



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

*PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I*

*Aula #12*

*Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.*

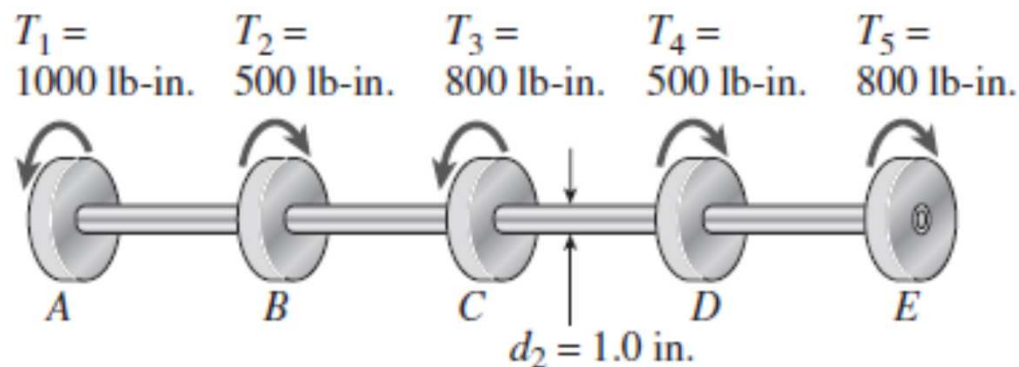
*09/05/2023*



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

**Problem 3.4-5** A hollow tube  $ABCDE$  constructed of monel metal is subjected to five torques acting in the directions shown in the figure. The magnitudes of the torques are  $T_1 = 1000$  lb-in.,  $T_2 = T_4 = 500$  lb-in., and  $T_3 = T_5 = 800$  lb-in. The tube has an outside diameter  $d_2 = 1.0$  in. The allowable shear stress is 12,000 psi and the allowable rate of twist is  $2.0^\circ/\text{ft}$ .

Determine the maximum permissible inside diameter  $d_1$  of the tube.

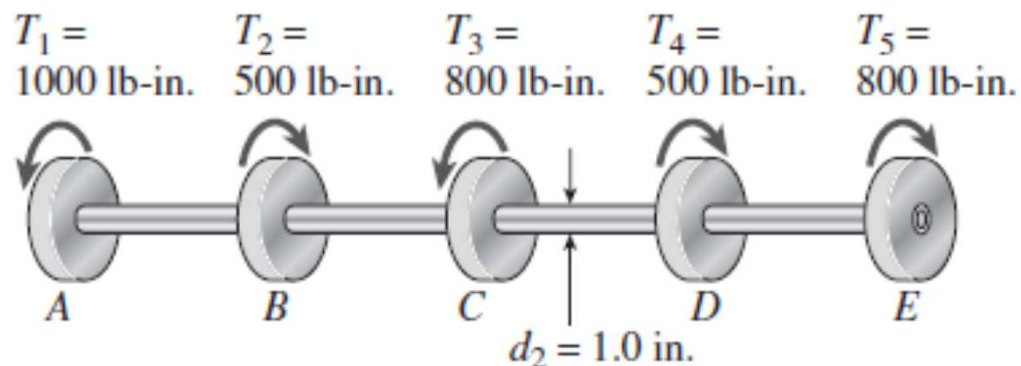


Answer:  $d_{1,\text{máx}} = 0,818$  in



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

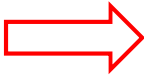
Solução:



Momentos de torção em cada segmento:

Segmento AB:  $T_{AB} = -1000 \text{ lbf.in}$

Segmento BC:  $T_{BC} = -500 \text{ lbf.in}$

Segmento CD:  $T_{CD} = -1300 \text{ lbf.in}$   *Trecho CD é o mais solicitado!*

Segmento DE:  $T_{DE} = -800 \text{ lbf.in}$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Devemos ter:

$$|\tau_{m\acute{a}x}| = \frac{|T_{m\acute{a}x}|}{I_p} \frac{d_2}{2} \leq \tau_{adm} \Leftrightarrow I_p \geq \frac{|T_{m\acute{a}x}|}{\tau_{adm}} \frac{d_2}{2} = \frac{1300}{12000} \times 0,5 = 0,054167 \text{ in}^4$$

$$|\theta_{m\acute{a}x}| = \frac{|T_{m\acute{a}x}|}{GI_p} \leq \theta_{adm} \Leftrightarrow I_p \geq \frac{|T_{m\acute{a}x}|}{G\theta_{adm}} = \frac{1300 \times 12}{9,5 \times 10^6 \times (2\pi/180)} = 0,04704 \text{ in}^4$$

