



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #11

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

05/05/2023



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Tensões e Deformações em Cisalhamento Puro (3.5)
2. Relação entre os Módulos de Elasticidade E e G (3.6)



1. Tensões e Deformações em Cisalhamento Puro

Quando uma barra de seção circular, cheia ou vazada, é submetida à torção uniforme, tensões cisalhantes agem nas seções transversais e em planos longitudinais como indicado nas figuras abaixo:

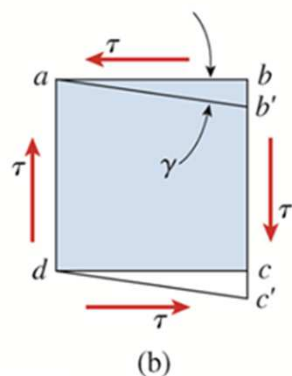
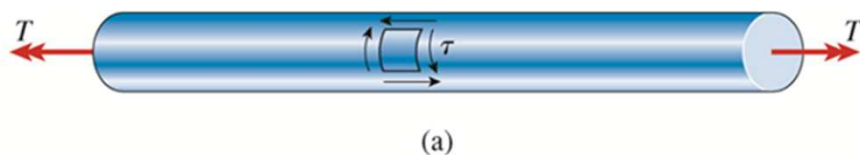


FIG. 3-6 Shear stresses in a circular bar in torsion

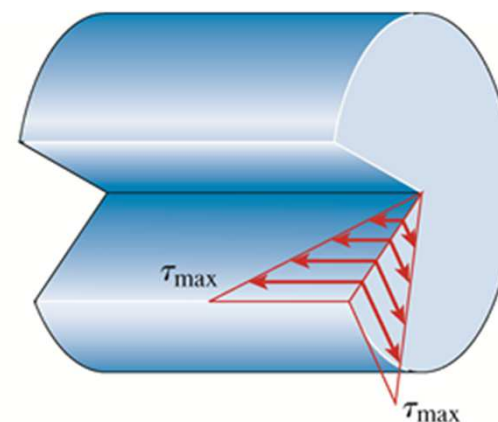
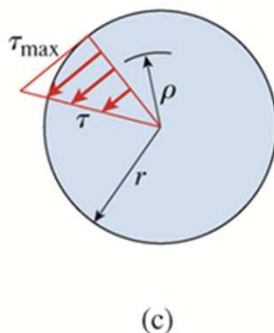


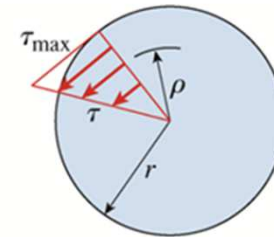
FIG. 3-7 Longitudinal and transverse shear stresses in a circular bar subjected to torsion



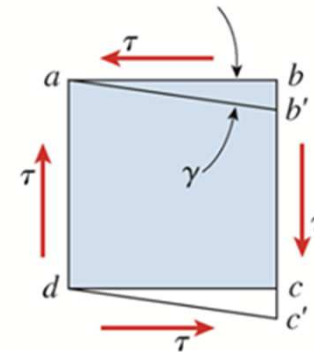
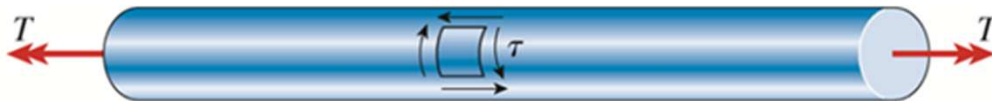
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Os pontos mais solicitados neste caso são os pontos que se encontram na superfície da barra, já que a tensão de cisalhamento aumenta com a distância do ponto ao centro de torção de acordo com as fórmulas deduzidas na aula anterior:

$$\tau = G\theta\rho = \frac{T\rho}{I_p} \quad (0 \leq \rho \leq r)$$



O estado de tensões em um ponto qualquer da superfície é composto apenas por tensões de cisalhamento e, portanto, damos a ele o nome de estado de cisalhamento puro:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Veremos, porém, que em outros planos (que não os indicados na figura) surgem outras tensões no elemento. Para determinarmos estas tensões vamos partir do estado de tensões indicado abaixo (estado de cisalhamento puro) e tomar um plano inclinado cujo versor normal é paralelo ao plano tangente à superfície da barra e forma um ângulo θ com o eixo longitudinal da mesma (vide slide 6):

