

# Radiação de corpo negro

Antes um pouco de Mecânica Estatística

## Equipartição de Energia

"a cada coordenada quadrática de  $E(\vec{p}, \vec{r})$  associamos  $\frac{1}{2} kT$  a  $\bar{E}$ "

exemplo:  $N$  partículas livres em 3d

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} (p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2)$$

$$\bar{E} = N \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} kT$$

↑  
3 coord. quadráticas

Em 1mol,  $\bar{E} = \frac{3}{2} N_A k T = \frac{3}{2} R T$ ,  $R = N_A \cdot k$

## Fator de Boltzmann

"Num sistema de  $N$  partículas, a probabilidade de encontrar 1 com  $(\vec{p}, \vec{p} + d^3p)$   
 $(\vec{r}, \vec{r} + d^3r)$

$$e' \quad dP = \frac{e^{-\beta E(\vec{p}, \vec{r})}}{\mathcal{Z}} d^3p d^3r$$

Como  $\int dP = 1 \Rightarrow \mathcal{Z} = \int e^{-\beta E(\vec{p}, \vec{r})} d^3p d^3r$

Função de  
partição //

## Energia Média

$$\bar{E} = \int E dP = \int E \frac{e^{-\beta E}}{Z} d^3p d^3r = \frac{-1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \underbrace{\int e^{-\beta E} d^3p d^3r}_Z$$

$$\bar{E} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} Z = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

veja a importância de  $Z$

## Exemplos

- 1 partícula em 1d:  $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

$$Z = \int dp_x dx e^{-\beta \left( \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dp_x e^{-\beta \frac{p_x^2}{2m}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\beta \frac{1}{2} m \omega^2 x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta/2m}} \sqrt{\frac{\pi}{\beta m \omega^2/2}}$$

$$\ln Z = -\frac{1}{2} \ln \beta - \frac{1}{2} \ln \beta + \text{cte}$$

$$\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\beta} = \frac{KT}{2} + \frac{KT}{2} = KT$$

veio de  $p_x^2$

veio de  $x^2$

- 1 partícula em 3d:  $E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{r}^2$

$$\bar{E} = 3 \frac{1}{2} KT + 3 \frac{1}{2} KT = 3 KT$$

$p_x^2, p_y^2, p_z^2$

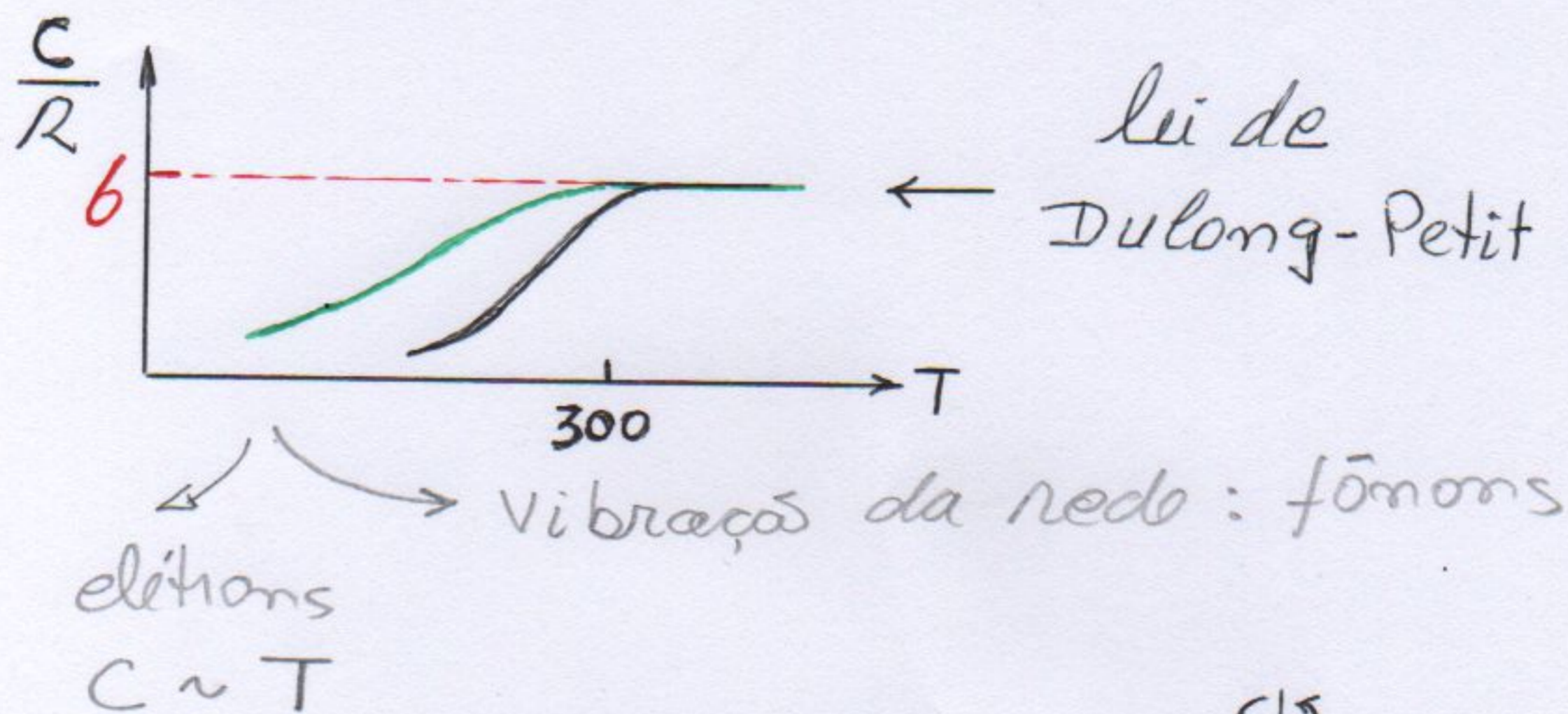
$x^2, y^2, z^2$

$N_A$  osciladores em 3d:

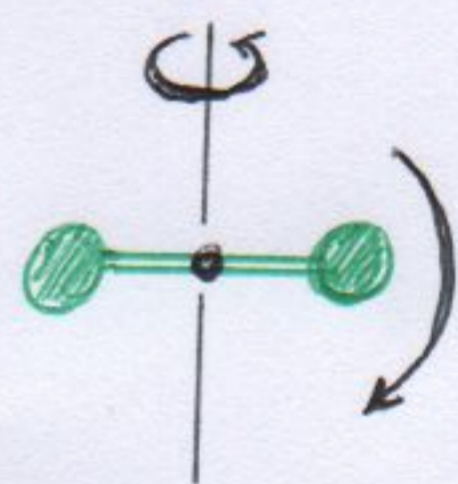
$$\bar{E} = N_A \cdot 3kT = 3RT$$

$$C = \frac{d\bar{E}}{dT} = 3R \sim \underline{\underline{6 \text{ cal/mol-K}}}$$

