



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia Mecânica*

*PME-3210 - Mecânica dos Sólidos I*

*Aula #03*

*Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.*

*28/03/2023*



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

***Agenda:***

1. Elasticidade Linear, Lei de Hooke e Coeficiente de Poisson (item 1.5)
2. Tensão e Deformação de Cisalhamento (item 1.6)
3. Tensões e Cargas Admissíveis (item 1.7)
4. Dimensionamento para Cargas Axiais e Cisalhamento Puro (item 1.8)



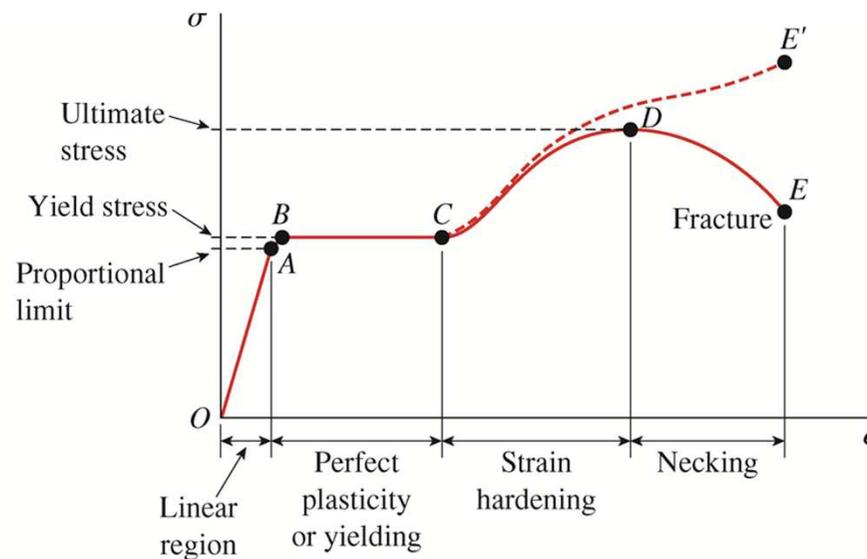
**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

## 1. Elasticidade Linear, Lei de Hooke e Coeficiente de Poisson

Grande parte das estruturas são projetadas para que trabalhem na região de elasticidade linear, onde vale a Lei de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade (ou módulo de Young) do material.





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

O módulo de elasticidade (ou módulo de Young) é dado pela declividade da curva Tensão  $\times$  Deformação na região de elasticidade linear do material.

Valores de referência do módulo de elasticidade de materiais comumente empregados na construção mecânica são [1]:

Aço:  $E = 190 - 210$  GPa;

Ligas de alumínio:  $E = 70 - 79$  GPa;

Ferro fundido:  $E = 83 - 170$  GPa;

Cobre e ligas de cobre:  $E = 110 - 120$  GPa;

Nylon:  $E = 2,1 - 3,4$  GPa;

Polietileno:  $E = 0,7 - 1,4$  GPa;

...

*Obs: Uma fonte interessante para a obtenção de várias propriedades mecânicas de materiais é a MatWeb [2].*

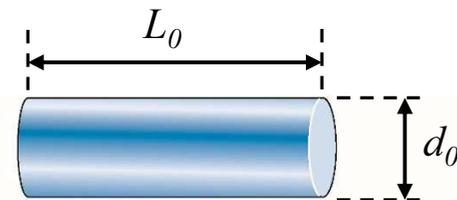


**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Coefficiente de Poisson (e efeito de Poisson) [1, 3]:

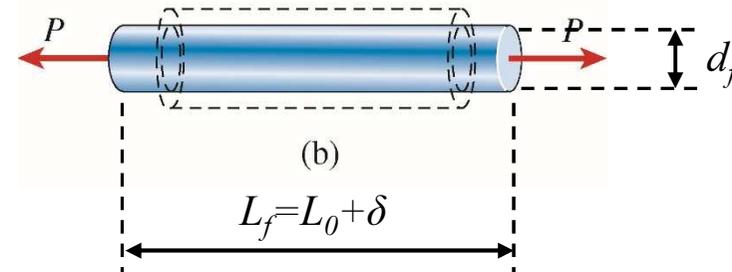
Quando uma barra prismática (feita de um material homogêneo e isotrópico) é carregada em tração, o alongamento axial é acompanhado por uma contração lateral (ou transversal):

(a) Barra na Configuração de Referência (ou inicial):



(a)

(b) Barra na Configuração Deformada (ou final):



(b)

Definimos:

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L_f - L_0}{L_0} = \frac{\delta}{L_0} \quad (\text{alongamento unitário longitudinal})$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

E:  $\varepsilon_t = \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{d_f - d_0}{d_0}$  (alongamento unitário transversal)

Vemos que, como no caso do alongamento unitário longitudinal, o alongamento unitário transversal também é um adimensional e é definido exatamente da mesma maneira que o alongamento unitário longitudinal (ou seja, pela razão entre a variação de uma dimensão e a mesma dimensão tomada na configuração de referência).

É possível verificar (experimentalmente) que, na região de elasticidade linear do material, o alongamento unitário transversal é proporcional ao alongamento unitário longitudinal. Como os dois alongamentos são adimensionais, tal constante de proporcionalidade também será um adimensional. Designando tal constante pela letra grega  $\nu$  (nu), denominada Coeficiente de Poisson, teremos:

$$\varepsilon_t = -\nu\varepsilon_l \Leftrightarrow \nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l}$$

O sinal negativo é inserido na equação para que o coeficiente de Poisson resulte positivo (já que os alongamentos longitudinal e transversal têm sinais contrários para os materiais de construção usuais).