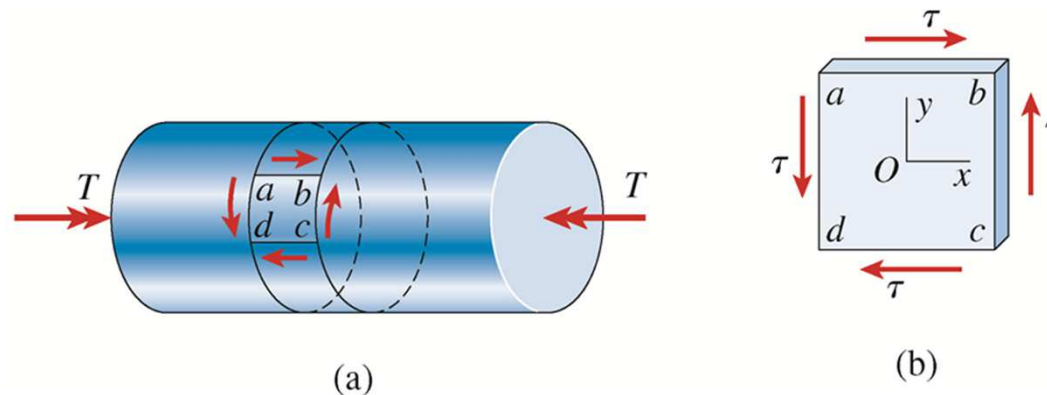
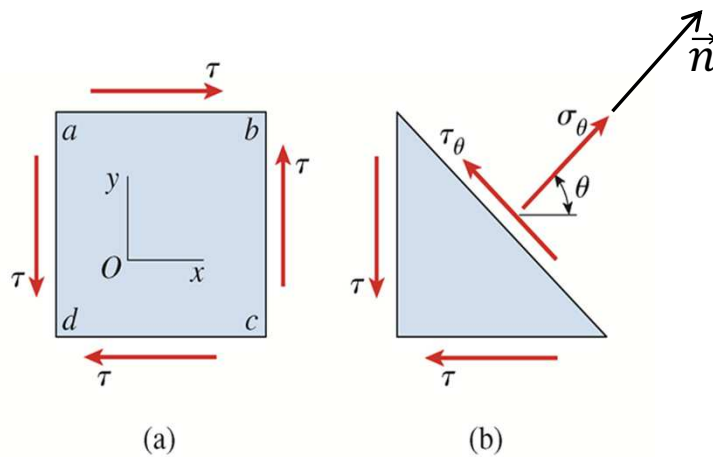


FIG. 3-20 Stresses acting on a stress element cut from a bar in torsion (pure shear)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

FIG. 3-21 Analysis of stresses on inclined planes: (a) element in pure shear, (b) stresses acting on a triangular stress element, and (c) forces acting on the triangular stress element (free-body diagram)



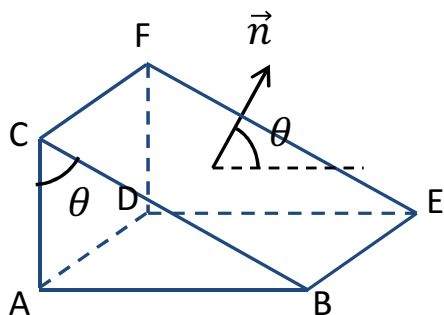
Obs: Vide convenção de sinais – Aula #07 (slide 7).

Para determinarmos a tensão normal (σ_θ) e a tensão cisalhante (τ_θ) atuantes no plano inclinado, basta impormos o equilíbrio de forças no elemento. É preciso notar, porém, que as áreas dos planos em que atuam as tensões diferem entre si.



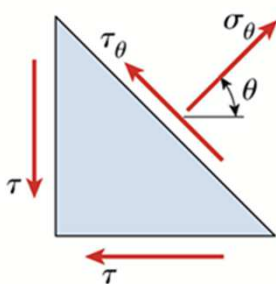
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Denotando por dA a área da plano inclinado (BEFC), é imediato verificar que as áreas do plano vertical (ADFC) e do plano horizontal (ABED) são dadas por:



$$A_{pv} = dA \cdot \cos\theta \quad (\text{área do plano vertical ADFC})$$

$$A_{ph} = dA \cdot \sin\theta \quad (\text{área do plano horizontal ABED})$$



(b)

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow (\sigma_\theta dA) \cos\theta - (\tau_\theta dA) \sin\theta = (\tau dA \sin\theta)$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow (\sigma_\theta dA) \sin\theta + (\tau_\theta dA) \cos\theta = (\tau dA \cos\theta)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

