



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I

Aula #09

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

28/04/2023



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Introdução ao Cap.3 – Torção (3.1)
2. Deformações de torção de uma barra circular (3.2)
3. Barras circulares de materiais elásticos lineares (3.3)
4. Torção não uniforme (3.4)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. Introdução ao Cap.3 – Torção

No capítulo 2 estudamos barras submetidas a carregamentos axiais e o primeiro tipo de esforço solicitante interno: os esforços normais (de tração ou compressão). Neste capítulo introduziremos um segundo tipo de carregamento: os que causam torção em barras.

A torção está sempre associada a esforços que produzem rotação das seções transversais da barra ao redor de um eixo longitudinal que passa por um determinado ponto (denominado centro de torção), como indicado na figura ao lado. Contudo, diferentemente do movimento de rotação como corpo rígido visto em Mecânica I, aqui as rotações variam de seção para seção, e há deformações do elemento estrutural.

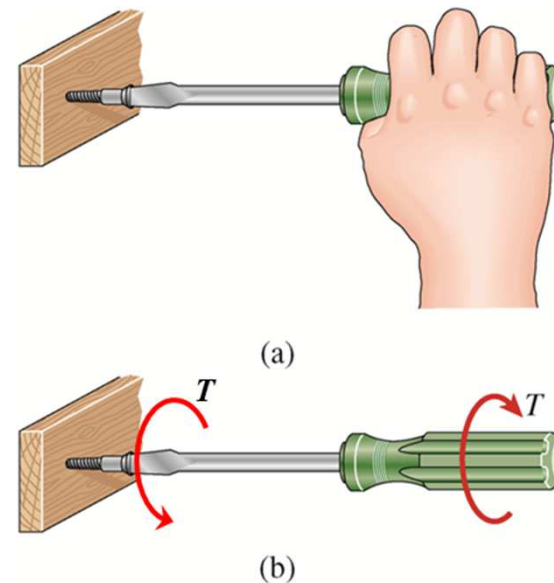


FIG. 3-1 Torsion of a screwdriver due to a torque T applied to the handle



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

O capítulo 3 contempla os seguintes tópicos (vide [1]):

3.1 Introdução

3.2 Deformações de torção de uma barra circular

3.3 Barras circulares de materiais elásticos lineares

3.4 Torção não uniforme

3.5 Tensões e deformações em cisalhamento puro

3.6 Relação entre os módulos de elasticidade E e G

3.7 Transmissão de potência por eixos circulares

3.8 Membros de torção estaticamente indeterminados

3.9 Energia de deformação em torção e cisalhamento puro

3.10 Tubos de paredes finas

3.11 Concentrações de tensão em torção

(Aula #09)

(Aula #11)

(Aula #13)

(Aula #15)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exemplos de estruturas mecânicas submetidas à torção:



Figura 1. Eixo de um gerador para transmissão de potência.



Figura 2. Eixo de um navio acoplado ao hélice [2].



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Outros exemplos de interesse:



Figura 3. Máquina de ensaio de torção – Biopdi [3, 4].



Figura 4. Fratura do úmero por torção [5].



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Outros exemplos de interesse:

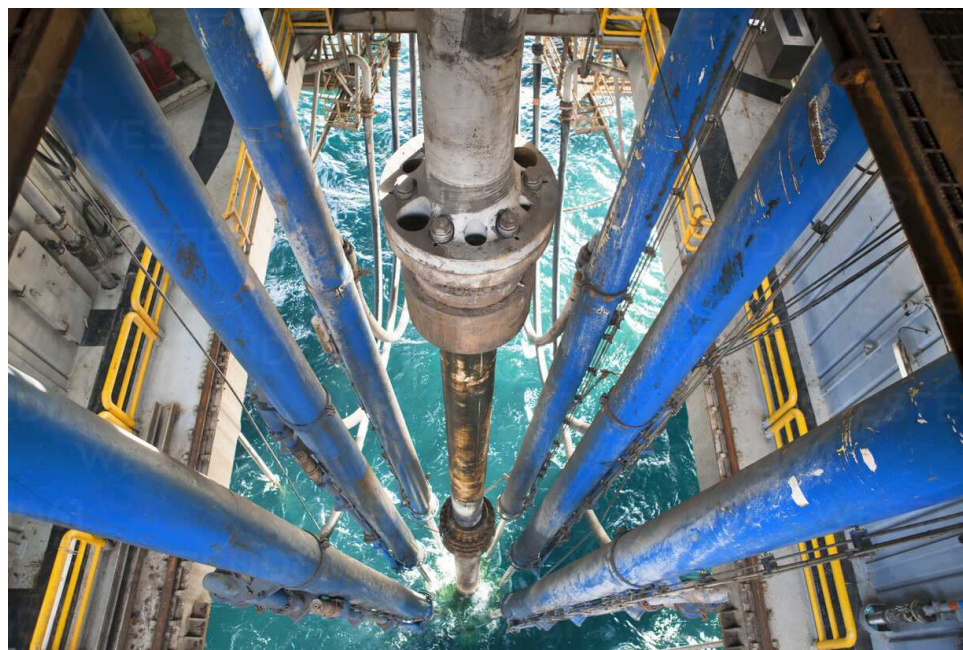


Figura 5. Riser de perfuração [6-9].



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A figura ao lado ilustra um caso idealizado de carregamento por torção em que uma barra cilíndrica, engastada na extremidade esquerda, é carregada simultaneamente por dois binários.

Lembrando que um binário possui resultante nula (pois as forças que o formam são de mesma intensidade, de mesma direção e de sentidos opostos) e que o momento do binário é dado pelo produto de uma das forças pela distância entre as linhas de ação destas forças, então:

$$\begin{array}{l} T_1 = P_1 d_1 \\ T_2 = P_2 d_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{Torques produzidos pelos binários.}$$

Obs: Se $|T_1| \neq |T_2|$, haverá um torque de reação (não indicado na figura) no engaste.