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Observações:

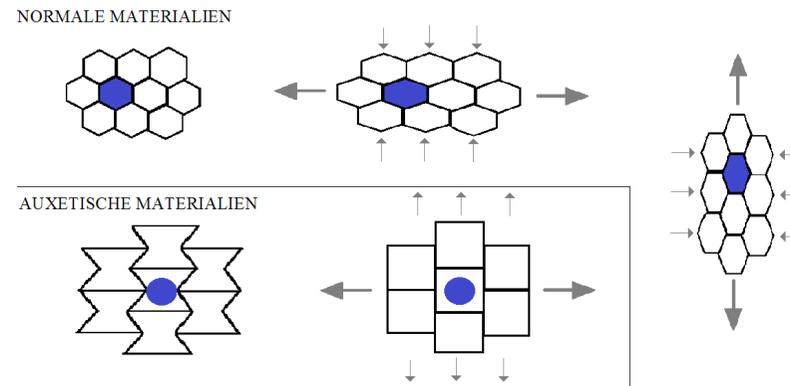
1. O coeficiente de Poisson leva o nome do matemático francês Siméon Denis Poisson (1781-1840) que tentou determiná-lo utilizando uma teoria molecular de materiais. Para materiais isotrópicos, Poisson encontrou  $\nu = 0,25$ , mas cálculos recentes baseados em modelos de estrutura atômica fornecem  $\nu = 0,33$ ;
2. Os valores acima são próximos a valores reais medidos, que estão no intervalo de 0,25 a 0,35 para a maioria dos metais e outros materiais (ver Tabela H2 no livro texto);
3. Um limite superior teórico para o coeficiente de Poisson é  $\nu = 0,5$  (a borracha tem um coeficiente de Poisson próximo deste valor limite). Tais materiais são denominados incompressíveis;
4. Quando as deformações em um material tornam-se grandes (fora da região de elasticidade linear), o coeficiente de Poisson muda. No caso do aço estrutural, p.ex., o coeficiente se aproxima de 0,5 quando ocorre o escoamento plástico;



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Observações:

5. Existem, contudo, materiais com coeficientes de Poisson negativos, os quais são denominados materiais auxéticos [4, 5]:



6. Valores de referência para o coeficiente de Poisson para alguns materiais [1]:

Aço: 0,3

Alumínio: 0,33

Concreto: 0,1 – 0,2

Borracha: 0,45 – 0,50

Tungstênio: 0,2

Vidro: 0,17 – 0,27

Níquel: 0,31

Plásticos (nylon, PE): 0,4

...



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Observações:

7. Cristais são, em geral, materiais anisótipos (suas propriedades mecânicas variam de acordo com a direção), mas, considerando que as orientações dos diferentes cristais, dentro de uma estrutura policristalina, variam de forma aleatória, pode-se considerar que o material é “isótopo” (macroscopicamente). Desta forma, os valores assinalados para as constantes elásticas, nesta situação, representam este comportamento macroscópico “médio” do material.

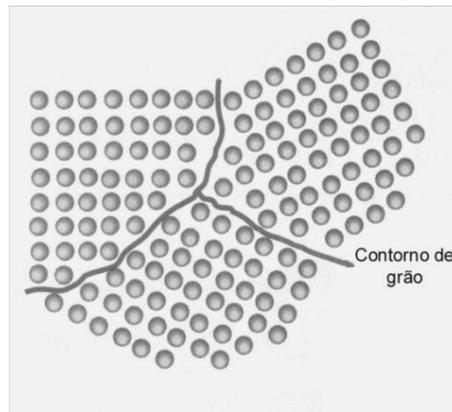
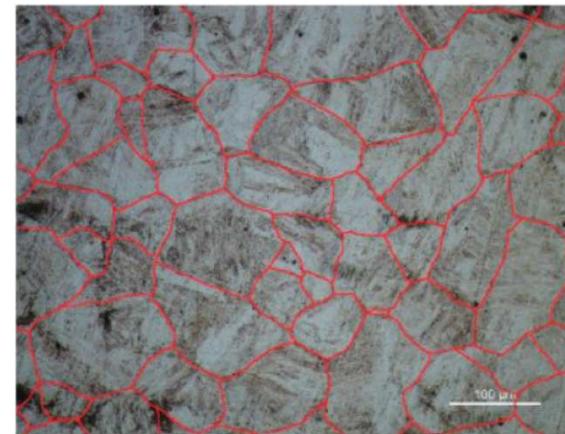


Figura esquemática mostrando os contornos de grão [6].



