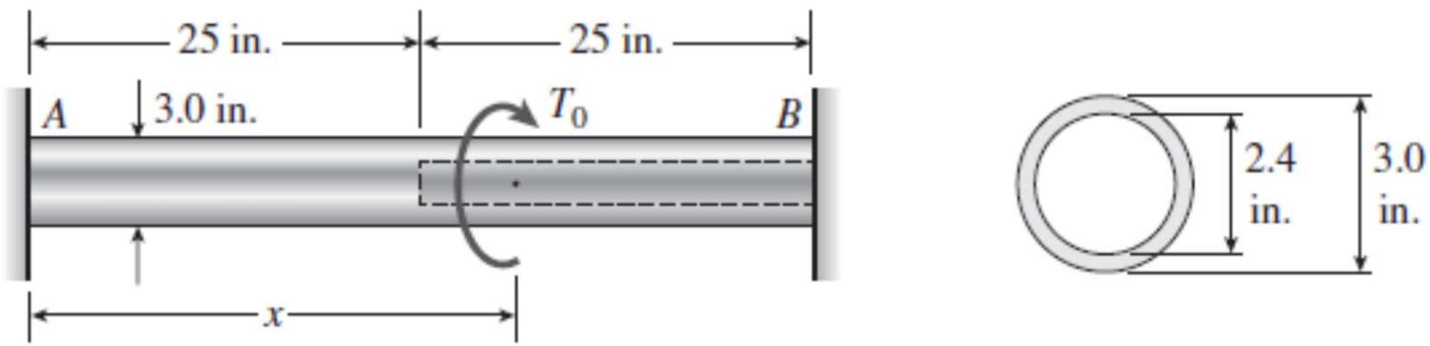
$$T_A + \frac{t_0 L}{2} = T_B \quad \Leftrightarrow \quad T_B = \frac{t_0 L}{3}$$

10º Passo: apresentar o D.C.L. final



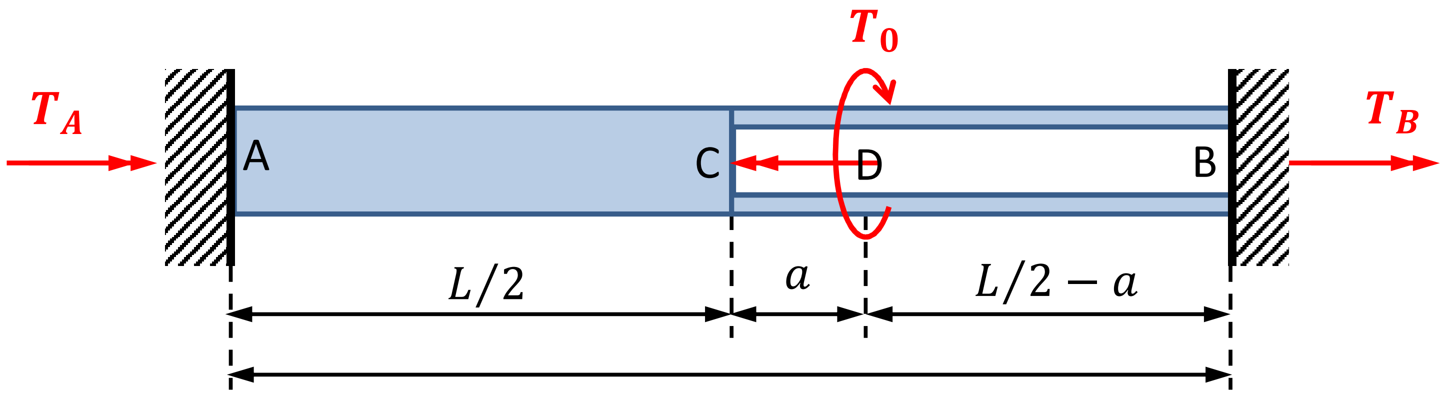
Problem 3.8-9 A circular bar AB with ends fixed against rotation has a hole extending for half of its length (see figure). The outer diameter of the bar is $d_2 = 3.0$ in. and the diameter of the hole is $d_1 = 2.4$ in. The total length of the bar is $L = 50$ in.