Sólidos:



Moléculas diatômicas rígidas:



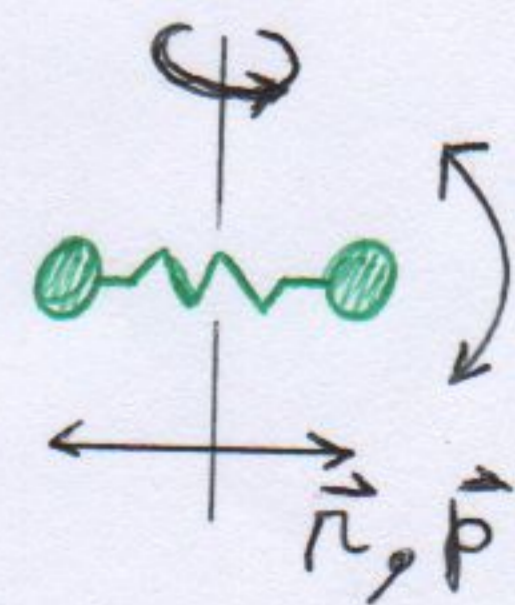
$$E = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2$$

$\Rightarrow$  5 coord. quadráticas

$$\Rightarrow \bar{E} = N_A \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} kT = \frac{5}{2} RT$$

$$C = \frac{5}{2} R$$

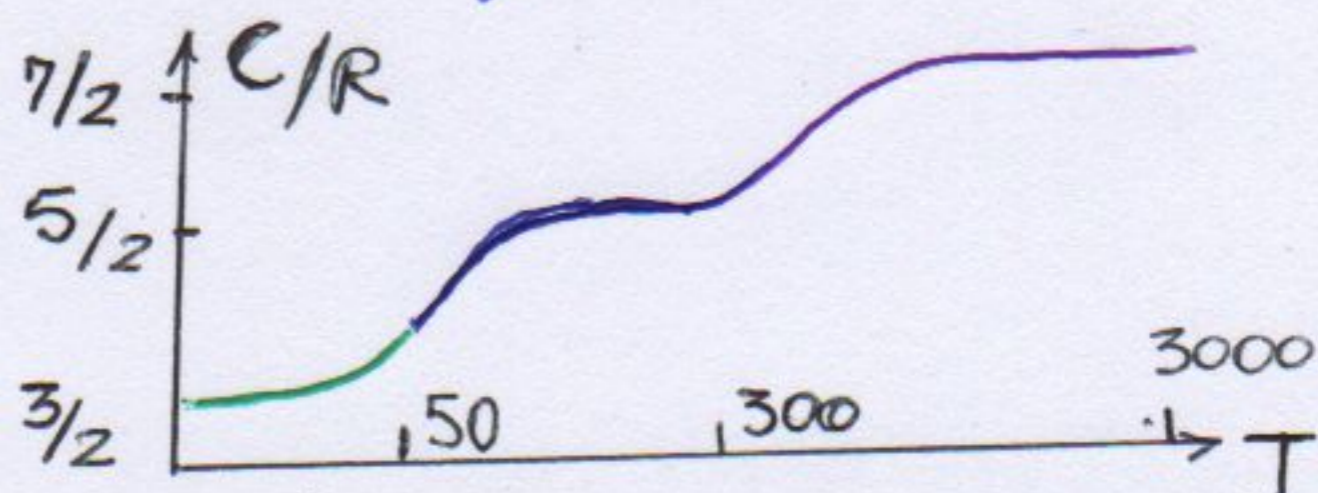
Moléculas diatômicas não rígidas



$$E = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \Rightarrow 7 \text{ "graus"}$$

$$\bar{E} = \frac{7}{2} kT \Rightarrow C = \frac{7}{2} R$$



## Definição de corpo negro


Até final do séc. XIX o estudo da radiação emitida por corpos aquecidos derivava a Mecânica Clássica.

Esse estudo juntou M.C., Eletrom., Termod. e Mec. Estat.  $\Rightarrow$  originou a Quântica

Prévost, 1809 : no equil. térmico cada corpo emite o que recebe!  
 $\uparrow$  Maxwell: rad. eletrom.

Poder de emissão  $e_\nu(T)$


fluxo: energia por unidade de área, tempo e no intervalo  $(\nu, \nu + d\nu)$



The diagram shows a small square area labeled 'da' inside a larger irregular shape representing a body at temperature 'T'. Three arrows point upwards from the square, representing the emission of radiation.