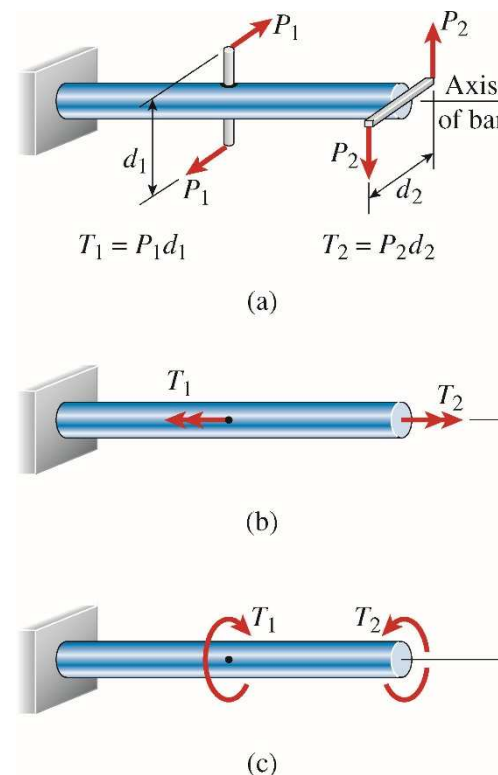


FIG. 3-2 Circular bar subjected to torsion by torques T_1 and T_2



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Cada torque (ou momento produzido pelo binário) é representado por um vetor na forma de uma seta com ponta dupla e que é perpendicular ao plano contendo o binário, de tal forma que os vetores serão sempre paralelos ao eixo central da barra (na seção transversal em que estão atuando).

O sentido do torque é dado pela regra da mão direita (vide Fig.3-2.b).

Outra representação possível para o torque utiliza uma seta “curvada” agindo na mesma direção e sentido da rotação que seria causada por ele, se estivesse agindo sozinho na barra (vide Fig.3-2-c).

Unidade (no S.I.):

$$[T] = N \cdot m \text{ (newton-metro)}$$

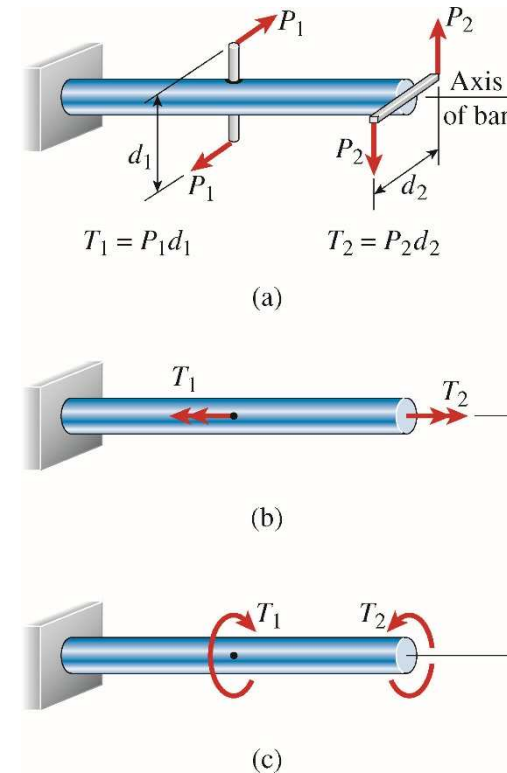


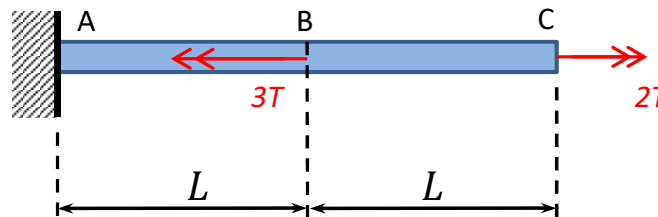
FIG. 3-2 Circular bar subjected to torsion by torques T_1 and T_2



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Torques internos e convenção de sinais (para os torques internos):

A determinação dos momentos de torção internos é importante para a análise e dimensionamento estrutural. Tomemos, como exemplo o caso anterior considerando que $|T_1| = 3T$ e $|T_2| = 2T$, onde $T > 0$ é um valor de referência:

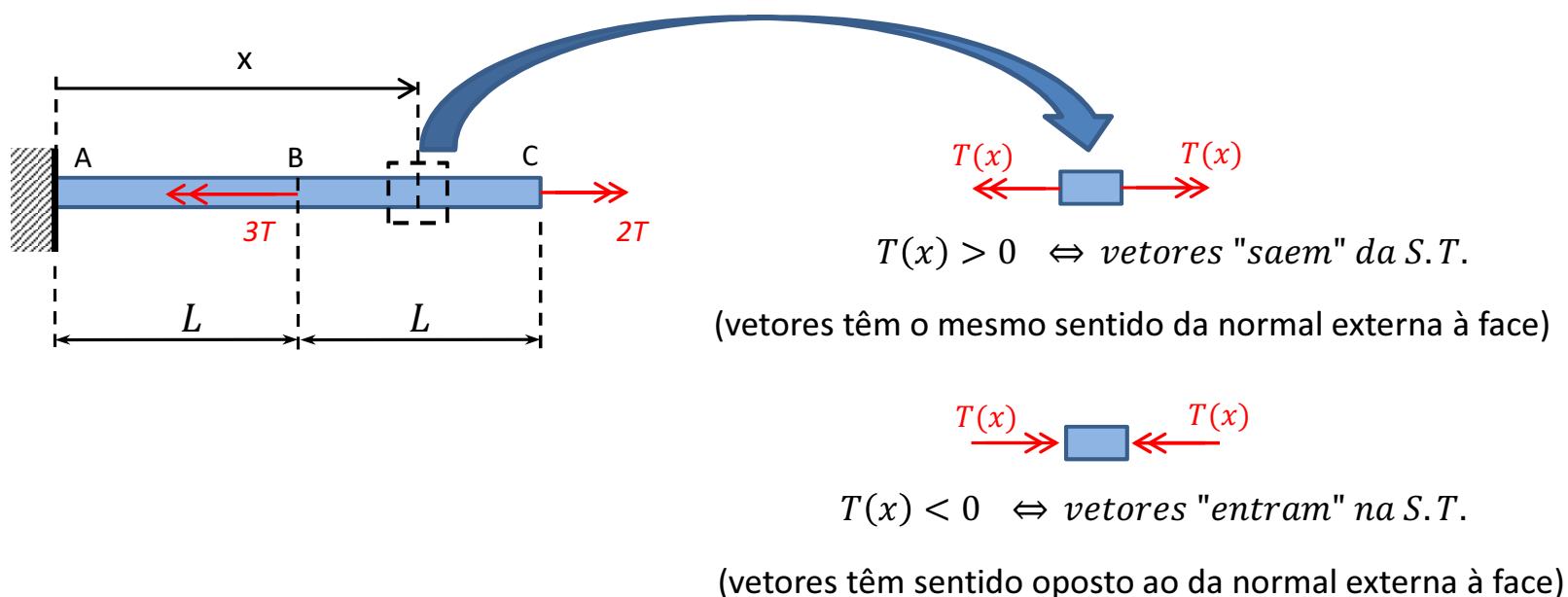


Como um dos papéis de uma estrutura é o de transmitir esforços, é evidente que deve haver esforços internos nas seções transversais de modo a garantir a transmissão dos esforços e o equilíbrio de cada trecho. Como veremos adiante, estes esforços internos constituem-se em tensões de cisalhamento cujo resultado líquido é o momento de torção atuante em cada seção transversal.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A convenção utilizada para designar o sinal dos momentos de torção internos é a seguinte:

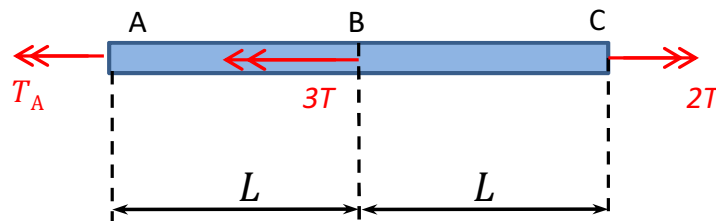


Notem, portanto, que a convenção é análoga à usada para estabelecer o sinal das forças normais de tração ($N(x) > 0$) ou de compressão ($N(x) < 0$) em barras submetidas a carregamentos puramente axiais.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Retomando o exemplo anterior, determinaremos primeiramente o torque de reação na seção engastada. Para os torques reativos, sugere-se sempre considerar que eles sejam positivos nos Diagramas de Corpo Livre iniciais (as condições de equilíbrio é que vão determinar se o sentido inicialmente arbitrado está correto ou não):



Do equilíbrio de momentos, temos:

$$2T - 3T - T_A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_A = -T$$

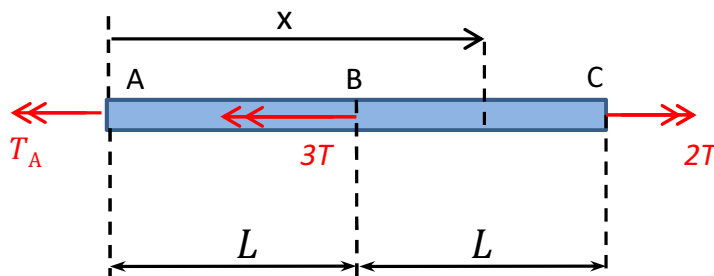
O sinal negativo obtido para T_A indica que o sentido inicialmente arbitrado está incorreto: para haver equilíbrio o sentido deve ser invertido!



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Determinação dos torques internos:

Como temos dois segmentos diferentes (em virtude da introdução de um torque externo concentrado na seção intermediária), precisamos determinar o torque interno em cada segmento separadamente:



Segmento BC:

Podemos impor o equilíbrio tanto para o trecho que ficou à direita do corte quanto para o que ficou à esquerda do corte. No primeiro caso, teremos:

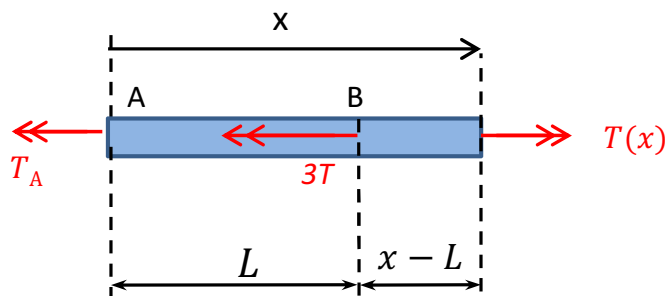


$$-T(x) + 2T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T(x) = 2T$$



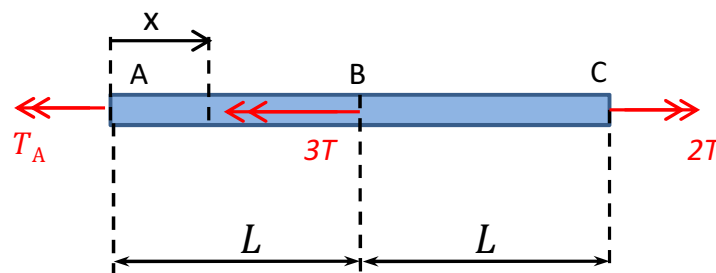
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Se tivéssemos optado pelo segmento à esquerda, o resultado seria o mesmo. Reparem:



$$T(x) - 3T - T_A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T(x) = 3T + T_A = 3T - T = 2T$$