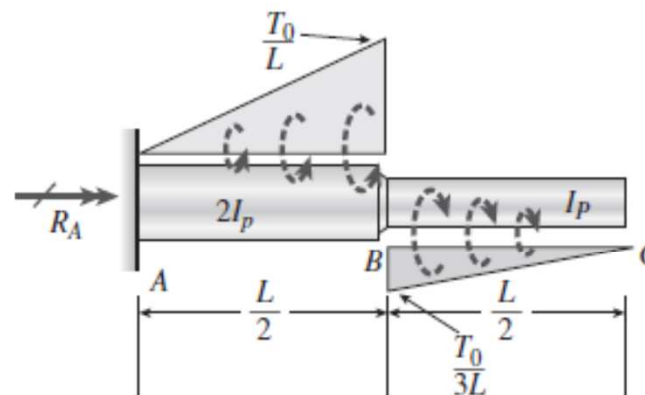
O requisito de resistência é o que rege o dimensionamento. Assim, para que o diâmetro interno seja o maior possível, devemos ter o menor momento de inércia:

$$I_p = \frac{\pi}{32} (d_2^4 - d_1^4) = 0,054167 \text{ in}^4 \Rightarrow d_{1,m\acute{a}x} = 0,818 \text{ in}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Problem 3.4-18** A nonprismatic bar  $ABC$  of solid circular cross section is loaded by distributed torques (see figure). The intensity of the torques, that is, the torque per unit distance, is denoted  $t(x)$  and varies linearly from zero at  $A$  to a maximum value  $T_0/L$  at  $B$ . Segment  $BC$  has linearly distributed torque of intensity  $t(x) = T_0/3L$  of opposite sign to that applied along  $AB$ . Also, the polar moment of inertia of  $AB$  is twice that of  $BC$ , and the shear modulus of elasticity of the material is  $G$ .



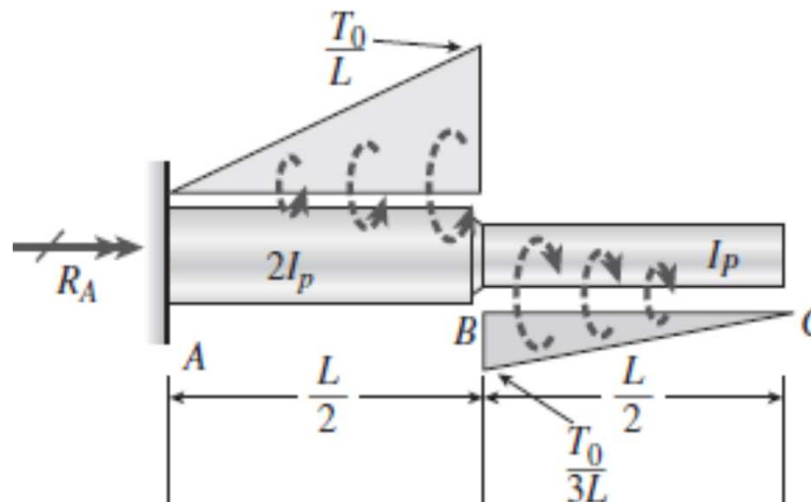
- Find reaction torque  $R_A$ .
- Find internal torsional moments  $T(x)$  in segments  $AB$  and  $BC$ .
- Find rotation  $\phi_C$ .
- Find the maximum shear stress  $\tau_{\max}$  and its location along the bar.
- Draw the torsional moment diagram (TMD:  $T(x)$ ,  $0 \leq x \leq L$ ).