Poder de absorção  $a_\nu(T)$   $0 \leq a_\nu \leq 1$

fração de energia absorvida



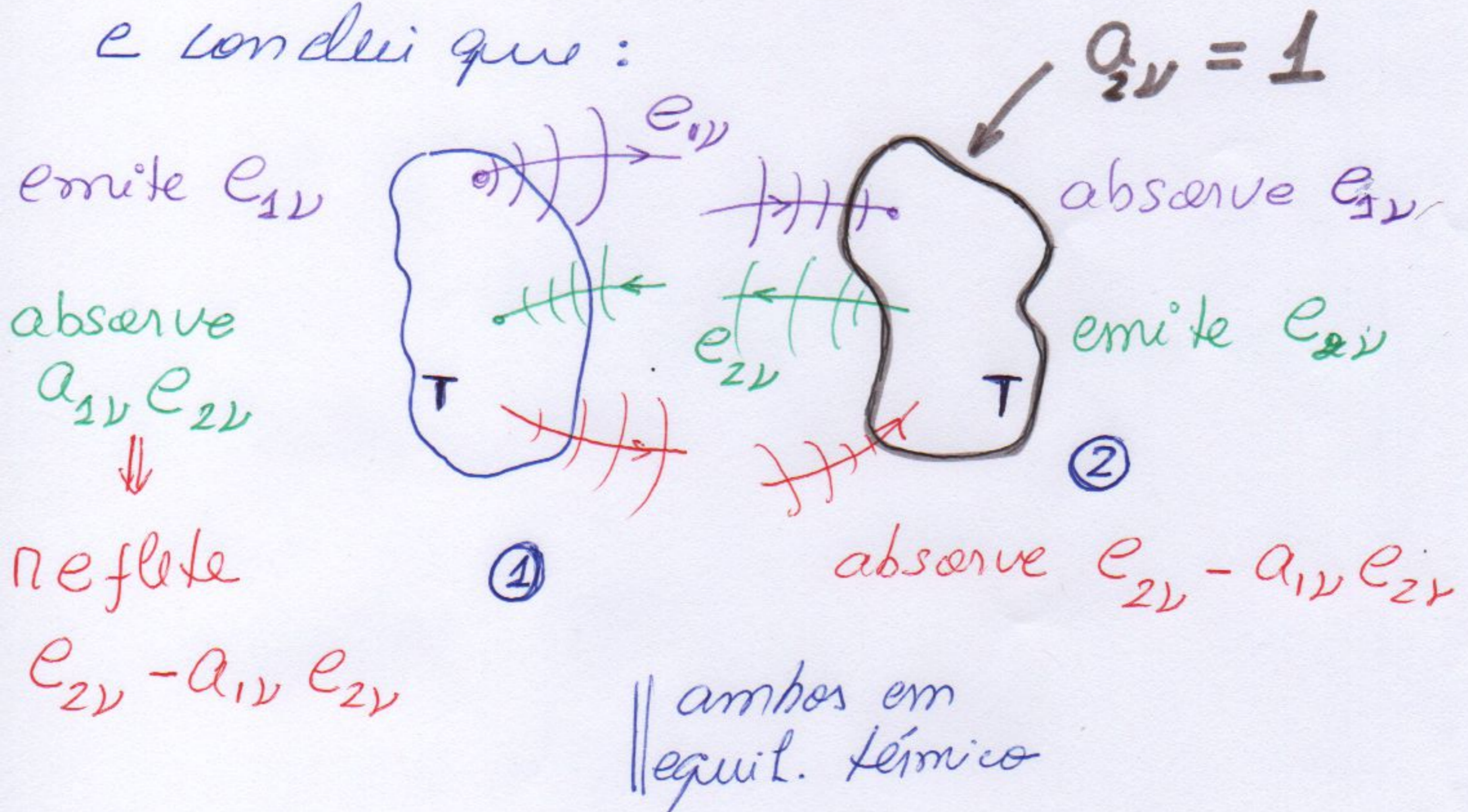
The diagram shows a body labeled 'T' with a downward arrow representing incident radiation  $E_\nu$ . A smaller downward arrow below it represents reflected radiation  $E_\nu - a_\nu \cdot E_\nu$ .

reflete  $E_\nu - a_\nu \cdot E_\nu$

# Kirchhoff, 1859-1860

corpo negro  $a_\nu(T) = 1$

e conclui que:



total observado por (2) :  $e_{1\nu} + e_{2\nu} - a_{1\nu}e_{2\nu}$

total emitido por (2) :  $e_{2\nu}$

$$\Rightarrow e_{2\nu} = e_{1\nu} + e_{2\nu} - a_{1\nu}e_{2\nu}$$

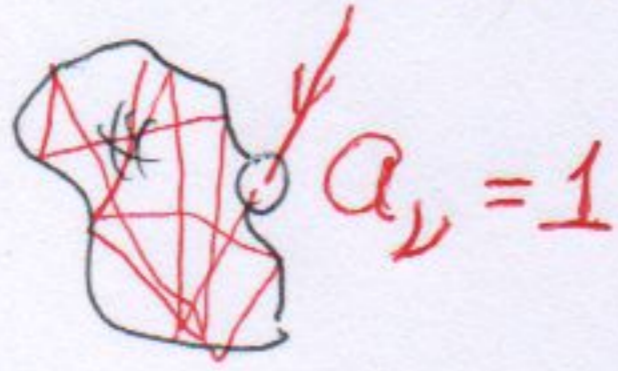
$$\Rightarrow \frac{e_{1\nu}}{a_{1\nu}} = e_{2\nu} = \text{função universal de } \nu \text{ e } T$$

$$\left( \text{em geral, } \frac{e_{1\nu}}{a_{1\nu}} = \frac{e_{2\nu}}{a_{2\nu}} \right)$$

Assim, "o poder do emissão de um corpo negro é função universal de  $\nu$  e  $T$ ".

A gente agora é { determinar experimentalmente  $e_\nu$   
 elaborar modelos para  $e_\nu$

Kirchhoff, de novo!



o buracozinho é um corpo negro!

Então, vamos estudar a radiação em equilíbrio térmico dentro da cavidade.

Seja  $u_\nu(T)$  a energia/volume no intervalo  $(\nu, \nu + d\nu)$  ← densidade