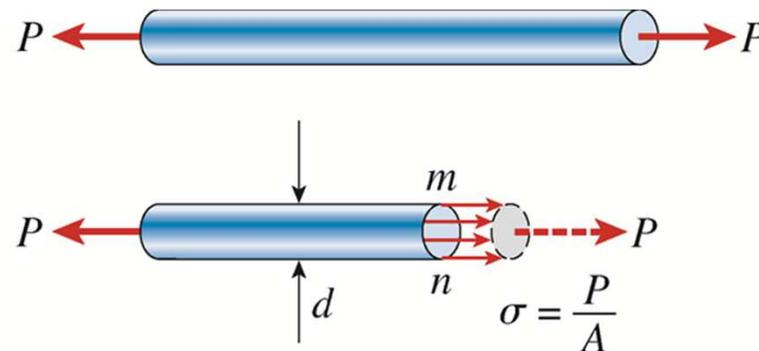
Contornos de grão destacados [7]



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

## 2. Tensão Cisalhante e Distorção

Na aula anterior, investigamos as tensões normais (*normal stresses*), assim chamadas pois a direção destas tensões é normal (ortogonal) ao plano em que atuam:

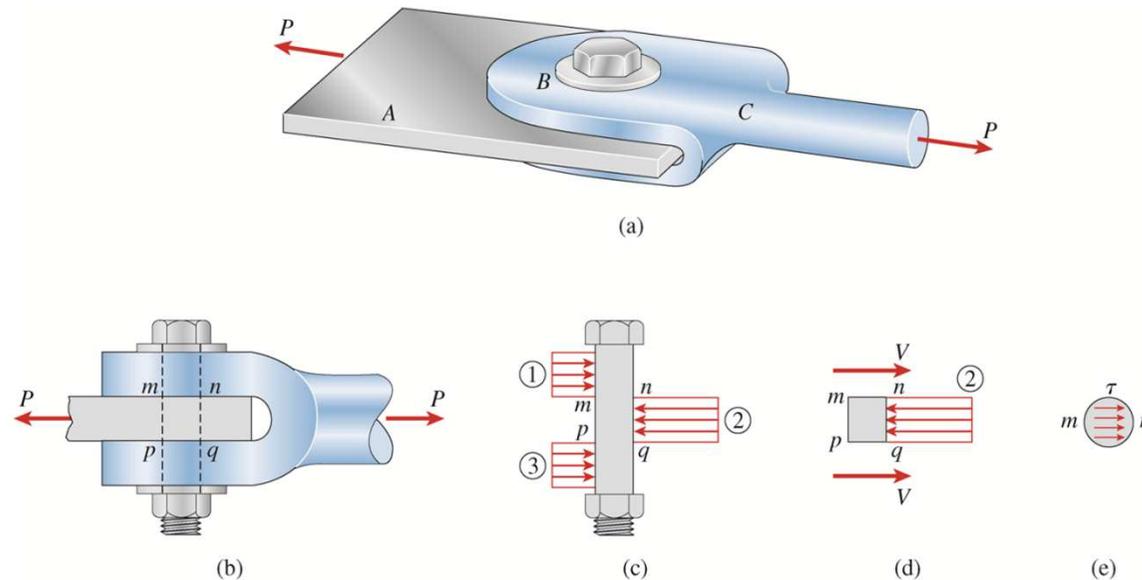


Na aula de hoje investigaremos outro tipo de tensão, denominada tensão cisalhante (*shear stress*), que age tangencialmente (paralelamente) ao plano em que atua.



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Como ilustração da ação das tensões de cisalhamento, consideremos a união parafusada indicada abaixo, submetida ao corte duplo (ou cisalhamento duplo):



**FIG. 1-24** Bolted connection in which the bolt is loaded in double shear

Neste caso, obtemos:  $2V = P \Leftrightarrow V = \frac{P}{2}$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Deve-se observar que a força  $V$  indicada na Figura 1.24-d representa a força decorrente da integral das forças internas distribuídas na área da seção transversal, projetadas segundo a linha de ação da força  $P$ . Designando por  $\vec{e}_x$  o versor que indica a linha de ação da força  $P$  e denominando estas forças internas (por unidade de área) pela letra grega  $\tau$  (tau), teremos:

$$V = \iint_A (\vec{\tau} \cdot \vec{e}_x) dA \Rightarrow \bar{\tau} = \frac{V}{A}$$

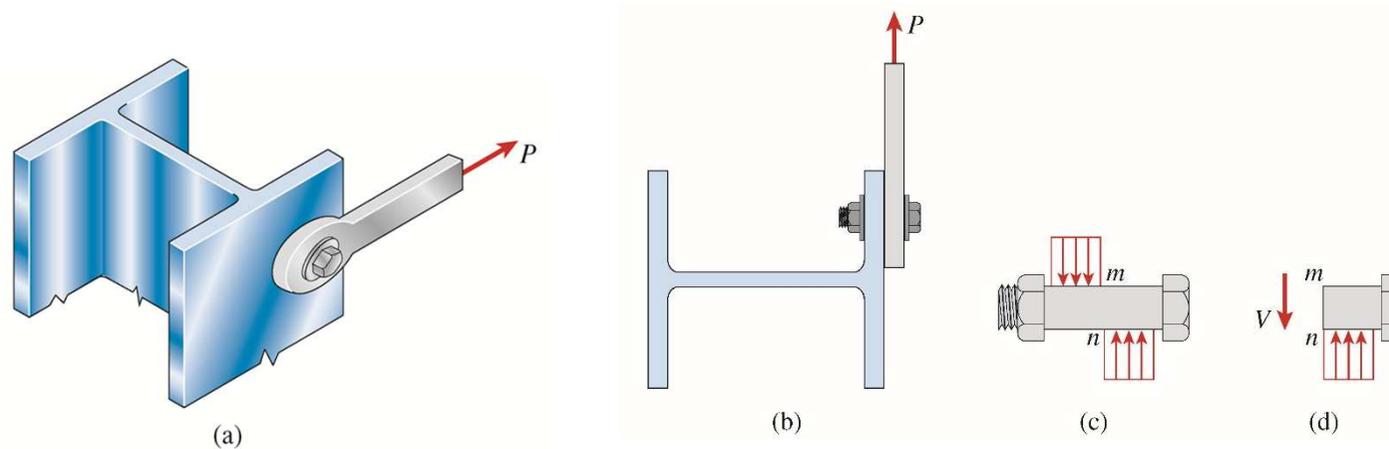
A tensão  $\bar{\tau}$  é a tensão de cisalhamento (ou tensão de corte) média que atua na área da seção transversal (e é paralela à seção transversal). Do exposto, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\tau} = \frac{V}{A} \\ V = \frac{P}{2} \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \bar{\tau} = \frac{P}{2A} \quad \text{Corte duplo: a carga total } P \text{ é dividida por } 2A.$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