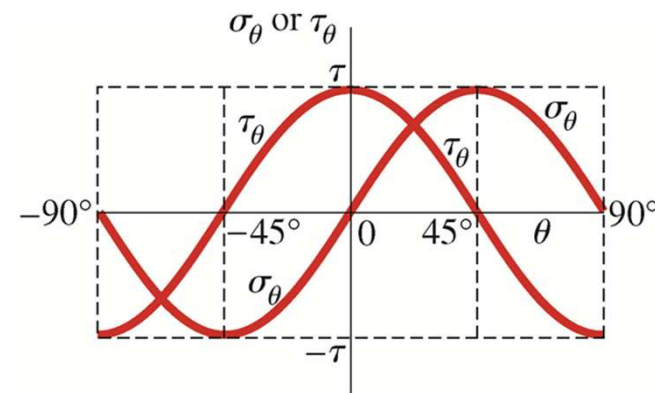
Dividindo as duas equações por dA e levando ao limite para $dA \rightarrow 0$, teremos:

$$\left[\begin{array}{l} (\sigma_\theta)\cos\theta - (\tau_\theta)\sin\theta = (\tau\sin\theta) \\ (\sigma_\theta)\sin\theta + (\tau_\theta)\cos\theta = (\tau\cos\theta) \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \tau_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau\sin\theta \\ \tau\cos\theta \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema linear nas incógnitas σ_θ e τ_θ , encontramos:

$$\sigma_\theta = 2\tau\sin\theta\cos\theta = \tau\sin(2\theta) \quad \tau_\theta = \tau(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \tau\cos(2\theta)$$

FIG. 3-22 Graph of normal stresses σ_θ and shear stresses τ_θ versus angle θ of the inclined plane





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Casos Particulares:

- 1) $\theta = 0$: $\Rightarrow \sigma_\theta = 0$ e $\tau_\theta = +\tau$
- 2) $\theta = \pi/2$: $\Rightarrow \sigma_\theta = 0$ e $\tau_\theta = -\tau$
- 3) $\theta = \pi/4$: $\Rightarrow \sigma_\theta = +\tau$ e $\tau_\theta = 0$
- 4) $\theta = -\pi/4$: $\Rightarrow \sigma_\theta = -\tau$ e $\tau_\theta = 0$

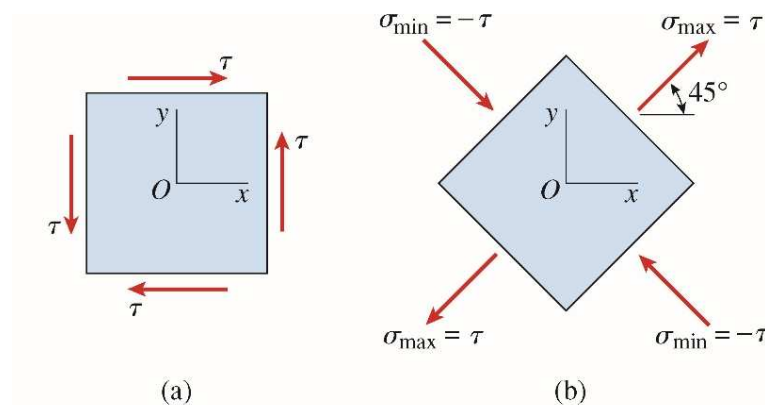
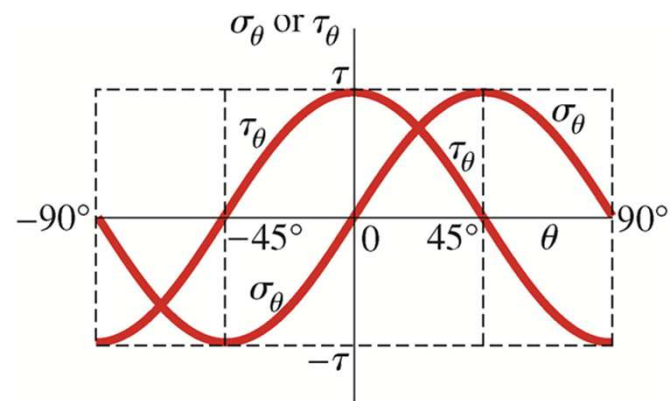