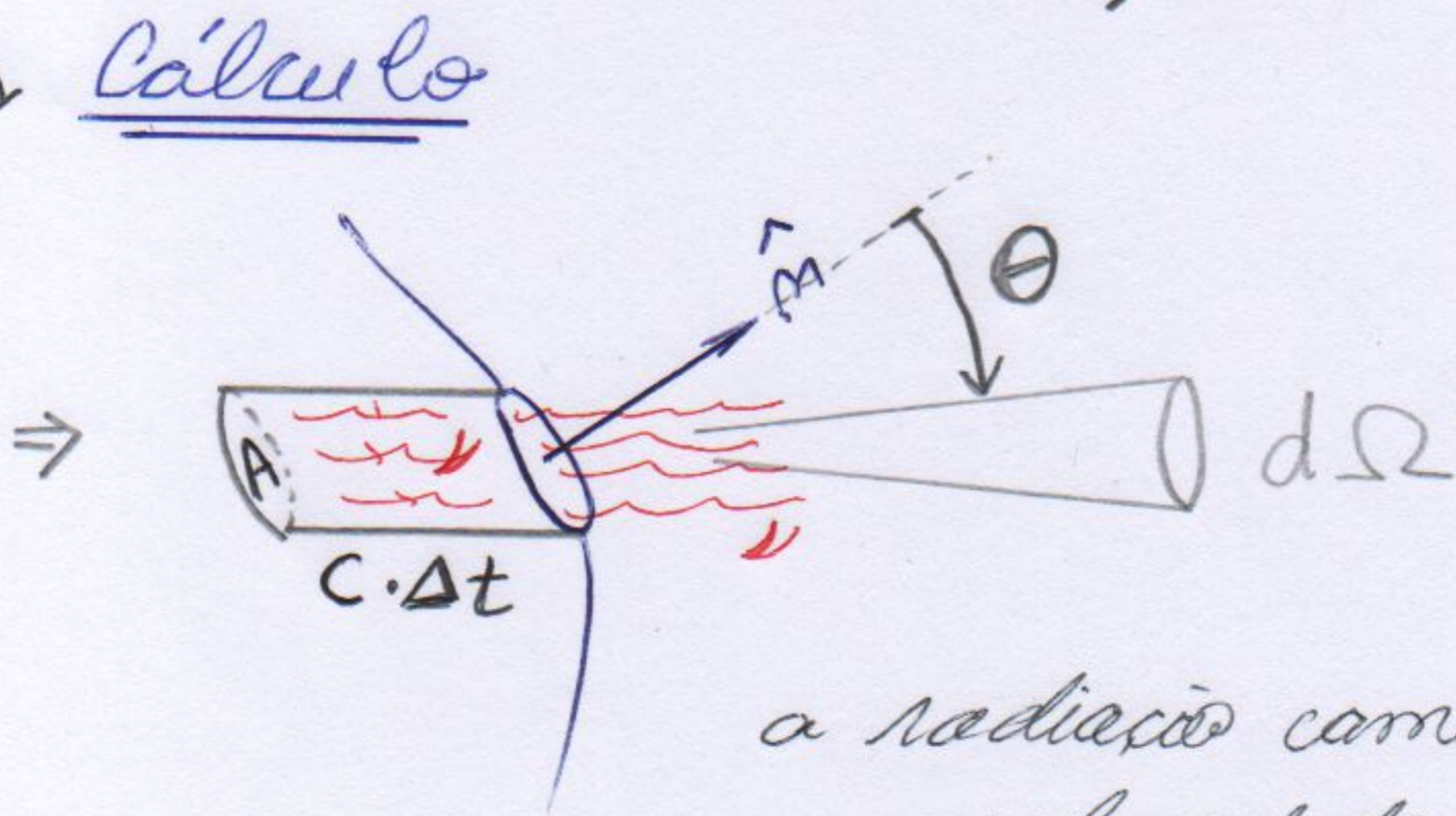
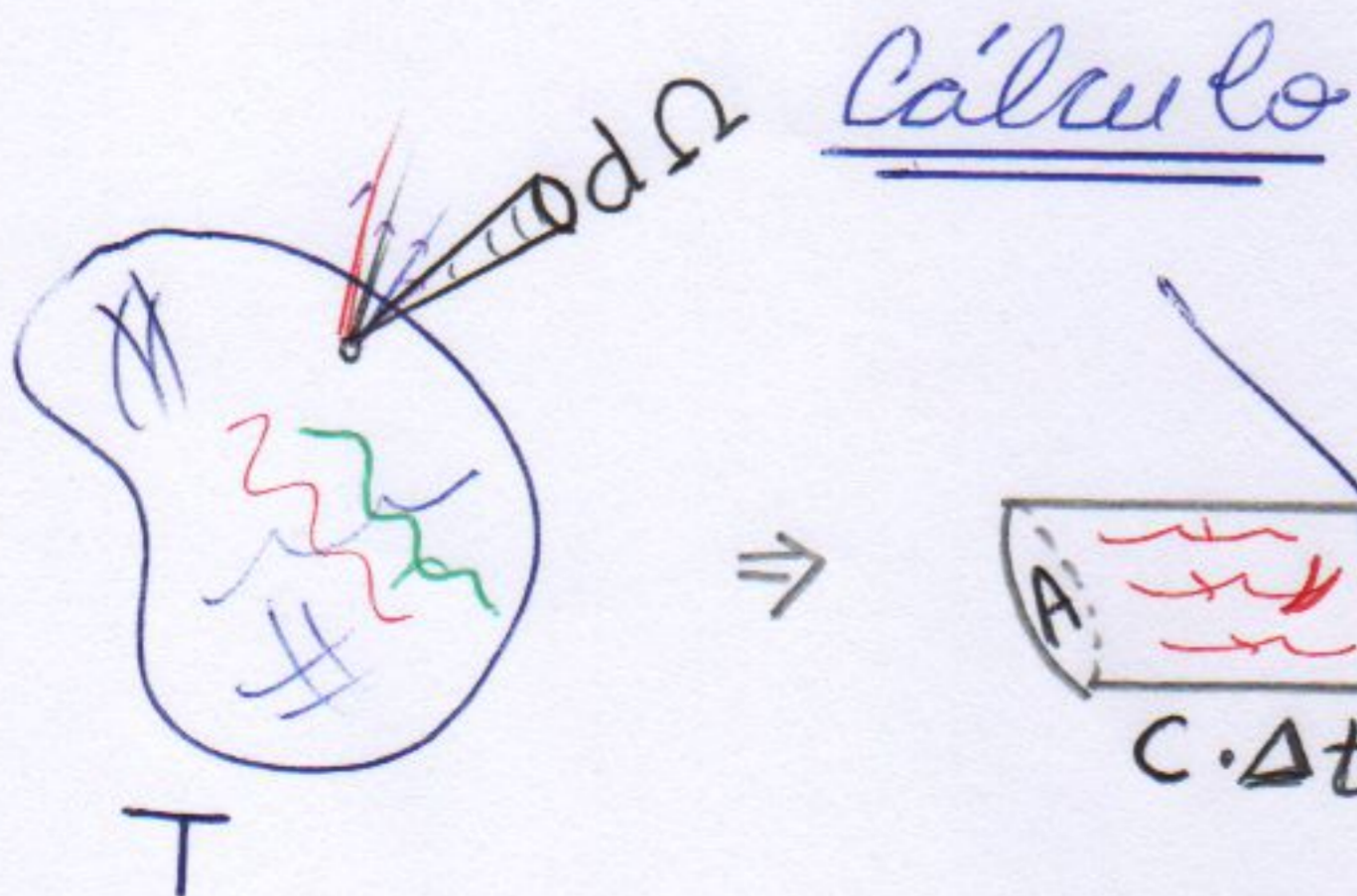
Relação entre  $e_\nu$  e  $u_\nu$

("brincando" com unidades)

$$\frac{[e_\nu]}{[u_\nu]} = \frac{\text{energia/área-tempo-freq.}}{\text{energia/volume-freq.}} = \frac{L}{T} : \text{Velocidade}$$

↑  
qual?