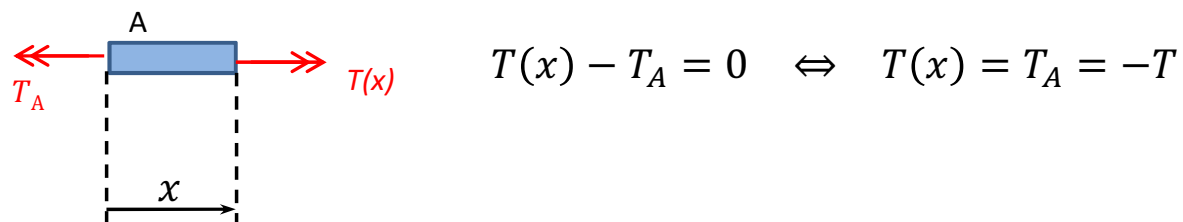
Para o segmento AB o procedimento é análogo: faz-se um corte imaginário entre as seções A e B e impomos o equilíbrio (para o segmento à esquerda ou para o segmento à direita do corte):



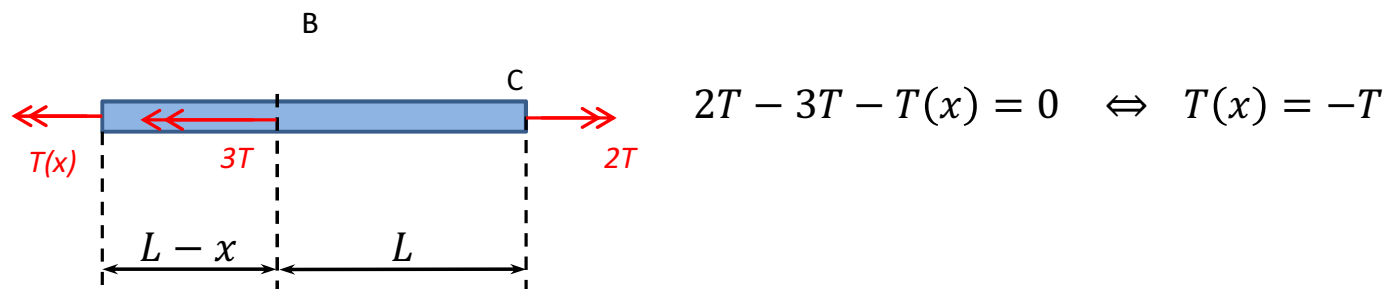


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Optando pelo segmento à esquerda do corte, teremos:



Optando pelo segmento à direita, teremos:

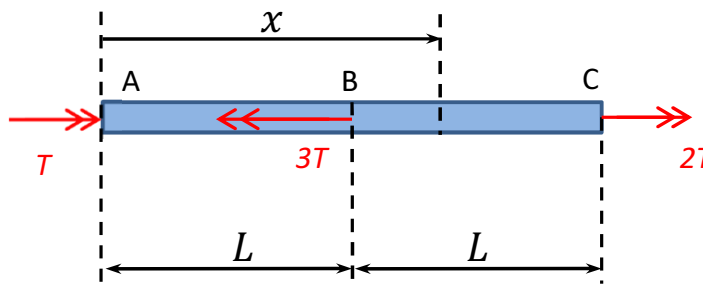




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Resumindo:

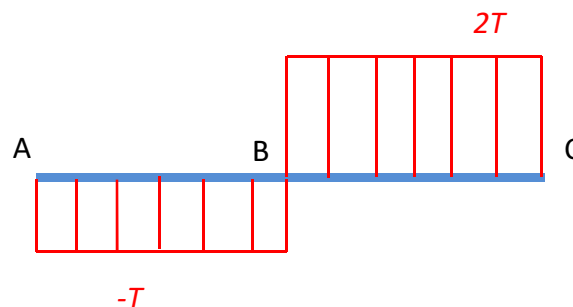
1. D.C.L:



2. Esforços Internos:

- No trecho AB: $T(x) = -T$, $0 \leq x < L$
- No trecho BC: $T(x) = 2T$, $L < x \leq 2L$

3. Diagrama de Momentos Torçores:





2. Deformações de torção de uma barra circular

Hipóteses de Coulomb (1784) para a torção de barras circulares:

1. Condições de torção uniforme: $T = \text{cte}$, seção transversal prismática, eixo reto;
2. Seções transversais da barra, que eram planas antes da aplicação dos torques, permanecerão planas após a aplicação dos torques;
3. As seções transversais giram, umas em relação às outras, em torno de um centro (denominado centro de torção) sem apresentar distorções dos elementos radiais;
4. Não há empenamento da seção transversal (deslocamentos longitudinais são nulos).