Answers: a)  $R_A = -T_0/6$ , b)  $T_1(x) = T_0 \left( \frac{1}{6} - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right)$  ( $0 \leq x \leq L/2$ ) (trecho AB) e  $T_2(x) = -\frac{T_0}{3} \left( \frac{x}{L} - 1 \right)^2$  ( $L/2 \leq x \leq L$ ) (trecho BC), c)  $\phi_{C,A} = \frac{1}{144} \frac{T_0 L}{G I_p}$  (anti-hor.), d)  $\tau_{\max,1} \cong 0,5047 \frac{T_0}{d^3}$  (junto à seção A)



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Solução:



$$a) \quad T_A = \frac{1}{2} \left( \frac{T_0}{3L} \times \frac{L}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{T_0}{L} \times \frac{L}{2} \right) = \frac{T_0}{12} - \frac{T_0}{4} = -\frac{T_0}{6}$$

b) Os torques distribuídos em cada trecho são (em valores absolutos):

No trecho AB ( $0 \leq x < L/2$ ):

$$t_1(x) = \frac{T_0}{L} \frac{2x}{L} = \frac{2T_0 x}{L^2}$$

No trecho BC ( $L/2 < x \leq L$ ):

$$t_2(x) = \frac{T_0}{3L} \frac{(L-x)}{L/2} = \frac{2T_0(L-x)}{3L^2}$$



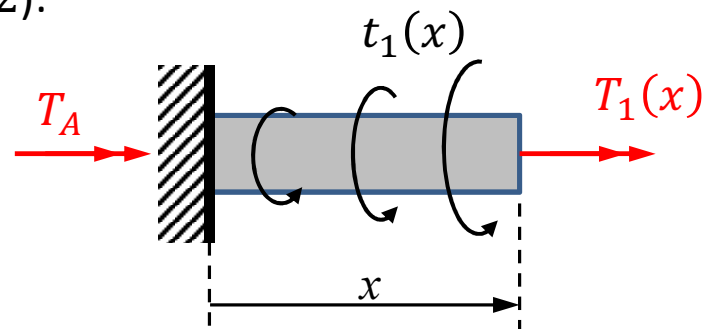
**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Logo, para o trecho AB ( $0 \leq x < L/2$ ):

$$T_1(x) + T_A + \int_0^x t_1(\xi) d\xi = 0$$

$$T_1(x) = -T_A - \int_0^x \frac{2T_0\xi}{L^2} d\xi$$

$$T_1(x) = -T_A - \int_0^x \frac{2T_0\xi}{L^2} d\xi = \frac{T_0}{6} - \frac{T_0x^2}{L^2} = T_0 \left( \frac{1}{6} - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right) \quad (0 \leq x \leq L/2)$$



Valores extremos no trecho:

$$T_1(0) = T_0/6 \quad T_1(L/2) = -T_0/12$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

E para o trecho BC ( $L/2 < x \leq L$ ):

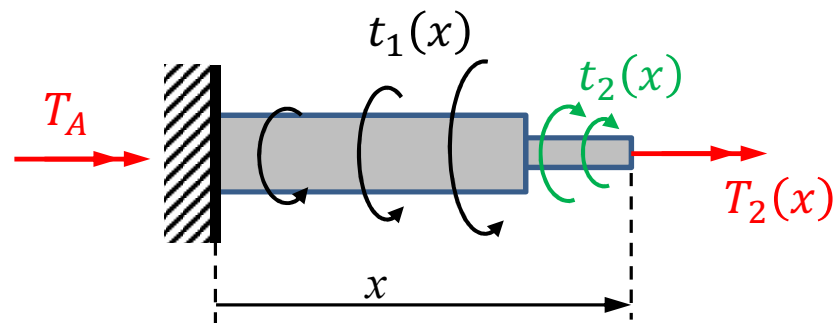
$$T_2(x) + T_A + \int_0^{L/2} t_1(\xi) d\xi = \int_{L/2}^x t_2(\xi) d\xi$$

$$T_2(x) = -T_A - \int_0^{L/2} \frac{2T_0\xi}{L^2} d\xi + \int_{L/2}^x \frac{2T_0(L-\xi)}{3L^2} d\xi$$

$$T_2(x) = \frac{T_0}{6} - \frac{T_0}{4} + \frac{2T_0}{3L^2} \left( L\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) \Big|_{L/2}^x = -\frac{T_0}{3} \left( \frac{x}{L} - 1 \right)^2 \quad (L/2 \leq x \leq L)$$