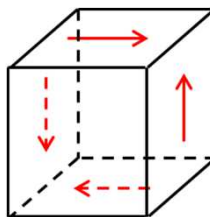
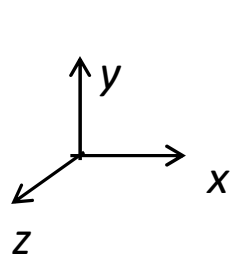
FIG. 3-23 Stress elements oriented at $\theta = 0$ and $\theta = 45^\circ$ for pure shear



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

É importante observar a existência de 2 convenções diferentes para atribuir os sinais das tensões de cisalhamento em um elemento:

1ª Convenção: vista na Aula #03 (slides 22 a 24) e revisitada brevemente abaixo:



Obs: Por essa 1ª convenção, todas as tensões apresentadas no elemento ao lado são POSITIVAS!

Nas faces de orientação positiva, as tensões cisalhantes que possuem os mesmos sentidos dos eixos coordenados são positivas, e aquelas que possuem sentidos contrários aos eixos coordenados são negativas.

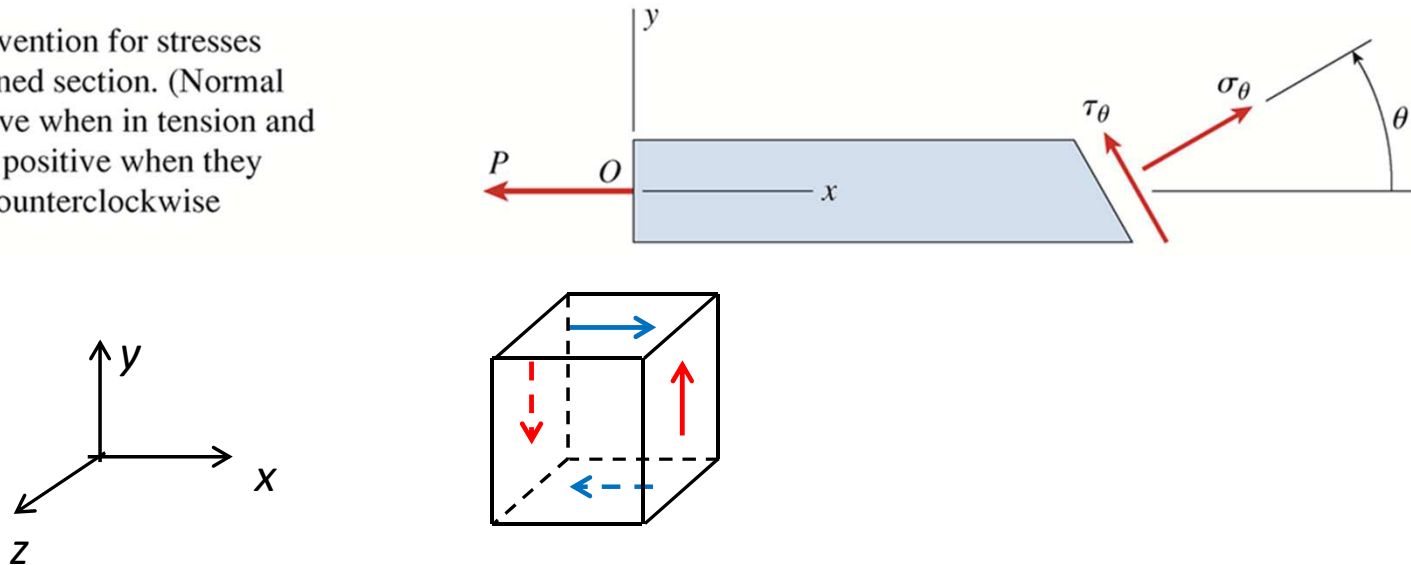
Já nas faces de orientação negativa, ocorre o contrário: as tensões cisalhantes que possuem sentidos contrários aos eixos coordenados são positivas, e aquelas que possuem os mesmos sentidos dos eixos coordenadas são negativas.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Convenção: vista na Aula #07 (slide 7) e revisitada brevemente abaixo:

FIG. 2-34 Sign convention for stresses acting on an inclined section. (Normal stresses are positive when in tension and shear stresses are positive when they tend to produce counterclockwise rotation.)