At what distance x from the left-hand end of the bar should a torque T_0 be applied so that the reactive torques at the supports will be equal?



Solução:

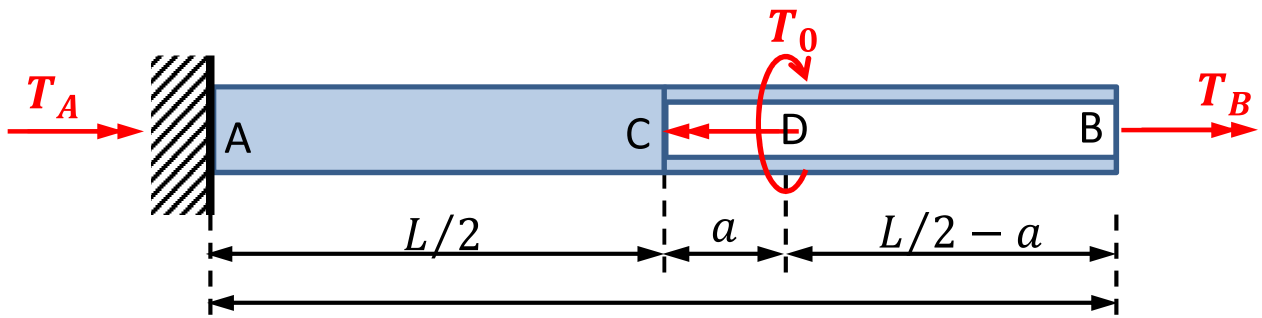
Notamos que a porção mais rígida é a responsável por um maior torque de reação. Se o torque fosse aplicado em $x = L/2$, por exemplo, teríamos $|T_A| > |T_B|$, dado que $I_{pA} > I_{pB}$. Logo, é certo que o torque deve ser aplicado a uma distância maior do que $L/2$ para que os torques de reação sejam iguais. O D.C.L. fica então:



$$g = 2 - 1 = 1$$

$$T_A + T_B = T_0$$

Liberando o torque reativo em B, obtemos a E.I.F.:



$$\phi_{B,A} = \phi_{B,D} + \phi_{D,C} + \phi_{C,A} = \frac{T_B(L/2 - a)}{GI_{pB}} + \frac{(T_B - T_0)a}{GI_{pB}} + \frac{(T_B - T_0)\,L/2}{GI_{pA}} = 0$$

$$\frac{T_B L}{2}\left(\frac{1}{I_{pA}} + \frac{1}{I_{pB}}\right) = T_0\left(\frac{a}{I_{pB}} + \frac{L}{2I_{pA}}\right)$$

Como devemos ter $T_B = T_0/2$, virá:

$$\frac{T_0 L}{4}\left(\frac{1}{I_{pA}}+\frac{1}{I_{pB}}\right)=T_0\left(\frac{a}{I_{pB}}+\frac{L}{2I_{pA}}\right)$$