O exemplo abaixo ilustra outro caso envolvendo tensões de cisalhamento, o qual denominamos corte simples (ou cisalhamento simples):



**FIG. 1-25** Bolted connection in which the bolt is loaded in single shear

Neste caso, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\tau} = \frac{V}{A} \\ V = P \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \bar{\tau} = \frac{P}{A} \quad \text{Corte simples: a carga total } P \text{ é dividida por } A.$$

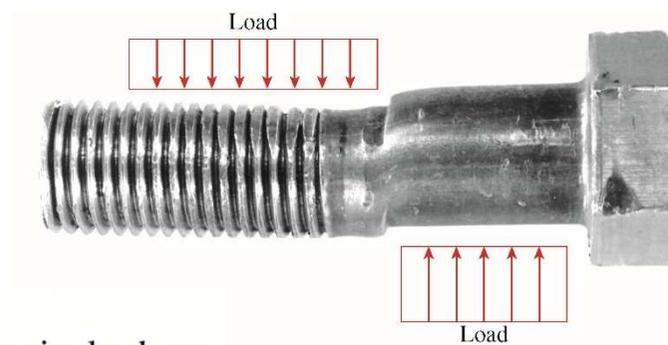


**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Observações:

1. A tensão cisalhante calculada pelas fórmulas indicadas representa um valor médio das tensões de corte na seção transversal;
2. A força  $V$  é denominada força cortante (*shear force*) e devemos lembrar sempre que tal força é uma resultante das tensões internas (tensões cisalhantes) que atuam no material (*stress resultant*);
3. Do exposto, verifica-se que a unidade das tensões cisalhantes no S.I. é:

$$[\tau] = \frac{[V]}{[A]} = \frac{N}{m^2} = Pa$$



**FIG. 1-26** Failure of a bolt in single shear



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

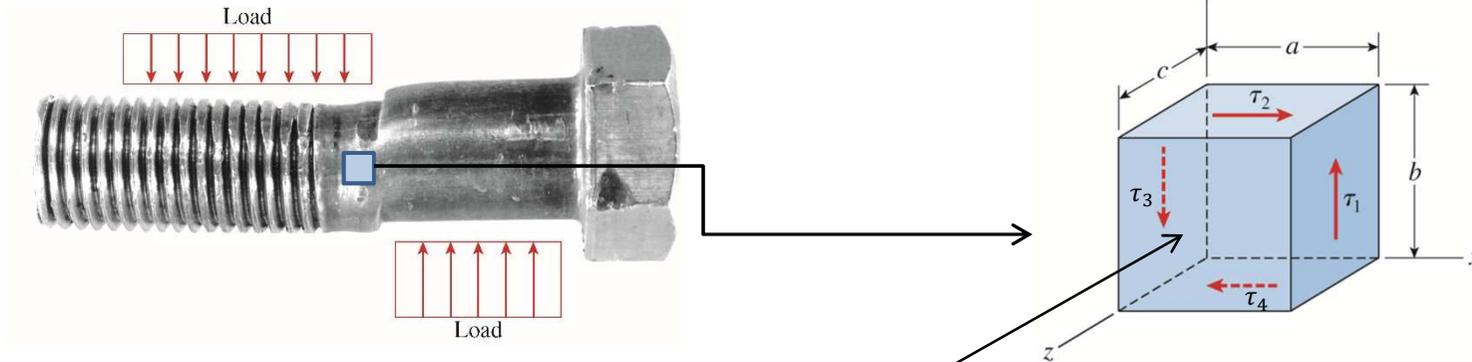


Ligação parafusada unindo parte superior e inferior de uma coluna.