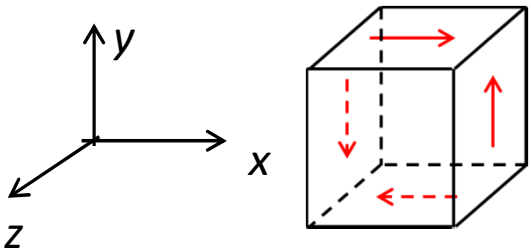
*Obs: Por essa 2ª convenção, as tensões cisalhantes indicadas pelas **setas vermelhas** no elemento acima são **POSITIVAS** (giram o elemento no sentido anti-horário) ao passo que as tensões cisalhantes indicadas pelas **setas azuis** no elemento acima são **NEGATIVAS** (giram o elemento no sentido horário). Isso permite atribuir o sentido correto das tensões (σ_θ e τ_θ) que atuam nos diferentes planos inclinados, com as equações obtidas pela imposição do equilíbrio de forças no elemento (vide slides 6 a 9 desta aula).*



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

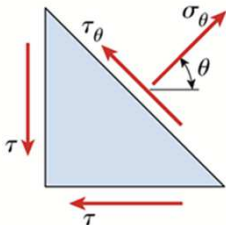
Desta forma, é importante saber quando devemos utilizar a 1ª convenção e quando devemos utilizar a 2ª convenção:

1ª Convenção: será utilizada futuramente quando representarmos o estado de tensões em cada ponto do sólido por um operador vetorial linear denominado tensor das tensões:



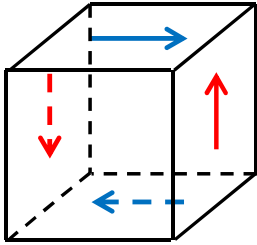
$$\tau = 10 \text{ MPa} \quad [T]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (MPa)}$$

2ª Convenção: utilizada nos casos em que o equilíbrio de forças no elemento é obtido levando em conta o efeito que a tensão cisalhante produz no elemento (girando-o no sentido anti-horário ou no sentido horário):



Equilíbrio

$$\sigma_\theta = \tau \sin(2\theta)$$

$$\tau_\theta = \tau \cos(2\theta)$$




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

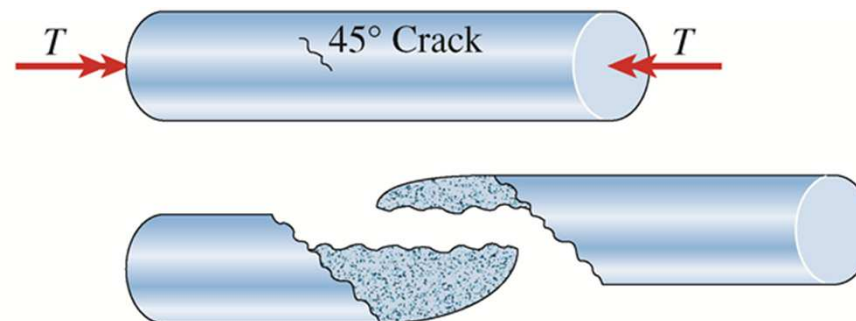
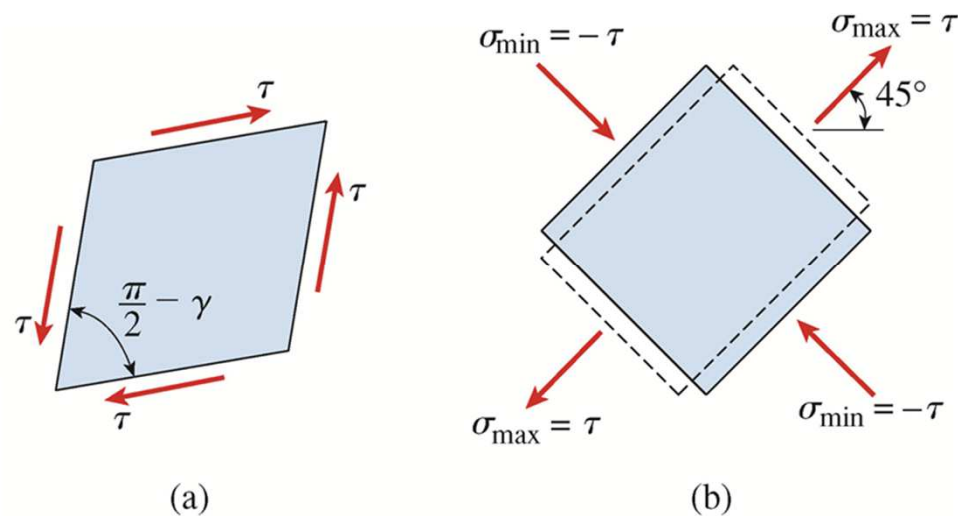