Valores extremos no trecho:

$$T_2(L/2) = -T_0/12 \quad T_2(L) = 0$$







**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

c) A rotação de C em relação a A é:  $\phi_{C,A} = \phi_{C,B} + \phi_{B,A}$

$$\phi_{C,B} = \int_{L/2}^L \frac{T_2(x)}{GI_p} dx = -\frac{T_0}{3GI_p} \int_{L/2}^L \left(\frac{x}{L} - 1\right)^2 dx = -\frac{1}{72} \frac{T_0 L}{GI_p}$$

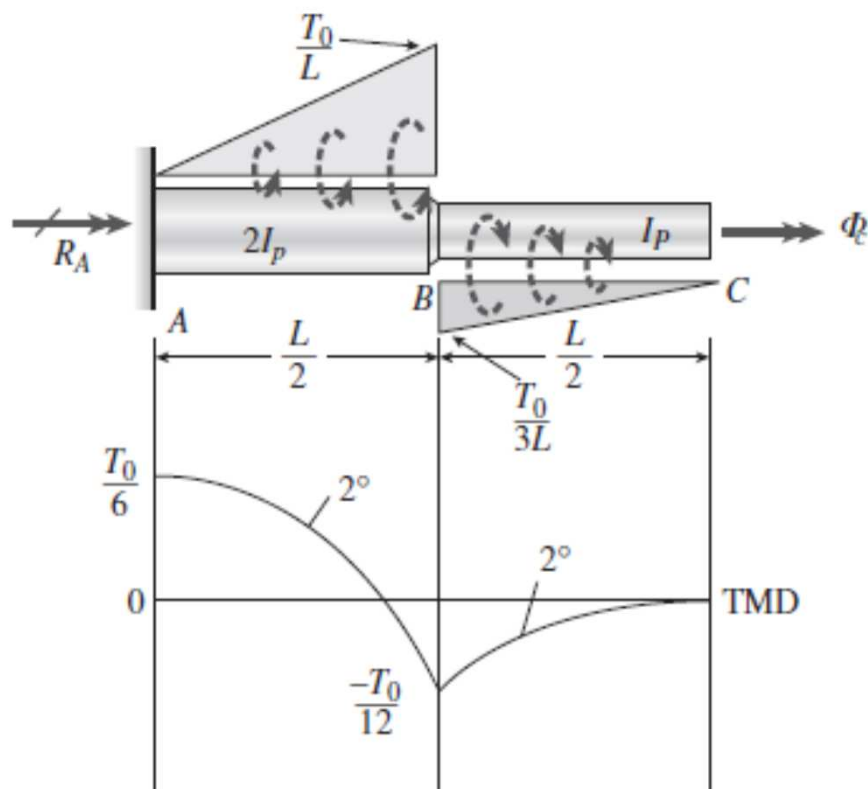
$$\phi_{B,A} = \int_0^{L/2} \frac{T_1(x)}{2GI_p} dx = \frac{T_0}{2GI_p} \int_0^{L/2} \left(\frac{1}{6} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right) dx = \frac{1}{48} \frac{T_0 L}{GI_p}$$

$$\phi_{C,A} = \frac{1}{144} \frac{T_0 L}{GI_p} \quad (\text{giro no sentido anti-horário})$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

e) Antes de resolver o item (d) (determinação da máxima tensão cisalhante), é melhor resolver o item (e) (obtenção do D.M.T.):



Trecho AB:

$$T_1(x) = T_0 \left( \frac{1}{6} - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right)$$

Trecho BC:

$$T_2(x) = -\frac{T_0}{3} \left( \frac{x}{L} - 1 \right)^2$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

d) Do item anterior, vemos que as seções transversais mais solicitadas são:

- A seção B (do trecho BC), onde  $|T_{máx,2}| = T_0/12$ ;
- A seção A (do trecho AB), onde  $|T_{máx,1}| = T_0/6$ .