esperamos  $e_\nu \sim c \cdot u_\nu$



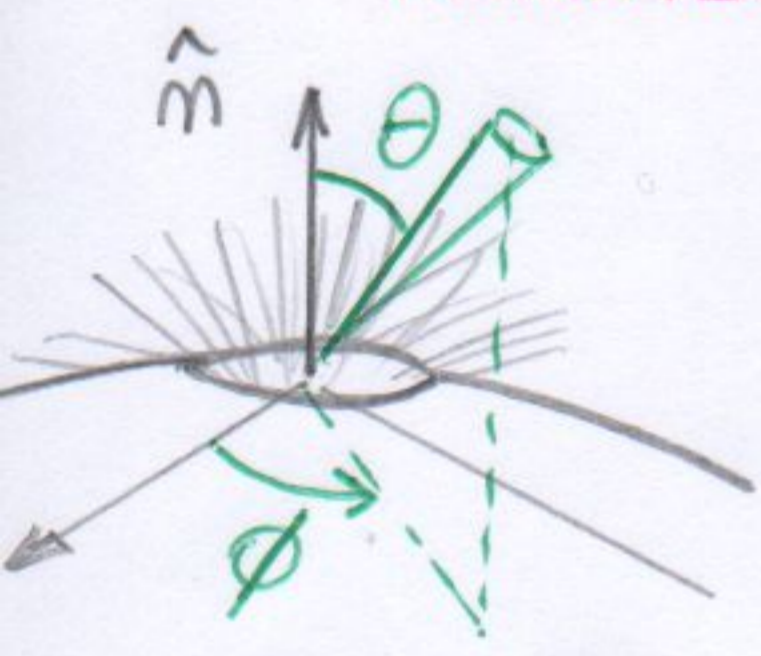
a radiação caminha com velocidade  $c$

Em  $\Delta t$  segundos sai na direção  $d\Omega$   
 toda radiação dentro do cilindro de  
 altura  $c \cdot \Delta t$ , volume  $c \Delta t A \cos \theta$ , e  
 que caminha na direção  $d\Omega$  :

$$\underbrace{\mu_\nu}_{\text{densidade}} \cdot \underbrace{c \Delta t A \cos \theta}_{\text{Volume}} \underbrace{dV \frac{d\Omega}{4\pi}}_{\text{fracção que caminha na direção } d\Omega}$$

Então, sai pelo hemisfério

$$\int_{\text{hemisfério}} \mu_\nu \cdot c \Delta t A \cos \theta dV \frac{d\Omega}{4\pi}$$
 , que é igual a



$$E_\nu \cdot A \cdot \Delta t \cdot dV$$
 ↑  
 fluxo

Então,

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \mu_\nu \cdot c \Delta t A \cos \theta dV \sin \theta d\theta d\phi = E_\nu \cdot A \Delta t \cdot dV$$

$$\Rightarrow \underline{E_\nu(T) = \frac{c}{4} \mu_\nu(T)}$$

↑  
 $t_b$   
 universal!

A função  $u_\nu(\tau)$  é descoberta por Planck, em 1900; e que se sabia antes!

### Lei de Stefan - Boltzmann - 1879

"a energia total (no espectro) irradiada por um corpo negro é  $\sim T^4$ "

$$R = \int_0^\infty e_\nu(\tau) d\nu = \underline{\underline{\sigma T^4}}, \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$$

Boltzmann mostrou isto utilizando termodinâmica, em 1884.

### Lei do deslocamento de Wien - 1893

"a frequência onde ocorre a maior densidade  $u(\tau)$  é"

$$\underline{\underline{\nu_m = b \cdot T}}, \quad b = 0,59 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$\left( \text{ou } \lambda_m = c \cdot t / T, \quad c \cdot t = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \right)$$

Wien, 1893



Doppler + termod.  $\Rightarrow \underline{\underline{u_\nu = \nu^3 \cdot f(\nu/T)}}$



## Consequências de $u(\nu) = \nu^3 f(\nu/T)$

- Lei do deslocamento:

$$\begin{aligned} \frac{d u_\nu}{d \nu} &= 3 \nu^2 f(\nu/T) + \nu^3 \frac{d}{d \nu} f(\nu/T) = \quad \swarrow \xi = \frac{\nu}{T} \\ &= 3(\xi T)^2 f(\xi) + (\xi T)^3 \frac{1}{T} f'(\xi) \end{aligned}$$

que é nula no pto do máximo  $\nu_m = \xi_m \cdot T$ :

$$3 f(\xi_m) + \xi_m f'(\xi_m) = 0 \Rightarrow \frac{\nu_m}{T} = \underbrace{\xi_m}_{\text{raiz}} \leftarrow n^\circ$$

- Stefan Boltzmann:

$$\begin{aligned} u &= \int_0^\infty u_\nu(T) d\nu = \int \nu^3 f(\nu/T) d\nu = \quad \swarrow \xi = \nu/T \\ &= \int_0^\infty (\xi T)^3 f(\xi) \cdot T d\xi = T^4 \int_0^\infty \xi^3 f(\xi) d\xi = \sigma' T^4 \end{aligned}$$

ou

$$R = \int e_\nu d\nu = \int \frac{c}{4} u_\nu d\nu = \underline{\underline{\sigma T^4}}$$

Wien - 1896

$$\underline{\underline{u = A \nu^3 e^{-B\nu/T}}}$$

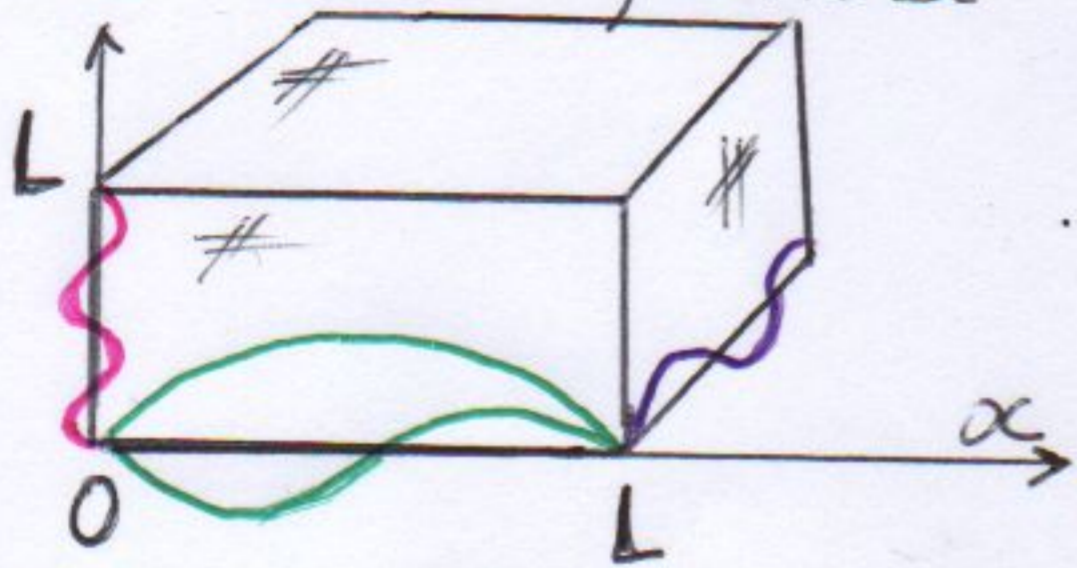
com A e B ajustáveis.