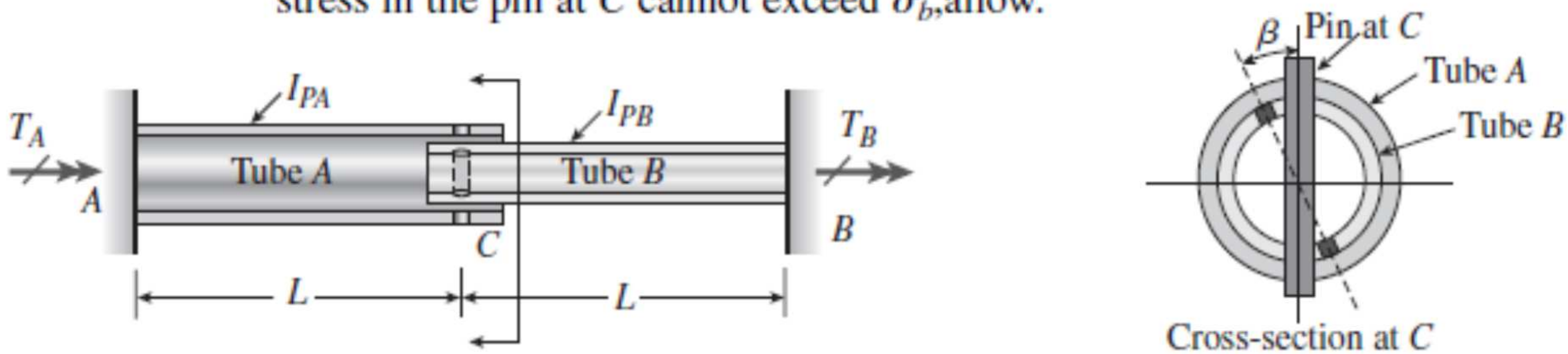
$$\frac{a}{L}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{I_{pB}}{I_{pA}}\right)$$

Como: $$\frac{I_{pB}}{I_{pA}}=\frac{d_2^4-d_1^4}{d_2^4}=1-\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4=1-\left(\frac{2{,}4}{3{,}0}\right)^4\cong 0{,}5904$$

Resulta: $$\frac{a}{L}=0{,}1024 \quad \Longleftrightarrow \quad a=5{,}12\ in$$

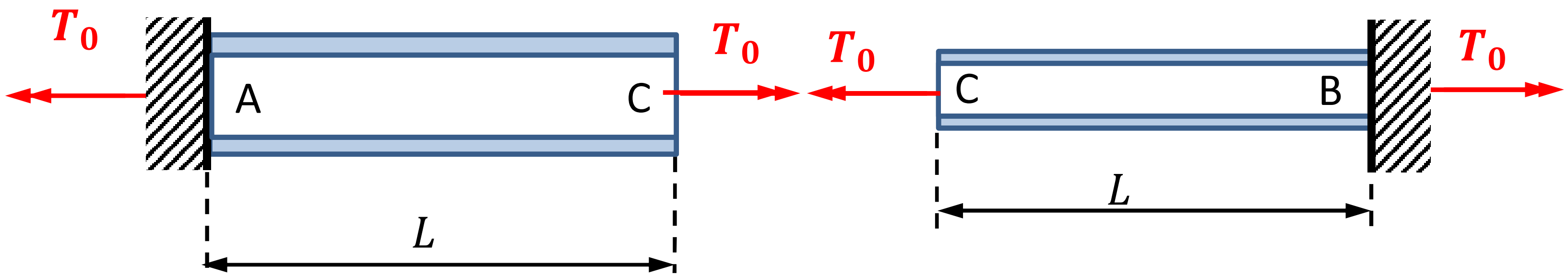
Problem 3.8-16 A hollow circular tube A (outer diameter d_A, wall thickness t_A) fits over the end of a circular tube B (d_B, t_B), as shown in the figure. The far ends of both tubes are fixed. Initially, a hole through tube B makes an angle β with a line through two holes in tube A. Then tube B is twisted until the holes are aligned, and a pin (diameter d_p) is placed through the holes. When tube B is released, the system returns to equilibrium. Assume that G is constant.

(a) Use superposition to find the reactive torques T_A and T_B at the supports.
(b) Find an expression for the maximum value of β if the shear stress in the pin, τ_p, cannot exceed $\tau_{p,allow}$.
(c) Find an expression for the maximum value of β if the shear stress in the tubes, τ_t, cannot exceed $\tau_{t,allow}$.
(d) Find an expression for the maximum value of β if the bearing stress in the pin at C cannot exceed $\sigma_{b,allow}$.