Se denotarmos por  $d_2 = d$  o diâmetro do segmento BC, o diâmetro  $d_1$  do trecho AB será tal que:

$$I_{p1} = 2I_{p2} \Leftrightarrow \frac{\pi d_1^4}{32} = 2 \frac{\pi d^4}{32} \Leftrightarrow d_1 = \sqrt[4]{2}d$$

Assim, a tensão cisalhante máxima no trecho AB será (em valor absoluto):

$$\tau_{máx,1} = \frac{16|T_{máx,1}|}{\pi d_1^3} = \frac{16T_0}{6} \frac{1}{\pi \sqrt[4]{8}d^3} \cong 0,5047 \frac{T_0}{d^3} \quad \text{(*maior tensão!!*)}$$

E a tensão cisalhante máxima no trecho BC será (em valor absoluto):

$$\tau_{máx,2} = \frac{16|T_{máx,2}|}{\pi d^3} = \frac{16T_0}{12} \frac{1}{\pi d^3} \cong 0,4244 \frac{T_0}{d^3}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Problem 3.5-2** A hollow steel bar ( $G = 80 \text{ GPa}$ ) is twisted by torques  $T$  (see figure). The twisting of the bar produces a maximum shear strain  $\gamma_{\max} = 640 \times 10^{-6} \text{ rad}$ . The bar has outside and inside diameters of 150 mm and 120 mm, respectively.

- (a) Determine the maximum tensile strain in the bar.
- (b) Determine the maximum tensile stress in the bar.
- (c) What is the magnitude of the applied torques  $T$ ?



Answers: a)  $\varepsilon_1 = 320 \mu$ ,

b)  $\sigma_1 = 51,2 \text{ MPa}$ ,

c)  $T = 20,03 \text{ kNm}$

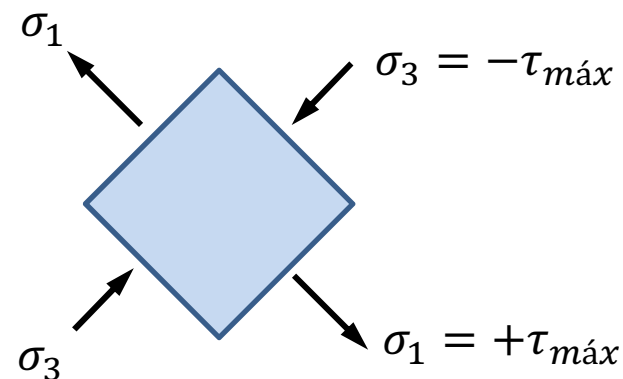
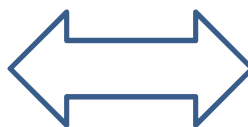
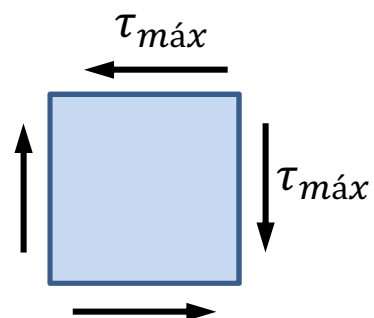
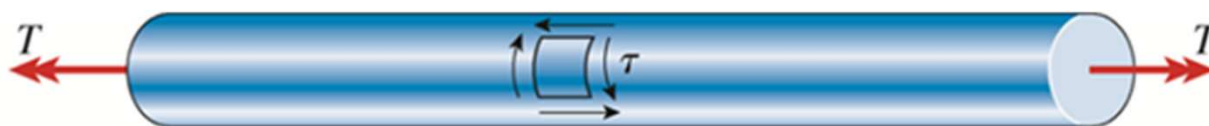


*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

Solução:

A máxima tensão de cisalhamento no eixo será:

$$\tau_{\max} = G\gamma_{\max} = 80000 \times 640 \times 10^{-6} \text{MPa} = 51,2 \text{MPa}$$





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

a) O máximo alongamento ocorrerá na mesma direção da tensão  $\sigma_1$  e vale:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{\tau_{máx}}{E} - \nu \frac{(-\tau_{máx})}{E} = \frac{(1 + \nu)}{E} \tau_{máx} = \frac{\tau_{máx}}{2G} = \frac{\gamma_{máx}}{2}$$

Logo: 
$$\varepsilon_1 = \frac{640 \times 10^{-6}}{2} = 320 \mu$$

b) A máxima tensão normal é  $\sigma_1 = +\tau_{máx} = 51,2 \text{ MPa}$ .