- Muito bom p/  $\nu \gg \nu_m$
- Falha p/  $\nu \lesssim \nu_m$

Lord Rayleigh e Sir J. Jeans  
1900 1905

obtemos  $\mu_p(\tau)$  b/  $\nu < \nu_m$

Visto que  $\mu_p(\tau)$  independe do material, e de sua forma vamos adotar p/ cálculo



com modos normais de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$

caixa cúbica metálica

$$E_z = E_{0z} \sin(k_x x - \omega t) \begin{cases} k = 2\pi/\lambda \\ \omega = 2\pi\nu, \nu = 1/\tau \\ \lambda \cdot \nu = c \end{cases}$$

onda estacionária:  $E(x=0, t) = E(x=L, t) = 0$

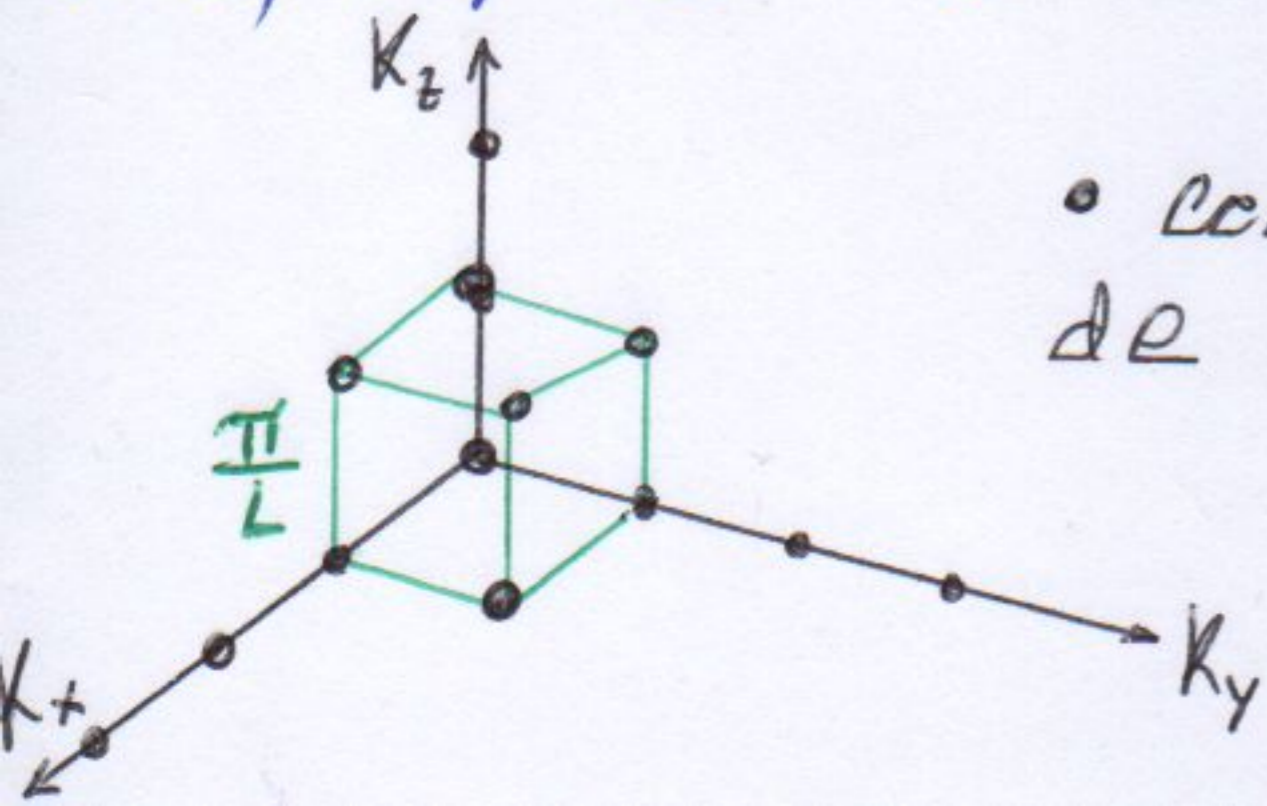


$$\sin k_x L = 0 \Rightarrow \underline{k_x L = M_x \pi}$$

analogamente  $\underline{k_y L = M_y \pi}$  e  $\underline{k_z L = M_z \pi}$ .

$$\Rightarrow k_x = \frac{\pi}{L} M_x, \quad k_y = \frac{\pi}{L} M_y \quad \text{e} \quad k_z = \frac{\pi}{L} M_z, \quad \text{com}$$

$M_x, M_y$  ou  $M_z = 0, 1, 2, \dots$



• cada pto (estado) é vértice de oito cubos.

• então, ao volume  $(\frac{\pi}{L})^3$  do espaço  $k$  corresponde 1 estado

Então, a densidade de estados no espaço  $k$  é

$$\frac{1}{(\pi/L)^3} = \frac{V}{\pi^3}$$

Assim, o número de estados numa esfera de raio  $k$  é

$$N_k = \underbrace{\frac{1}{8}}_{\substack{\text{1º quadrante,} \\ k_i > 0}} \cdot \underbrace{2}_{E \text{ e } B} \cdot \frac{4\pi}{3} k^3 \cdot \frac{V}{\pi^3} = \frac{V k^3}{3\pi^2} = \frac{8\pi}{3c^3} V \nu^3$$

↑ volume no espaço  $k$ 
↑ densidade

∴, o n.º de modos normais com  $(\nu, \nu + d\nu)$  é

$$dN_\nu = \frac{8\pi}{c^3} V \nu^2 d\nu$$

Assim,

$$u_\nu(T) = \frac{dN_\nu \cdot KT}{V \cdot d\nu} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 KT$$