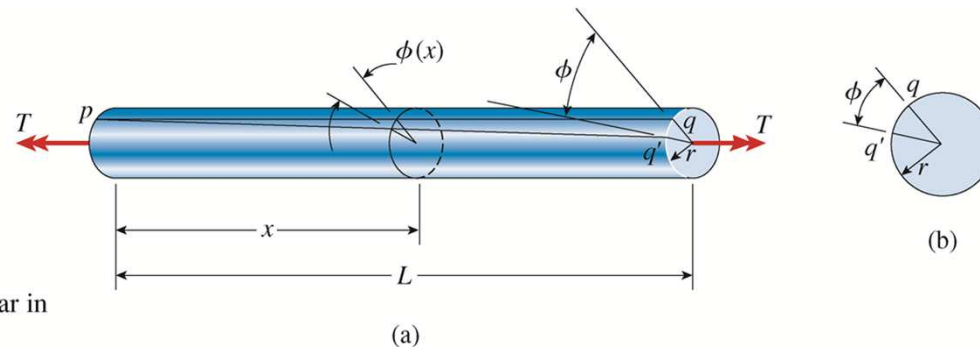


FIG. 3-3 Deformations of a circular bar in pure torsion



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

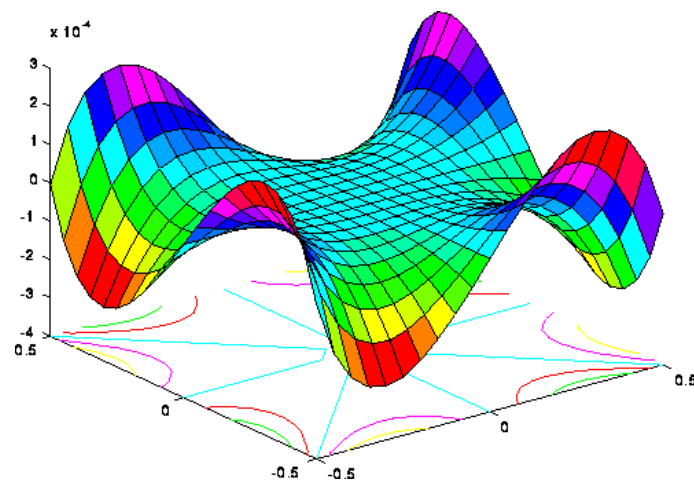
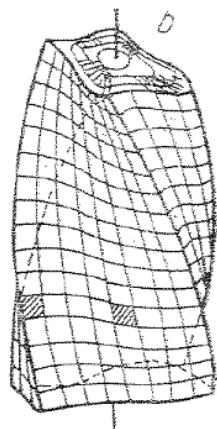
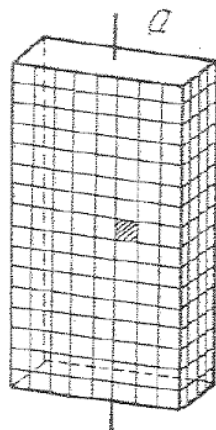
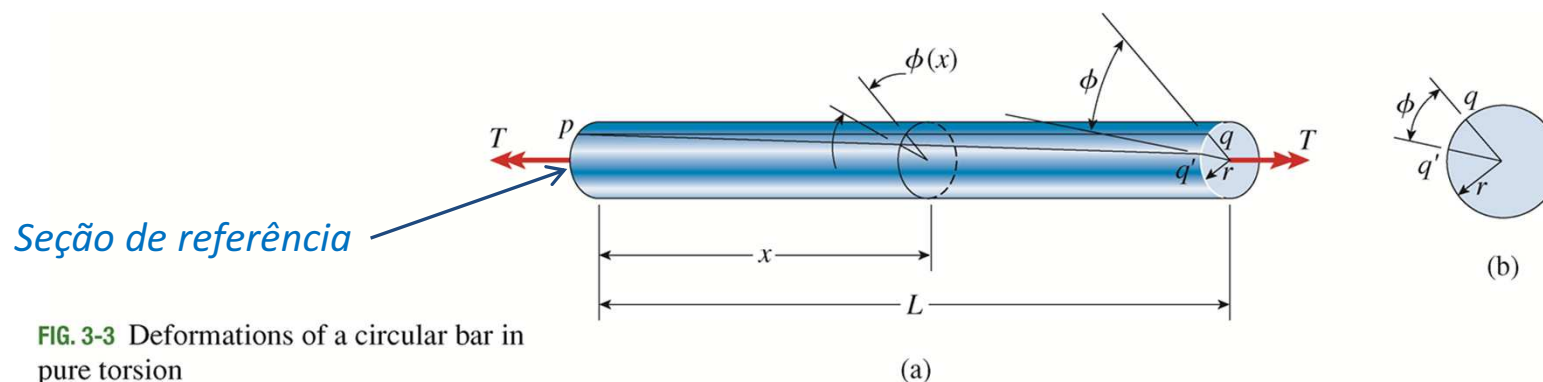


Figura 6. Empenamento de barras com seções transversais não circulares [10].



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Distorções em seções circulares:



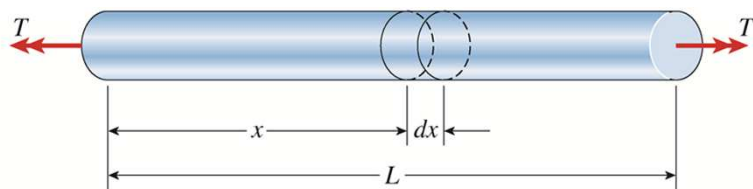
Sejam:

- T = torque aplicado na barra (N.m);
- L = comprimento da barra (m);
- r = raio da seção (m);
- Φ = ângulo de giro entre as seções extremas, distantes L entre si (rad);
- x = distância de uma seção genérica à seção de referência (m);
- $\Phi(x)$ = ângulo de giro da seção que dista x da seção de referência (rad).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A partir das hipóteses estabelecidas por Coulomb, determinamos:



(a)

Máxima distorção (ver Fig. 3-4.b):

$$\gamma_{\max} = \frac{bb'}{ab} = \frac{rd\phi}{dx}$$

Denotamos: $\theta = \frac{d\phi}{dx}$

Onde: θ = ângulo de giro por unidade de comprimento da barra (rad/m)

Assim: $\gamma_{\max} = r\theta$

E, no caso da torção uniforme:

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} = \frac{\phi}{L} \quad \gamma_{\max} = r\theta = \frac{r\phi}{L}$$

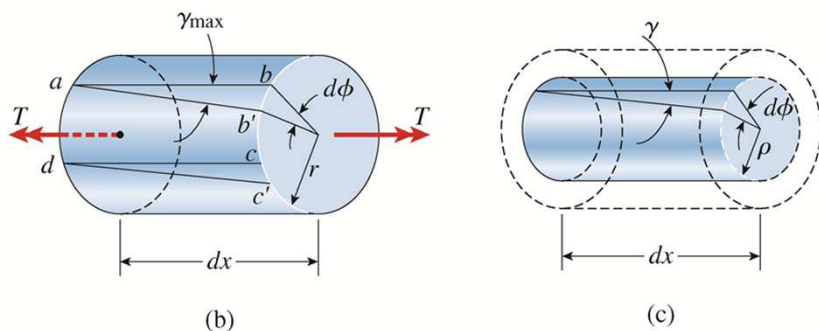
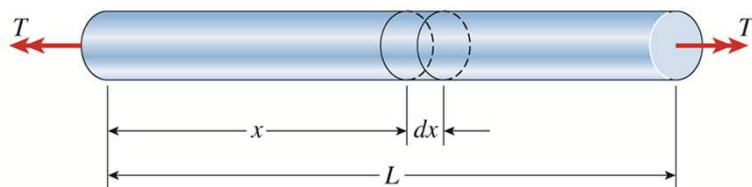