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Igualdade das tensões de cisalhamento em planos perpendiculares:



*Note que as faces paralelas ao plano xy estão visivelmente descarregadas (isentas de tensões).*

**FIG. 1-27** Small element of material subjected to shear stresses

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Leftrightarrow \tau_2(ac) = \tau_4(ac) \Leftrightarrow \tau_2 = \tau_4 \\ \sum F_y = 0 &\Leftrightarrow \tau_1(bc) = \tau_3(bc) \Leftrightarrow \tau_1 = \tau_3 \\ \sum M_z = 0 &\Leftrightarrow \tau_1(bc)a = \tau_2(ac)b \Leftrightarrow \tau_1 = \tau_2 \end{aligned}$$

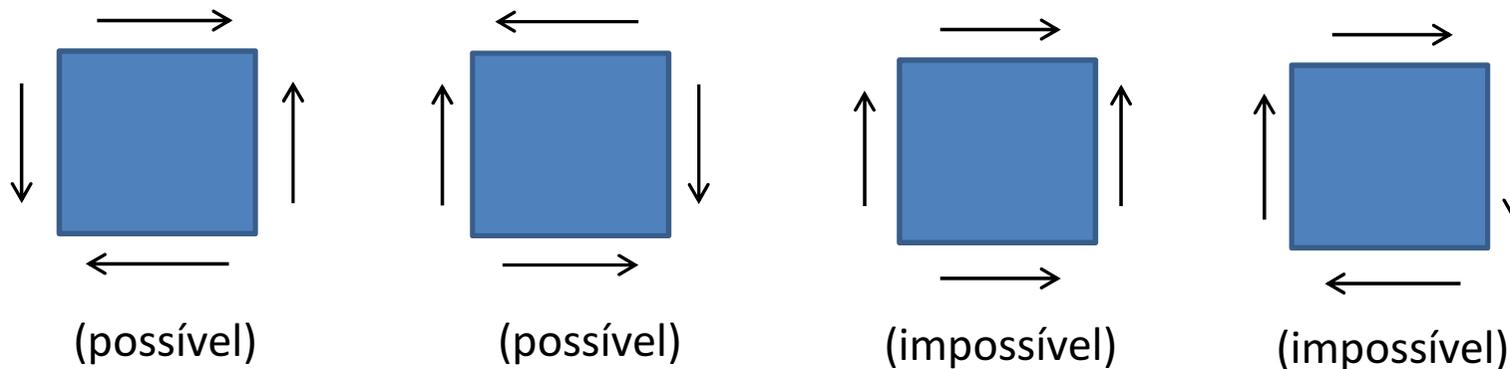
**→**  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Em resumo:

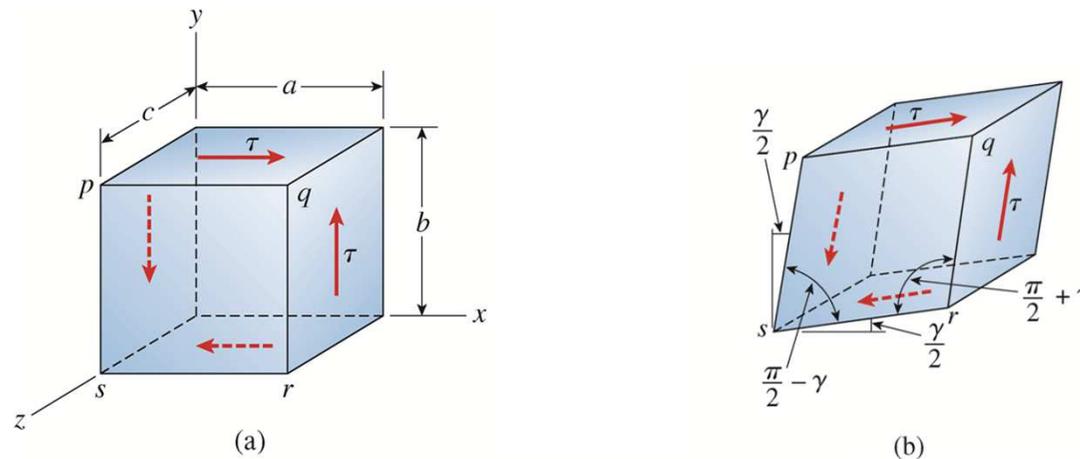
1. Tensões de cisalhamento em faces opostas (e paralelas) são iguais em magnitude e opostas em direção;
2. Tensões de cisalhamento em faces adjacentes (e perpendiculares) de um elemento são iguais em magnitude e têm direções e sentidos tais que ambas convergem (apontam) para a aresta comum, ou divergem (afastam-se) da aresta comum.





**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Deformações por cisalhamento (distorções):



**FIG. 1-28** Element of material subjected to shear stresses and strains

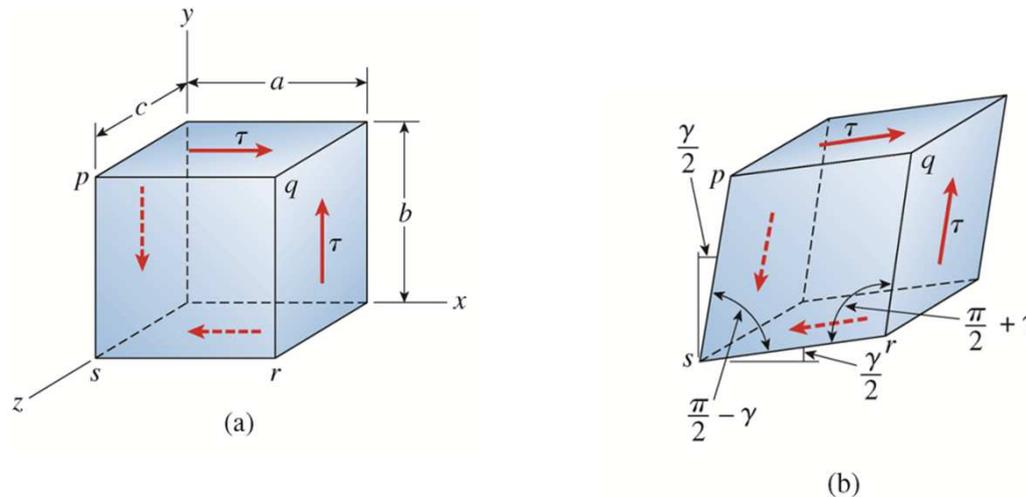
As tensões de cisalhamento são acompanhadas por deformações denominadas distorções que provocam mudanças na forma do elemento. A distorção será representada pela letra grega  $\gamma$  (gamma) e é definida como a mudança do ângulo entre duas direções que, na configuração de referência, eram ortogonais entre si.