c) O torque aplicado pode ser determinado pela relação:

$$\tau_{máx} = \frac{T d_o}{I_p 2} \Leftrightarrow T = \frac{2I_p \tau_{máx}}{d_o} = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4) \tau_{máx}}{16d_o} = \frac{\pi(150^4 - 120^4) 51,2}{16 \times 150} \text{ Nmm}$$

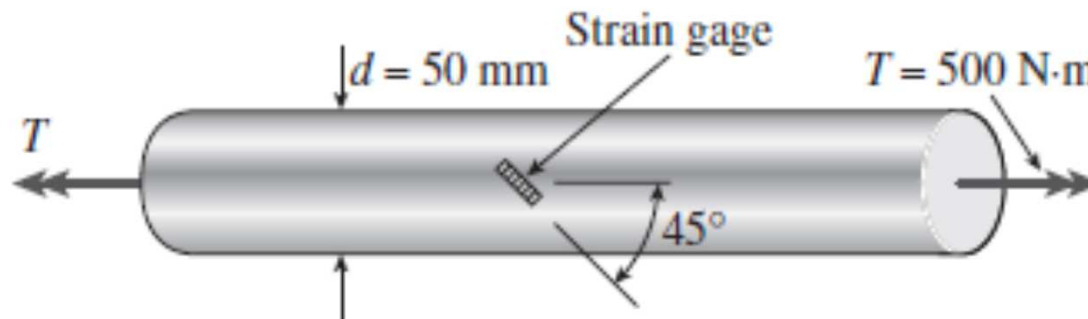
$$T = 20,03 \text{ kNm}$$



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

**Problem 3.5-4** A solid circular bar of diameter  $d = 50$  mm (see figure) is twisted in a testing machine until the applied torque reaches the value  $T = 500$  N·m. At this value of torque, a strain gage oriented at  $45^\circ$  to the axis of the bar gives a reading  $\epsilon = 339 \times 10^{-6}$ .

What is the shear modulus  $G$  of the material?



Answer:  $G \cong 30$  GPa



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Solução:

Aproveitando os resultados do exercício anterior, temos as seguintes relações:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{\tau_{máx}}{E} - \nu \frac{(-\tau_{máx})}{E} = \frac{(1 + \nu)}{E} \tau_{máx} = \frac{\tau_{máx}}{2G} = \frac{8T}{G\pi d^3}$$

Logo: 
$$G = \frac{8T}{\varepsilon_1 \pi d^3} = \frac{8 \times 5 \times 10^5 \text{ Nmm}}{339 \times 10^{-6} \times \pi \times 50^3 \text{ mm}^3} = 30047 \text{ MPa}$$

Resp.:  $G \cong 30 \text{ GPa}$

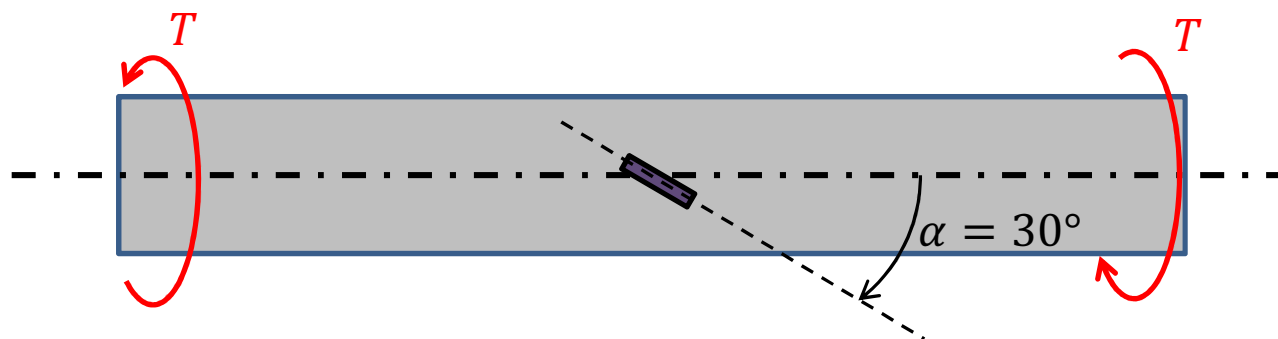




**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Complemento ao exercício 3.5-4:

Para os mesmos dados do problema anterior (mesmo diâmetro, mesmo material e mesmo torque aplicado), determine qual seria a deformação registrada pelo extensômetro se o mesmo fosse colado de modo a formar um ângulo de  $-30^\circ$  com o eixo longitudinal, como indicado na figura abaixo:

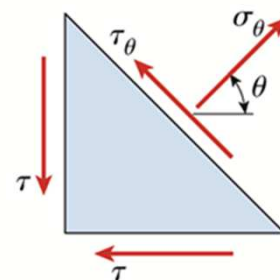
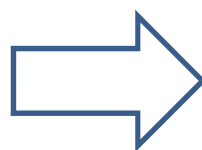
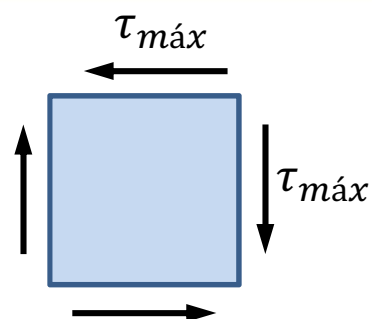
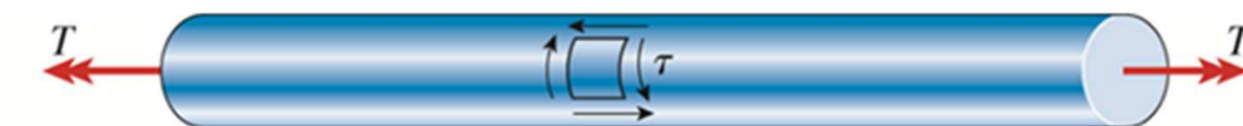


Resp.:  $\varepsilon \cong 294 \mu$



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

Solução:



(b)

$$|\tau_{\max}| = \frac{16T}{\pi d^3}$$

$$\tau = -|\tau_{\max}| = -20,37 \text{ MPa}$$

Como demonstrado na aula 11, impondo o equilíbrio de forças no elemento dado acima (à direita), encontramos:

$$\sigma_{\theta} = \tau \operatorname{sen}(2\theta)$$

$$\tau_{\theta} = \tau \cos(2\theta)$$



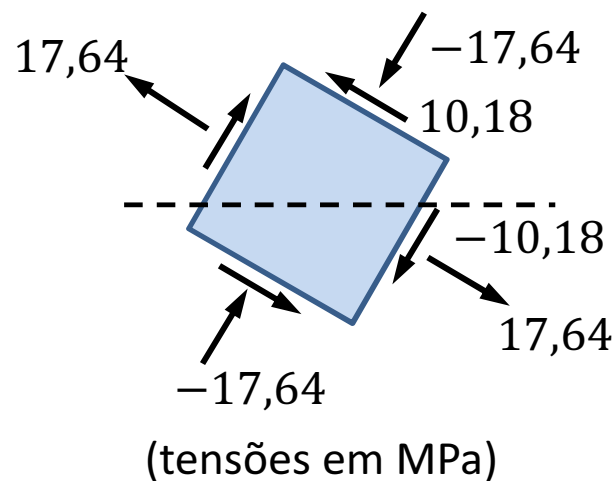
**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Em particular, para  $\theta_1 = 60^\circ$ :

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_{\theta_1} = -20,37 \sin(120^\circ) = -17,64 \text{ MPa} \\ \tau_{\theta_1} = -20,37 \cos(120^\circ) = +10,18 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

E para  $\theta_2 = -30^\circ$ :

$$\left[ \begin{array}{l} \sigma_{\theta_2} = -20,37 \sin(-60^\circ) = +17,64 \text{ MPa} \\ \tau_{\theta_2} = -20,37 \cos(-60^\circ) = -10,18 \text{ MPa} \end{array} \right.$$



$$\varepsilon_{\theta_2} = \frac{\sigma_{\theta_2}}{E} - \nu \frac{\sigma_{\theta_1}}{E} = \frac{17,64 \text{ MPa} (1 + \nu)}{E}$$

$$\varepsilon_{\theta_2} = \frac{17,64 \text{ MPa}}{2G} \cong \frac{17,64 \text{ MPa}}{2 \times 30047 \text{ MPa}} \cong 294 \mu$$