FIG. 3-4 Deformation of an element of length dx cut from a bar in torsion



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

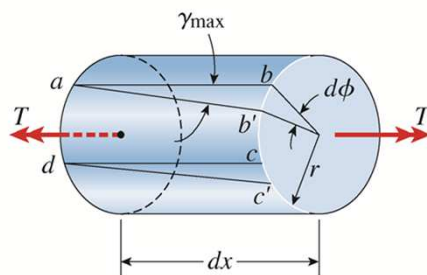
Para determinarmos a distorção no interior da barra, o processo é similar (ver Fig. 3-4.c):



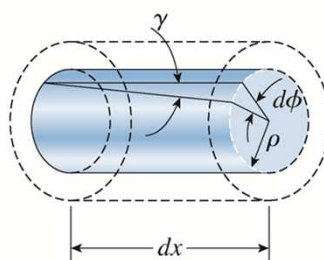
(a)

$$\gamma = \frac{\rho d\Phi}{dx} = \rho\theta$$

Onde: $0 \leq \rho \leq r$



(b)



(c)

E, no caso da torção uniforme:

$$\gamma = \rho\theta = \rho \frac{\Phi}{L} = \frac{\rho}{r} \gamma_{máx}$$

$$(0 \leq \rho \leq r)$$

FIG. 3-4 Deformation of an element of length dx cut from a bar in torsion



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Distorções em tubos circulares:

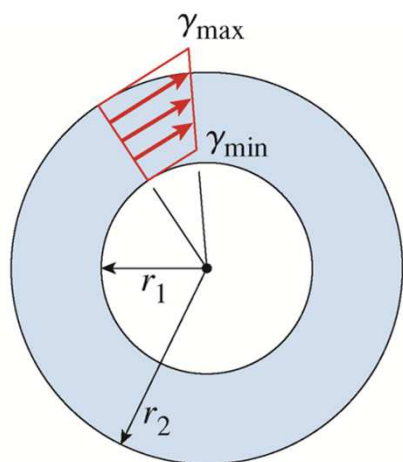


FIG. 3-5 Shear strains in a circular tube

Analogamente aqui também vale:

$$\gamma = \rho \frac{d\Phi}{dx} = \rho \theta$$

$$\text{Domínio: } r_1 \leq \rho \leq r_2$$

Logo, na torção uniforme:

$$\gamma_{\text{máx}} = r_2 \theta = r_2 \frac{\Phi}{L}$$

$$\gamma_{\text{mín}} = r_1 \theta = r_1 \frac{\Phi}{L}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3. Barras circulares de materiais elásticos lineares

Para materiais homogêneos, isotrópicos e com comportamento elástico-linear, vale a relação:

$$\tau = G\gamma$$

Logo, utilizando as relações anteriores, teremos:

$$\tau_{\max} = Gr\theta \quad (\text{máxima tensão cisalhante: junto à superfície})$$

$$\tau = G\rho\theta \quad (\text{distribuição de tensões cisalhantes na seção})$$

$(0 \leq \rho \leq r)$

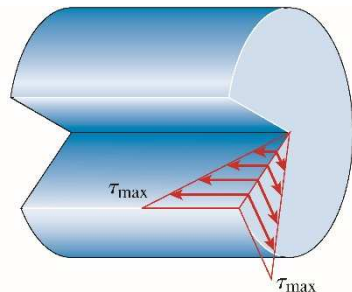


FIG. 3-7 Longitudinal and transverse shear stresses in a circular bar subjected to torsion

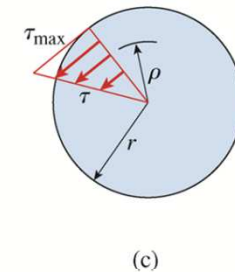
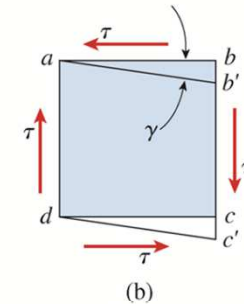
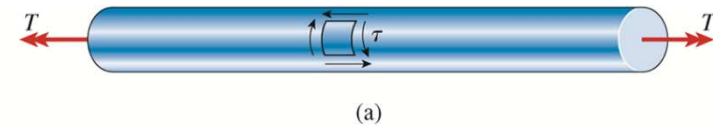


FIG. 3-6 Shear stresses in a circular bar in torsion

Importante:

Notem que as tensões de cisalhamento ocorrem nos planos da seção transversal e no interior do elemento, mas não há tensões de cisalhamento atuando na superfície lateral (a superfície lateral está visivelmente descarregada).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Relações importantes na torção uniforme de barras de seção circular
(cheias ou vazadas):

$$T = \iint_A \tau \rho dA = \iint_A (G\rho\theta)\rho dA = G\theta \iint_A \rho^2 dA$$

$$I_p = \iint_A \rho^2 dA = \int_0^r \rho^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

(I_p é o momento de inércia polar da seção transversal)

Logo: $T = G\theta I_p \Leftrightarrow \theta = \frac{\Phi}{L} = \frac{T}{GI_p} \Leftrightarrow \Phi = \frac{TL}{GI_p}$ (ângulo de giro entre as seções extremas)

$$\tau = G\rho\theta \Leftrightarrow \tau = \frac{T\rho}{I_p} \quad \text{(distribuição de tensões cisalhantes na seção)}$$
$$(0 \leq \rho \leq r)$$