Solução:

a) Após a liberação do tubo B, os dois tubos (A e B) estarão submetidos a um mesmo momento de torção. A soma dos ângulos de giro de cada tubo (em relação às respectivas extremidades engastadas) deve igualar o ângulo β (desde que $\beta \ll 1$). Assim:



$$\phi_{C,A} = \frac{T_0 L}{G I_{pA}} \qquad \phi_{C,B} = \frac{T_0 L}{G I_{pB}}$$

$$\phi_{C,A} + \phi_{C,A} = \beta$$

$$\beta \leq \frac{\pi}{4}\left(\frac{\tau_{p,adm}}{G}\right)\left(\frac{I_{pA}+I_{pB}}{I_{pA}I_{pB}}\right)d_p^2 L d_B$$

$$\beta_{máx} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\tau_{p,adm}}{G}\right)\left(\frac{I_{pA}+I_{pB}}{I_{pA}I_{pB}}\right)d_p^2 L d_B$$

c) Para que a máxima tensão de cisalhamento nos tubos não ultrapasse a tensão de cisalhamento admissível do material devemos ter:

$$\tau_{máx} \leq \tau_{t,adm}$$

$$\tau_{máx} = máx\left\{\frac{T_0 d_A}{2I_{pA}}, \frac{T_0 d_B}{2I_{pB}}\right\} = \frac{T_0}{2} máx\left\{\frac{d_A}{I_{pA}}, \frac{d_B}{I_{pB}}\right\}$$

$$\tau_{máx} = \frac{G\beta}{2L}\left(\frac{I_{pA}I_{pB}}{I_{pA}+I_{pB}}\right) máx\left\{\frac{d_A}{I_{pA}}, \frac{d_B}{I_{pB}}\right\}$$

$$\tau_{máx} = \frac{G\beta}{2L}\left(\frac{I_{pA}I_{pB}}{I_{pA}+I_{pB}}\right) máx\left\{\frac{d_A}{I_{pA}}, \frac{d_B}{I_{pB}}\right\} \leq \tau_{t,adm}$$

$$\beta_{máx} = \left(\frac{\tau_{t,adm}}{G}\right)\left(\frac{I_{pA}+I_{pB}}{I_{pA}I_{pB}}\right)\frac{2L}{máx\left\{\frac{d_A}{I_{pA}}, \frac{d_B}{I_{pB}}\right\}}$$

d) Para que a tensão de esmagamento máxima nos tubos não ultrapasse a tensão admissível do material ($\sigma_{b,adm}$), devemos ter:

$$\sigma_{b,máx} = máx\left\{\frac{F_{bA}}{d_p t_A}, \frac{F_{bB}}{d_p t_B}\right\} \leq \sigma_{b,adm}$$

onde: $F_{bA} = \frac{T_0}{(d_A - t_A)}$ $\qquad$ $F_{bB} = \frac{T_0}{(d_B - t_B)}$

Logo: $$máx\left\{\frac{T_0}{(d_A-t_A)d_pt_A},\frac{T_0}{(d_B-t_B)d_pt_B}\right\}\leq\sigma_{b,adm}$$

$$\frac{T_0}{d_p}máx\left\{\frac{1}{(d_A-t_A)t_A},\frac{1}{(d_B-t_B)t_B}\right\}\leq\sigma_{b,adm}$$

$$\frac{G\beta}{Ld_p}\left(\frac{I_{pA}I_{pB}}{I_{pA}+I_{pB}}\right)máx\left\{\frac{1}{(d_A-t_A)t_A},\frac{1}{(d_B-t_B)t_B}\right\}\leq\sigma_{b,adm}$$

$$\beta\leq\left(\frac{\sigma_{b,adm}}{G}\right)\left(\frac{I_{pA}+I_{pB}}{I_{pA}I_{pB}}\right)\frac{Ld_p}{máx\left\{\frac{1}{(d_A-t_A)t_A},\frac{1}{(d_B-t_B)t_B}\right\}}$$

$$\beta_{máx}=\left(\frac{\sigma_{b,adm}}{G}\right)\left(\frac{I_{pA}+I_{pB}}{I_{pA}I_{pB}}\right)\frac{Ld_p}{máx\left\{\frac{1}{(d_A-t_A)t_A},\frac{1}{(d_B-t_B)t_B}\right\}}$$

Referências:

[1] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, cap.3