⇒ Usamos que  $\bar{E} = KT$  ↑

o resultado obedece a forma de Wien:

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^3 \cdot \left( \frac{KT}{\nu} \right) \leftarrow f(\nu/T)$$

Mas,

$$\int_0^\infty u_\nu(T) d\nu \rightarrow \infty$$

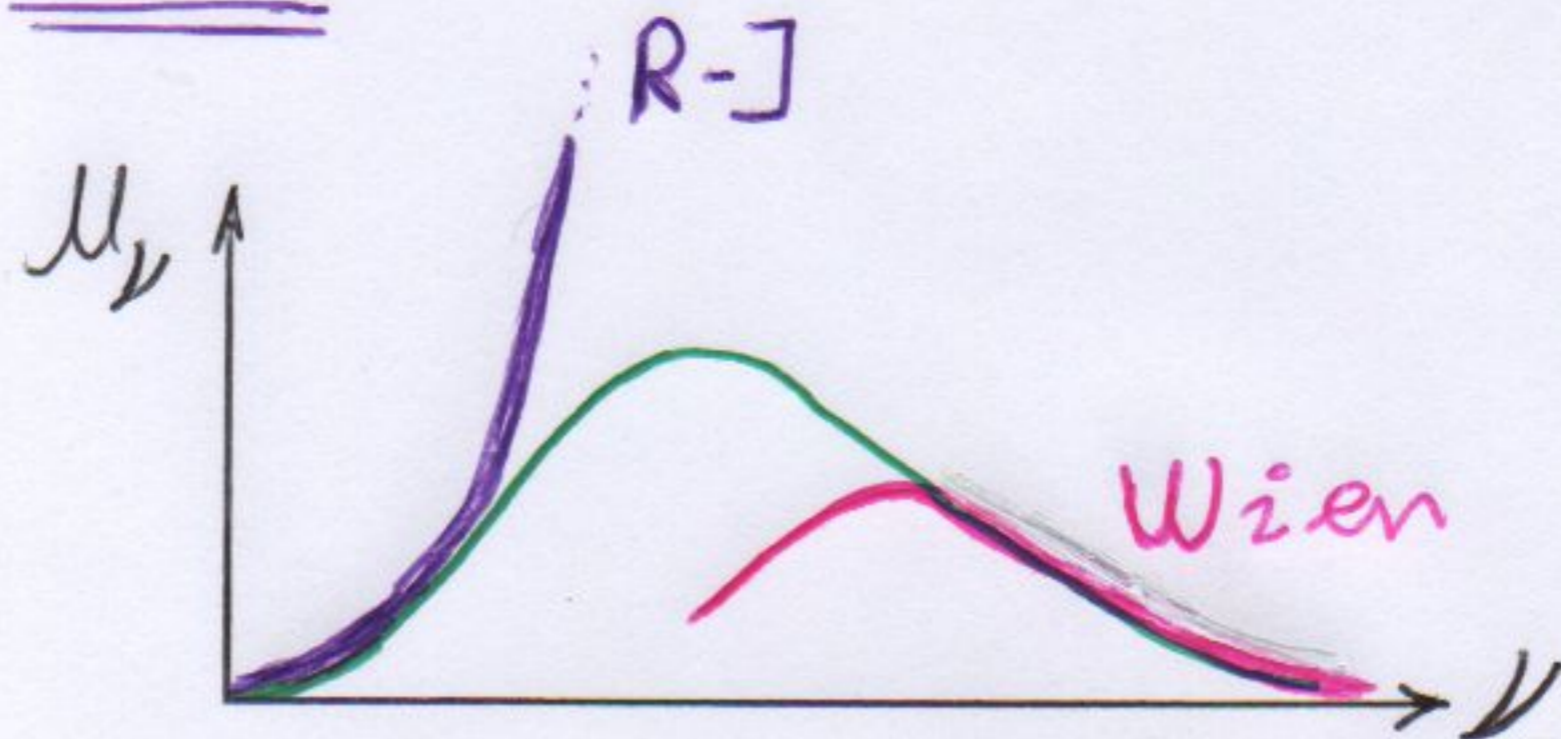
catástrofe do ultravioleta!

- o n.º de modos normais cresce com  $\nu$
- cada modo troca  $KT$  ← suspiro!

# Max Karl Ernst Ludwig Planck

1900

Na época,



exp.:

Lumer, Wien,  
Pringsheim e  
Rubens

## Fórmula empírica

Planck notou que os dois limites conhecidos,

$$\nu \rightarrow 0, \text{ R-J}, \quad u_\nu \sim \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 kT$$

$$\nu \rightarrow \infty, \text{ Wien}, \quad u_\nu \sim A \nu^3 e^{-B\nu/T},$$

podiam ser obtidos da função

$$A \nu^3 \frac{1}{e^{a\nu} - 1} \rightarrow \begin{cases} \frac{A}{a} \nu^2, & \nu \rightarrow 0 \\ A e^{-a\nu}, & \nu \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Então,

$$\frac{A}{a} = \frac{8\pi}{c^3} kT \quad \text{e} \quad a = \frac{B}{T}$$

$$\Rightarrow A = \frac{8\pi}{c^3} kT \cdot \frac{B}{T} = \frac{8\pi}{c^3} k \cdot B \equiv \frac{8\pi}{c^3} h.$$

Assim,

$$\underline{\underline{u(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}}}$$

o ajuste é perfeito!

• Obtendo a lei do deslocamento:

$$\left. \frac{dU_\nu}{d\nu} \right|_{\nu_m} = 0 \rightarrow \underbrace{3(1 - e^{-\alpha}) = \alpha}_{\text{solução}} \quad , \quad \alpha = \frac{h\nu_m}{kT}$$

solução  $\alpha \approx 2,82$

logo,  $\frac{h\nu_m}{kT} = 2,82 \Rightarrow \frac{\nu_m}{T} = \frac{2,82 k}{h} \equiv b = 0,59 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$

• Obtendo Stefan-Boltzmann:

$$R = \int_0^\infty e_\nu d\nu = \int_0^\infty \frac{c}{4} U_\nu d\nu = \frac{c}{4} \frac{8\pi}{c^3} h \left( \frac{kT}{h} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{2\pi}{c^2} \frac{k^4}{h^3} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}_{= \frac{\pi^4}{15}} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

Des valores experimentais de  $b$  e  $\sigma$ , Planck obtem  $h$  e  $k$

$h = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ erg/s}$

já conhecida na época:

$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

Veja que a função  $f(\nu/T)$  de Wien é

$$\frac{8\pi}{c^3} h \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \begin{cases} \sim \nu^{-1} kT, & \nu \rightarrow 0 : \text{R-J} \\ \sim e^{-h\nu/kT}, & \nu \rightarrow \infty : \text{Wien} \end{cases}$$

Planck queria uma justificativa para o sucesso de sua fórmula. Pensei:

a) a matéria é discreta: átomos

b) a carga é discreta:  $e^-$

Não seria também a energia?