FIG. 3-24 Torsion failure of a brittle material by tension cracking along a 45° helical surface

FIG. 3-25 Strains in pure shear: (a) shear distortion of an element oriented at $\theta = 0$, and (b) distortion of an element oriented at $\theta = 45^\circ$





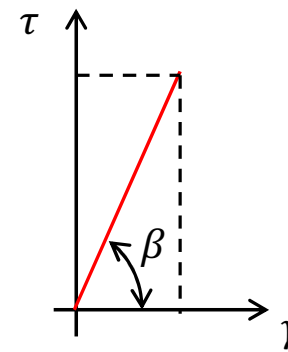
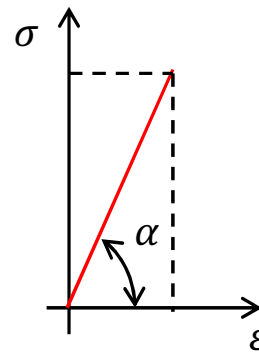
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2. Relação entre os Módulos de Elasticidade E e G

Equações constitutivas já vistas:

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\tau = G\gamma$$



$$\tan\alpha = E$$

$$\tan\beta = G$$

Hipóteses (para validade das relações dadas acima):

1. Material possui comportamento elástico-linear;
2. Existe linearidade geométrica.

Obs: As equações constitutivas dadas acima são para estados simples de tensão: uniaxiais no 1º caso ($\sigma = E\varepsilon$) e de cisalhamento puro no 2º caso ($\tau = G\gamma$).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Mostraremos agora que, para materiais isótropos, as duas constantes elásticas vistas (E, G) não são independentes entre si, mas relacionadas pela fórmula:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Para isto, consideremos o elemento $abcd$ indicado na figura abaixo sob estado de cisalhamento puro:

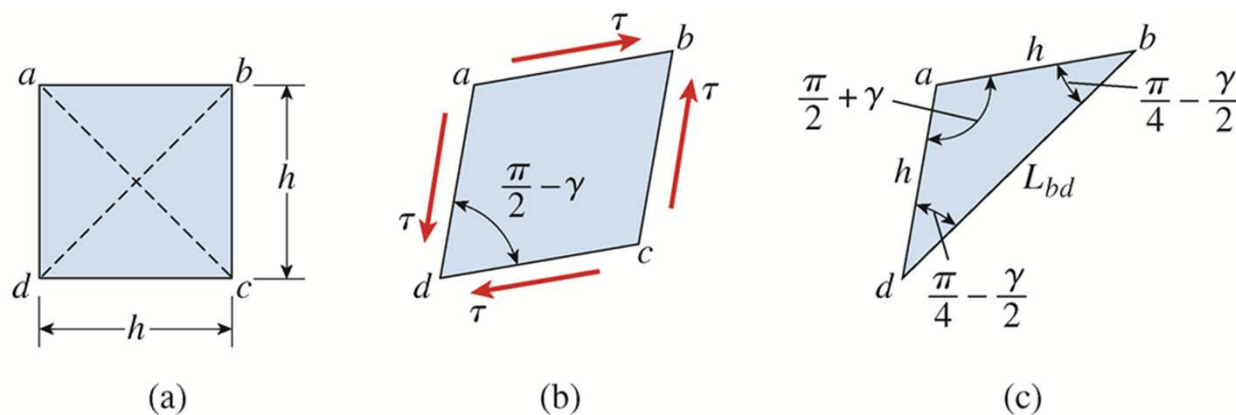
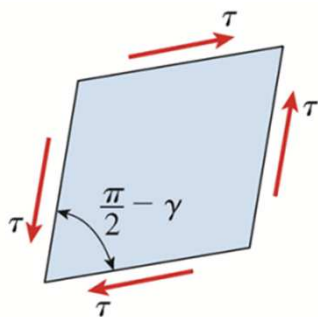


FIG. 3-28 Geometry of deformed element in pure shear

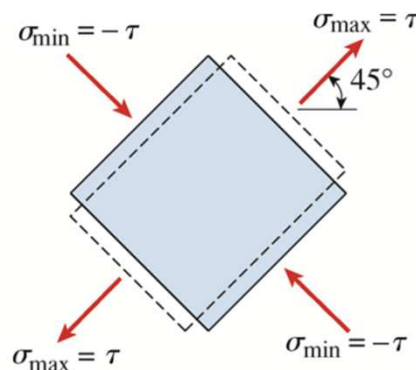


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Lembrando:



é equivalente a:



Denotando por L_0 o comprimento da diagonal bd na configuração de referência e por L o comprimento da diagonal bd na configuração deformada temos (por definição):

$$\varepsilon_{bd} = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} \Leftrightarrow L = (1 + \varepsilon_{bd})L_0 = (1 + \varepsilon_{bd})\sqrt{2}h$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

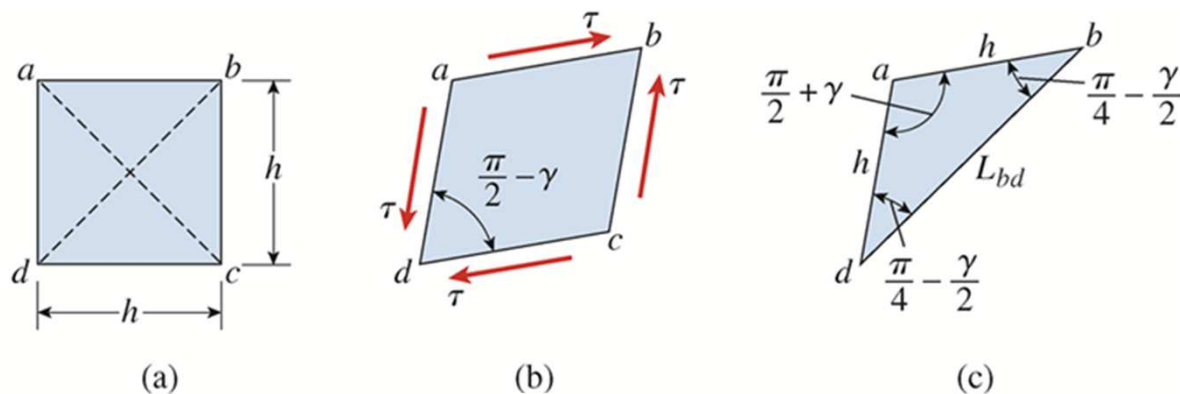


FIG. 3-28 Geometry of deformed element in pure shear

Por outro lado, aplicando a lei dos cossenos para determinar o mesmo comprimento L (vide Figura 3-28 (c)), teremos:

$$L^2 = h^2 + h^2 - 2h^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) = 2h^2(1 + \text{sen}\gamma)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo, temos as relações :

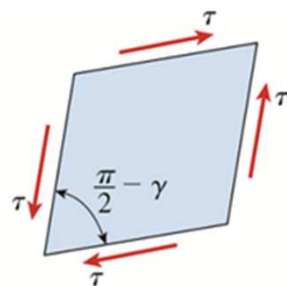
$$L^2 = (1 + \varepsilon_{bd})^2 2h^2 \cong 2h^2(1 + 2\varepsilon_{bd})$$

$$L^2 = h^2 + h^2 - 2h^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) = 2h^2(1 + \text{sen}\gamma) \cong 2h^2(1 + \gamma)$$

E, da igualdade entre elas, resulta:

$$\gamma = 2\varepsilon_{bd}$$

Mas, observando o estado de cisalhamento puro:

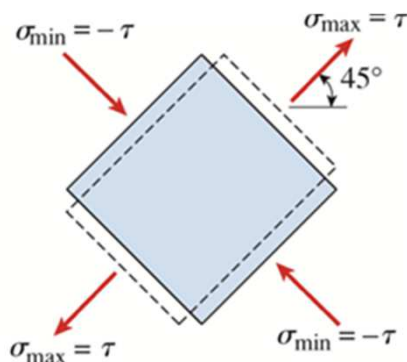


$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

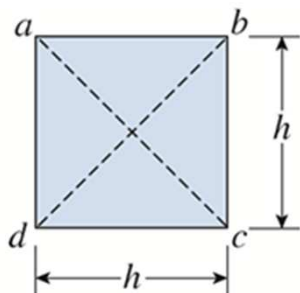


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

E observando o elemento sob estado de cisalhamento puro (mas rotacionado de 45°):



Alongamento da diagonal bd devido apenas às tensões de tração ($\sigma_{máx} = \tau$):