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

A figura abaixo ilustra, por exemplo, a distorção que ocorre entre as direções  $x$  e  $y$ , a qual recebe estes índices como subscritos para que isto fique claro:  $\gamma_{xy}$  é, portanto, a distorção entre as fibras (inicialmente ortogonais entre si) que, na configuração de referência, eram paralelas aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Naturalmente, tal distorção está associada à tensão cisalhante que leva os mesmos subscritos:  $\tau_{xy}$  é a tensão de cisalhamento que age na face de normal  $\vec{n} = \vec{e}_x$  e que tem a direção do vetor  $\vec{e}_y$ ; já  $\tau_{yx}$  é a tensão de cisalhamento que age na face de normal  $\vec{n} = \vec{e}_y$  e que tem a direção do vetor  $\vec{e}_x$ . Como vimos antes, o equilíbrio de momentos impõe que  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . E também é óbvio que  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ .

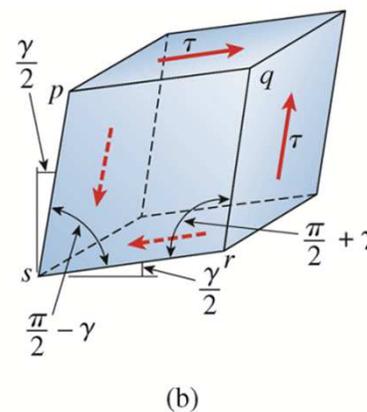
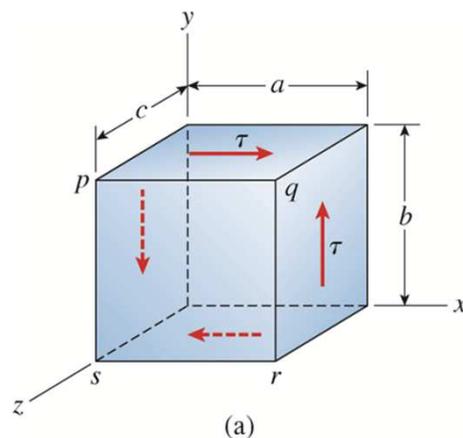




**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Denotando o ângulo final (na configuração deformada) entre os planos que antes formavam os planos  $xz$  e  $yz$  por  $\theta_{xy}$ , definimos a distorção associada  $\gamma_{xy}$  como:

$$\theta_{xy} + \gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta_{xy}$$

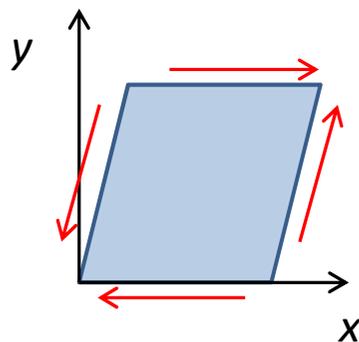


Assim, se o ângulo final entre as faces for menor do que  $\pi/2$ , teremos uma distorção positiva e, se o ângulo entre as faces for maior do que  $\pi/2$ , teremos uma distorção negativa.



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

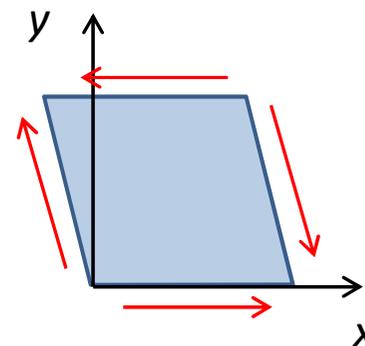
Exemplos:



Aqui:  $\theta_{xy} < \pi/2$

$$\gamma_{xy} > 0$$

$$\tau_{xy} > 0$$



Aqui:  $\theta_{xy} > \pi/2$

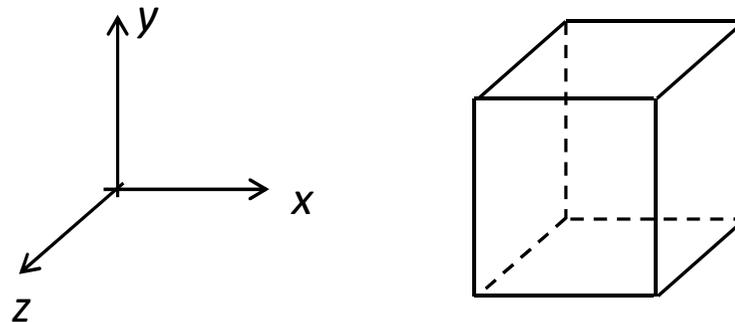
$$\gamma_{xy} < 0$$

$$\tau_{xy} < 0$$



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

Convenção de Sinais para Tensões Cisalhantes:



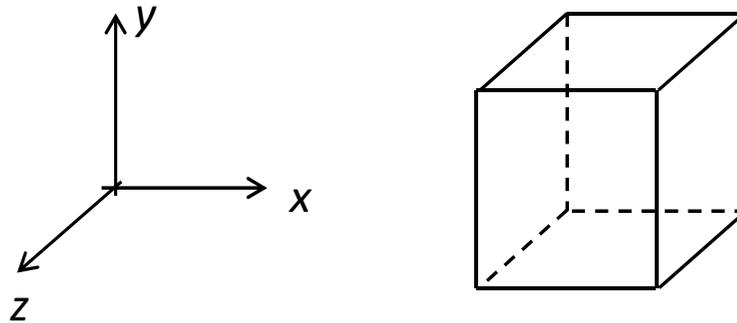
Faces de orientação positiva: são aquelas cuja normal externa tem o mesmo sentido de um dos eixos coordenados. Na figura acima, as três faces “visíveis” são as de orientação positiva (normais externas são:  $+\vec{e}_x$ ,  $+\vec{e}_y$  ou  $+\vec{e}_z$ )

Faces de orientação negativa: são aquelas cuja normal externa tem o sentido contrário a um dos eixos coordenados. Na figura acima, as três faces “invisíveis” são as de orientação negativa (normais externas são:  $-\vec{e}_x$ ,  $-\vec{e}_y$  ou  $-\vec{e}_z$ ).



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

Convenção de Sinais para Tensões Cisalhantes:



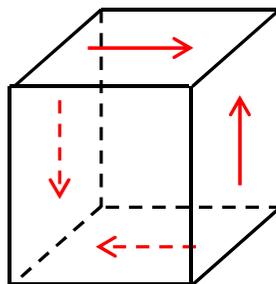
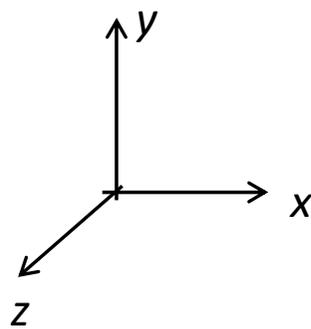
Nas faces de orientação positiva, as tensões cisalhantes que possuírem os mesmos sentidos dos eixos coordenados serão consideradas positivas, e aquelas que possuírem sentidos contrários aos eixos coordenados serão consideradas negativas.

Já nas faces de orientação negativa, ocorre o contrário: as tensões cisalhantes que possuírem sentidos contrários aos dos eixos coordenados serão consideradas positivas, e aquelas que possuírem os mesmos sentidos dos eixos coordenados serão consideradas negativas.

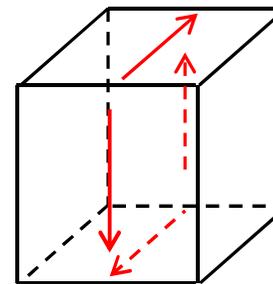


*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

Exemplo:



(1)



(2)

No elemento (1), todas as quatro tensões cisalhantes indicadas são positivas ( $\tau_{xy} = \tau_{yx} > 0$ ).

Já no elemento (2), todas as quatro tensões cisalhantes indicadas são negativas ( $\tau_{zy} = \tau_{yz} < 0$ ).



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

Lei de Hooke em Cisalhamento:

De forma análoga à relação vista entre a tensão normal ( $\sigma$ ) e o alongamento unitário ( $\varepsilon$ ) medido na mesma direção de aplicação da tensão normal, em que admitimos a linearidade entre as duas grandezas na forma:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

...também é possível verificar que o mesmo vale para a relação entre a tensão cisalhante ( $\tau$ ) e a distorção associada ( $\gamma$ ). A constante de proporcionalidade encontrada neste caso ( $G$ ) é denominada módulo de elasticidade transversal (ou módulo de cisalhamento):

$$\tau = G\gamma$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Observações:

1. Unidades no S.I.:

$$[\tau] = \frac{N}{m^2} = Pa, \quad [\gamma] = rad, \quad [G] = \frac{N}{m^2} = Pa$$

2. Pode-se demonstrar que, para materiais homogêneos e isotrópicos, o módulo de cisalhamento ( $G$ ) está relacionado ao módulo de elasticidade ( $E$ ) e ao coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) pela seguinte relação:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

### *3. Tensões e Cargas Admissíveis*

Como já visto, uma estrutura é, em linhas gerais, *qualquer objeto capaz de suportar e transmitir cargas*.

Se a falha estrutural deve ser evitada, as cargas que a estrutura é capaz de suportar devem ser maiores que as cargas às quais a estrutura será submetida quando utilizada.

Como *resistência* é a capacidade de uma estrutura de resistir cargas, podemos também afirmar que: *a resistência real de uma estrutura deve exceder a resistência exigida*.

Assim, definimos o fator de segurança de uma estrutura pela razão:

$$\text{Fator de segurança} = FS = n = \frac{\text{Resistência Real}}{\text{Resistência Exigida}}$$

Naturalmente, o fator de segurança deve ser sempre maior que 1, a fim de evitar falhas. Dependendo das circunstâncias, fatores de segurança ligeiramente acima de 1 até quase 10 são utilizados.



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Definimos a margem de segurança de uma estrutura por:

$$\text{Margem de Segurança} = MS = n - 1$$

Assim, se, por exemplo, uma determinada estrutura possui uma resistência real que é o dobro da resistência exigida, ela terá um fator de segurança igual a 2 ( $n = 2$ ), e uma margem de segurança igual a 1 (ou seja, de 100%).