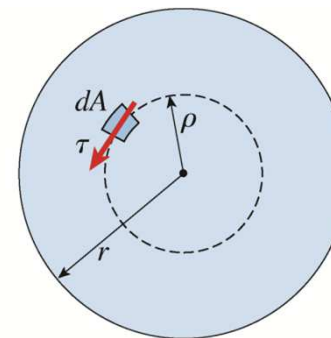


FIG. 3-9 Determination of the resultant of the shear stresses acting on a cross section



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Para tubos circulares valem as mesmas expressões, sendo apenas necessário calcular o momento de inércia polar corretamente:

$$I_p = \iint_A \rho^2 dA = \int_{r_1}^{r_2} \rho^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi(r_2^4 - r_1^4)}{2} = \frac{\pi(d_2^4 - d_1^4)}{32}$$

Valem as relações:

$$T = G\theta I_p \Leftrightarrow \theta = \frac{\Phi}{L} = \frac{T}{GI_p} \Leftrightarrow \Phi = \frac{TL}{GI_p}$$

$$\tau = G\rho\theta \Leftrightarrow \tau = \frac{T\rho}{I_p}$$

$$\tau_{\max} = Gr_2\theta = \frac{T}{I_p}r_2 \qquad \tau_{\min} = Gr_1\theta = \frac{T}{I_p}r_1$$

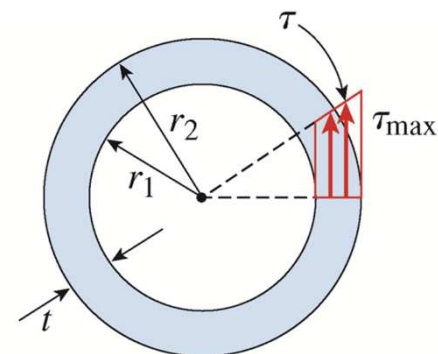


FIG. 3-10 Circular tube in torsion



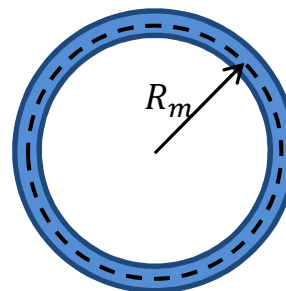
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

E, para tubos circulares de parede fina, a expressão do momento polar de inércia também pode ser calculada como:

$$I_p = \frac{\pi(r_2^4 - r_1^4)}{2} = \frac{\pi(r_2^2 + r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)}{2} = \frac{\pi(r_2^2 + r_1^2)(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)}{2}$$

Mas,
$$\left[\begin{array}{ll} \frac{(r_2 + r_1)}{2} = R_m & \text{(raio médio do tubo)} \\ r_2 - r_1 = t & \text{(espessura do tubo)} \\ r_2^2 + r_1^2 = \left(R_m + \frac{t}{2}\right)^2 + \left(R_m - \frac{t}{2}\right)^2 = 2R_m^2 \left(1 + \left(\frac{t}{2R_m}\right)^2\right) \cong 2R_m^2 \end{array} \right.$$

Logo:
$$I_p \cong 2\pi R_m^3 t = (2\pi R_m t) R_m^2 = A \cdot R_m^2$$

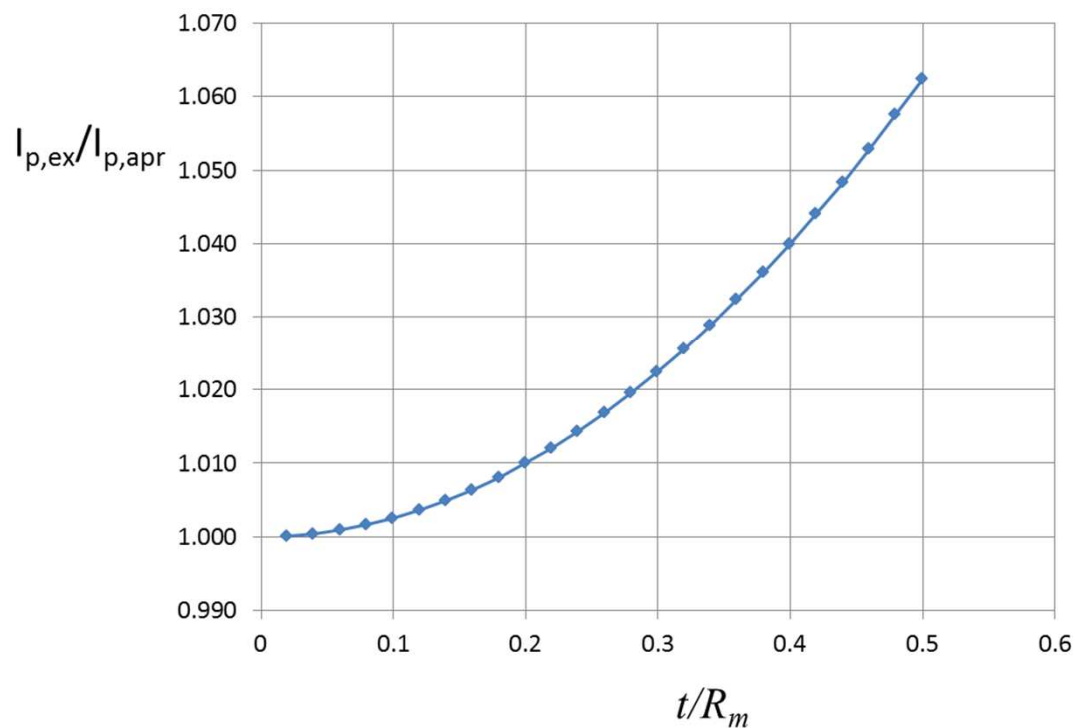




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Mostra-se facilmente que:

$$\frac{I_{p,ex}}{I_{p,apr}} = 1 + \left(\frac{t}{2R_m} \right)^2$$



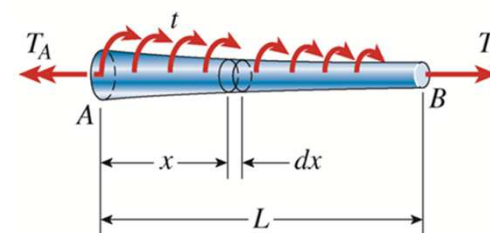
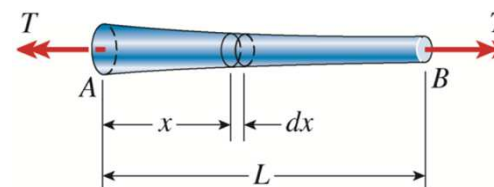
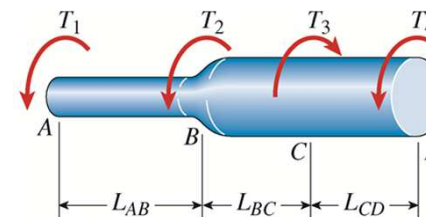
Logo, o erro cometido com a aproximação é desprezível para quase todas as aplicações práticas.



4. Torção não uniforme

Casos de torção não uniforme

- Devido à aplicação de vários torques concentrados ou distribuídos ao longo de uma barra prismática ou formada por segmentos prismáticos;
- Devido à aplicação de torque em barra de seção circular com raio variável;
- Devido à aplicação de vários torques concentrados ou distribuídos em barra de seção circular com raio variável.





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1º Caso: Aplicação de vários torques concentrados ou distribuídos ao longo de uma barra prismática ou formada por segmentos prismáticos

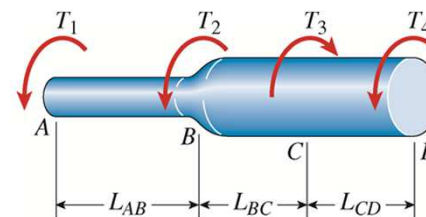
Procedimento:

1. Identificar o número de segmentos e identificá-los como segmentos 1, 2, ..., n;
2. Determinar os torques internos (T_i , $i = 1, 2, \dots, n$) em cada segmento utilizando cortes apropriados, diagramas de corpo livre e equações de equilíbrio de momentos;
3. Determinar os ângulos de giro em cada segmento (Φ_i) utilizando a relação:

$$\Phi_i = \frac{T_i L_i}{G_i I_{p,i}}$$

4. Determinar o ângulo de giro total para toda a barra:

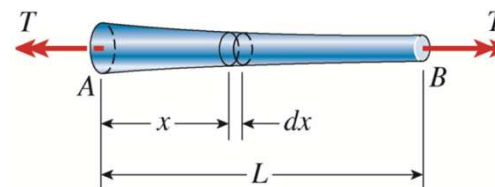
$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i = \sum_{i=1}^n \frac{T_i L_i}{G_i I_{p,i}}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2º Caso: Aplicação de torque em barra de seção circular com raio variável



Procedimento:

1. Identificar o número de segmentos e identificá-los como segmentos 1, 2, ..., n;
2. Determinar as funções que fornecem o raio ou diâmetro em cada um dos n trechos ($D_i = D_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$);
3. Determinar o momento polar de inércia em cada trecho com a fórmula:

$$I_{p,i}(x) = \frac{\pi(D_i(x))^4}{32}$$

4. Integrar o ângulo de giro infinitesimal ao longo do comprimento de cada trecho para obter o ângulo de giro total:

$$d\Phi_i = \frac{Tdx}{G_i I_{p,i}(x)} \quad \Rightarrow \quad \Phi = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{Tdx}{G_i I_{p,i}(x)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3º Caso: Aplicação de vários torques concentrados ou distribuídos em barra de seção circular com raio variável

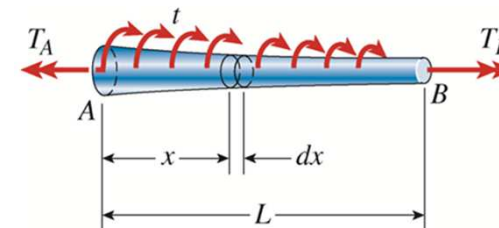
Procedimento:

1. Identificar o número de segmentos e identificá-los como segmentos 1, 2, ..., n;
2. Determinar os torques internos ($T_i = T_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$) em cada segmento utilizando cortes apropriados, diagramas de corpo livre e equações de equilíbrio de momentos;
3. Determinar as funções que fornecem o raio ou diâmetro em cada um dos n trechos ($D_i = D_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$) e o momento polar de inércia em cada trecho com a fórmula:

$$I_{p,i}(x) = \frac{\pi(D_i(x))^4}{32}$$

4. Integrar o ângulo de giro infinitesimal ao longo do comprimento de cada trecho para obter o ângulo de giro total:

$$d\Phi_i = \frac{T_i(x)dx}{G_i I_{p,i}(x)} \quad \longrightarrow \quad \Phi = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{T_i(x)dx}{G_i I_{p,i}(x)}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p.
- [2] <https://www.nauticexpo.com/pt/prod/schaffran-propeller-service/product-31586-358602.html>
- [3] <https://biopdi.com.br/ensaios-mecanicos/>
- [4] <https://www.youtube.com/watch?v=wPcJ4Wqe4Lo>
- [5] Sahin, T. (2020) Arm Wrestling Related Injuries: A Literatura Review. Int Arch Orthop Surg 3:022. doi/org/ 10.23937/2643-4016/1710022
- [6] <https://www.westend61.de/en/imageView/CAVF24928/high-angle-view-of-drilling-riser-and-pipes-in-sea-at-oil-rig>
- [7] <https://www.youtube.com/watch?v=gdMxJoOdfs4>
- [8] <https://www.youtube.com/watch?v=QrPg8sMgRWk>
- [9] <https://pt.slideshare.net/Marcio25/animao-de-perfurao-no-mar>
- [10] <http://faculty.ce.berkeley.edu/sanjay/mechanics/warp.html>
- [11] <https://www.youtube.com/watch?v=wJyJmSmKnJ8>