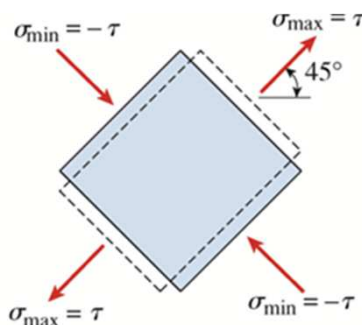
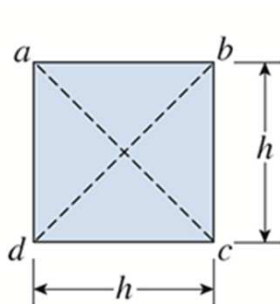


$$\varepsilon'_{bd} = \frac{\sigma_{máx}}{E} = \frac{\tau}{E}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Encurtamento da diagonal ac devido apenas às tensões de compressão ($\sigma_{mín} = -\tau$):



$$\varepsilon''_{ac} = \frac{\sigma_{mín}}{E} = -\frac{\tau}{E}$$

Alongamento da diagonal bd devido apenas às tensões de compressão ($\sigma_{mín} = -\tau$):

$$\varepsilon''_{bd} = -\nu \varepsilon''_{ac} = \nu \frac{\tau}{E}$$

Assim, superpondo os efeitos das duas tensões:

$$\varepsilon_{bd} = \varepsilon'_{bd} + \varepsilon''_{bd} = \frac{\tau}{E} (1 + \nu)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Logo:

$$\left[\begin{array}{l} \gamma = 2\varepsilon_{bd} = \frac{\tau}{G} \quad (\text{ver slide 18}) \\ \varepsilon_{bd} = \frac{\tau}{E}(1 + \nu) \quad (\text{ver slide 20}) \end{array} \right. \Rightarrow \varepsilon_{bd} = \frac{\tau}{2G} = \frac{\tau}{E}(1 + \nu)$$

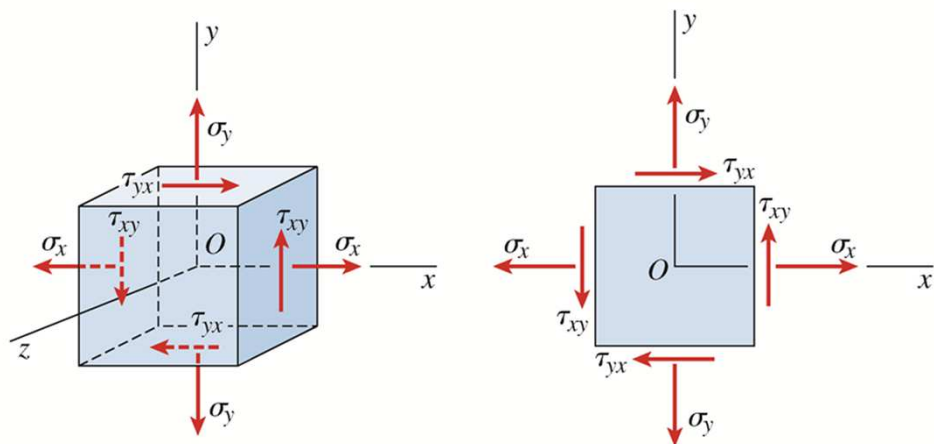
$$\frac{1}{2G} = \frac{1 + \nu}{E} \quad \Leftrightarrow \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Obs: Outra forma de fazer esta demonstração pode ser realizada utilizando o conceito de densidade de energia de deformação, que veremos na disciplina PME-3211. Pode-se demonstrar que, para materiais isotrópicos com comportamento elástico-linear, a densidade de energia de deformação, expressa em função das tensões para um estado plano de tensão, é dada pela relação:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y] + \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

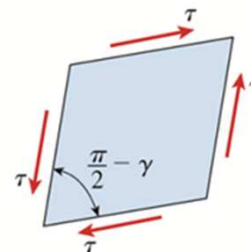




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

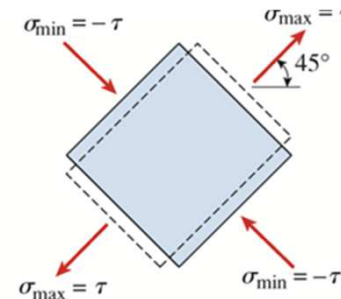
Assim, calculando a densidade de energia de deformação, para o estado de cisalhamento puro teremos:

$$u = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} = \frac{\tau^2}{2G}$$



Calculando novamente esta densidade, mas considerando o elemento rotacionado de 45°, teremos:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y] = \frac{(1 + \nu)}{E} \tau^2$$



Como a densidade de energia deve ser a mesma, obtemos:

$$u = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{(1 + \nu)}{E} \tau^2 \quad \longleftrightarrow \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, cap.3
- [2] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, cap.7