*Tensões Admissíveis:*

Para muitas estruturas, é importante que o material permaneça no regime elástico linear a fim de que sejam evitadas deformações permanentes quando as cargas são removidas. Nesta condições, o fator de segurança é estabelecido em relação ao escoamento na estrutura, que tem início quando a *tensão de escoamento é alcançada em qualquer ponto da estrutura* (geralmente nos pontos de maior sollicitação, denominados *pontos críticos*).



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Como,

$$n = \frac{\textit{Resistência Real}}{\textit{Resistência Exigida}} = \frac{\textit{Cargas máximas que podem ser aplicadas}}{\textit{Cargas efetivamente aplicadas}}$$

Então, considerando que a carga máxima que pode ser aplicada à estrutura é aquela que levará o ponto mais solicitado ao início de escoamento e que as cargas efetivamente aplicadas na estrutura levam a uma tensão (no ponto crítico) que é proporcional a elas, podemos escrever:

$$n = \frac{\textit{Tensão de escoamento do material}}{\textit{Tensão no ponto crítico}}$$

Ou ainda:

$$\textit{Tensão no ponto crítico} = \frac{\textit{Tensão de escoamento do material}}{n}$$

↓  
*Tensão admissível*



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Assim, se tivermos, por exemplo, uma estrutura fabricada com um determinado aço que possua uma tensão de escoamento de 250 MPa e o coeficiente de segurança desejado for  $n = 2$ , isto significa que a tensão admissível que pode ocorrer no ponto mais solicitado da estrutura durante a utilização da mesma é:

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{n} = \frac{250 \text{ MPa}}{2} = 125 \text{ MPa}$$

**Cargas Admissíveis:**

Nos casos mais simples, onde é possível admitir que a distribuição de tensões na estrutura é praticamente uniforme (como nos casos das barras sob tração ou compressão ou ainda, de forma simplificada, como nos casos das tensões de cisalhamento médias em pinos e parafusos), teremos:

$$\sigma_{adm} = \frac{P_{adm}}{A} \Leftrightarrow P_{adm} = (\sigma_{adm})A$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

#### **4. Dimensionamento para Cargas Axiais e Cisalhamento Puro**

O processo de determinação da resposta de uma estrutura dada (com material já selecionado e com propriedades mecânicas conhecidas), com geometria conhecida (comprimentos, diâmetros, espessuras, etc.) sob a ação de carregamentos determinados (forças concentradas ou distribuídas, porém conhecidas), e com condições de contorno também conhecidas, é denominado Análise. Como “resposta da estrutura”, queremos dizer “tensões, deformações e deslocamentos” produzidas pelas cargas.

O processo inverso é denominado Dimensionamento. Ao dimensionar uma estrutura, devemos determinar suas propriedades para que ela suporte as cargas de tal forma que a tensão admissível não seja superada.

Novamente, nos casos mais simples, onde é possível admitir que a distribuição de tensões na estrutura é praticamente uniforme, teremos:

$$\sigma_{adm} = \frac{P_{adm}}{A} \Leftrightarrow A = \frac{P_{adm}}{\sigma_{adm}}$$



***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

**Observações Adicionais:**

1. Adicionalmente às considerações de resistência, no dimensionamento de uma estrutura é importante que outros requisitos (como a rigidez e a estabilidade estrutural) também sejam devidamente considerados. A rigidez refere-se à capacidade da estrutura de resistir a mudanças na forma e é muito importante tanto na estática quanto na análise dinâmica da estrutura (determinação dos modos e frequências de vibração). Já a estabilidade está associada à perda da capacidade da estrutura em resistir a esforços de compressão (localmente ou globalmente);
2. Outra parte do processo de dimensionamento é a otimização, que busca dimensionar a estrutura para que resista aos esforços previstos e que tenha o menor peso possível (maior eficiência estrutural);



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Observações Adicionais:

3. Ao analisar ou dimensionar uma estrutura, nos referimos às forças que atuam sobre ela como **cargas** ou **reações**. Cargas são *forças ativas* aplicadas à estrutura por alguma causa externa, como gravidade, pressão exercida por algum fluido, movimentações do solo (recalques ou vibrações), variações de temperatura, etc. Reações são *forças passivas* induzidas nos suportes da estrutura e são necessárias para garantir o equilíbrio (em condições estáticas ou dinâmicas).



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

Referências:

- [1] Gere, J.M.; Goodno, B.J.; Mecânica dos Materiais, Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p.
- [2] <http://www.matweb.com>
- [3] [https://pt.wikipedia.org/wiki/Coeficiente de Poisson](https://pt.wikipedia.org/wiki/Coeficiente_de_Poisson)
- [4] <https://en.wikipedia.org/wiki/Auxetics>
- [5] <https://www.youtube.com/watch?v=Fbqn-swwf-Q>
- [6] Colpaert, H. Metalografia dos Produtos Siderúrgicos Comuns, 4ª ed., Ed. Blücher, 2008.
- [7] Carvalho, F.M.; Braga, A.P.; Nishikawa, A.S., Goldenstein, H. Efeito do Molibdênio, Boro e Nióbio na Transformação Bainítica no Resfriamento Contínuo. In: 73º Congresso Anual da ABM, 2018, São Paulo, SP, Brasil.