Ele para a estudar a troca de energia dos "osciladores" da cavidade

se tiver  $\int E dP(E) = \bar{E}$  dá errado!

Então ele postula que

$$\underline{E_m = m \epsilon_0}$$

$$\bar{E} = \sum_{m=0}^{\infty} E_m P(E_m) = \sum_m E_m \frac{e^{-\beta E_m}}{Z} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z.$$

$$Z = \sum_m e^{-\beta E_m} = \sum_m x^m, \quad x \equiv e^{-\beta \epsilon_0}$$

$$Z = 1 + x + x^2 + \dots = 1 + x(1 + x + \dots) = 1 + x \cdot Z$$

$$\rightarrow \underline{Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_0}}}$$

$$\Rightarrow \bar{E} = \frac{\epsilon_0}{e^{\beta \epsilon_0} - 1}$$

$$\rightarrow \underline{u_\nu = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \frac{\epsilon_0}{e^{\beta \epsilon_0} - 1}}$$

De R-Jeans,  $u_\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \bar{E}$

De Wien  $u_\nu = A \nu^3 f(\nu/T) \Rightarrow \underline{\epsilon_0 = h\nu}$

$$\underline{E_m = m h\nu}$$

Então,

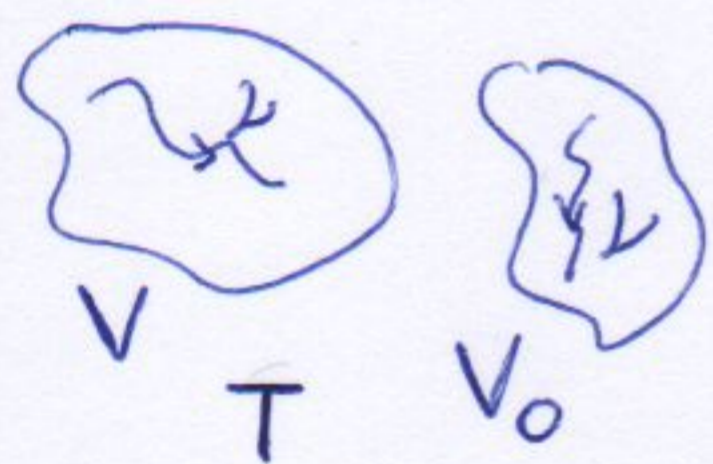
$$\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

P/  $h\nu \ll kT \Rightarrow \bar{E} = kT$  : R.-Jeans

P/  $h\nu \gg kT \Rightarrow \bar{E} = h\nu e^{-\beta h\nu}$  : Wien

## Interpretação de Einstein

Usando a expressão de Wien,  $\mu_\nu = A\nu^3 e^{-\beta h\nu}$ ,  
ele mostra que



$$S - S_0 = k \ln \left( \frac{V}{V_0} \right)^{\frac{\mu_\nu}{h\nu}} \quad \beta = \frac{h}{k}$$

Mas, p/ um gás ideal,

$$S - S_0 = k \ln \left( \frac{V}{V_0} \right)^N$$

Então, conclui que a radiação se comporta  
como um "gás" de partículas, tendo para  
cada modo normal  $\nu$ ,  $N_\nu$  delas (por volume):

$$\frac{\mu_\nu}{h\nu} = N_\nu \Rightarrow N_\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

nº de fótons, por volume,  
no intervalo  $(\nu, \nu + d\nu)$ .

Por que n̄ percebemos essa discretização  
nao dia-a-dia?

exemplo: lâmpada de 100W, e  $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ .  
Quos f̄tons s̄ emitidos?

• cada f̄ton tem energia  $h\nu = h\frac{c}{\lambda} =$   
 $= \frac{6,62 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{6000 \cdot 10^{-8}} \approx 3,3 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$

• 100 Watts = 100 J/s =  $100 \cdot 10^7 \text{ erg/s}$

Ento, o n̄ f̄tons emitidos por segundo e'

$$n^\circ = \frac{100 \cdot 10^7}{3,3 \cdot 10^{-12}} = 3 \cdot 10^{20} //$$

Ento, uns milhares a mais ou a menos  
n̄ faz diferenca!

Como a densidade de f̄tons depende do T

•  $u_\nu(T)$  e' energia/volume-freq.

• 1 f̄ton tem energia  $h\nu$

Ento  $u_\nu(T)/h\nu$  e' o n̄ f̄tons/volume-freq.

$$\frac{N_{\text{total}}}{V} = \int_0^\infty \frac{u_\nu(T)}{h\nu} d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 \frac{d\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad \leftarrow x \equiv \beta h\nu$$
$$= \frac{8\pi}{c^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = \sigma'' T^3$$

Universe  $T \sim 2,4 \text{ K} \rightarrow N/V \sim 10^8 \text{ f̄tons/m}^3$

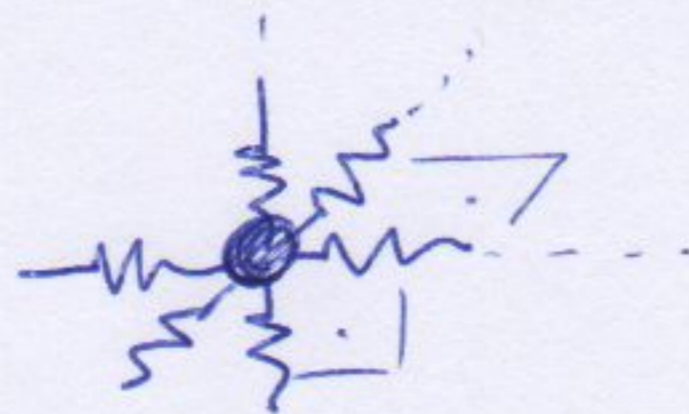


# Calor específico de sólidos

Retrospecto: 1819 Dulong - Petit

$$C_v = 6 \text{ cal/mol}\cdot\text{K} \quad \text{p/ } T \gg T_{amb}$$

Explicação clássica:



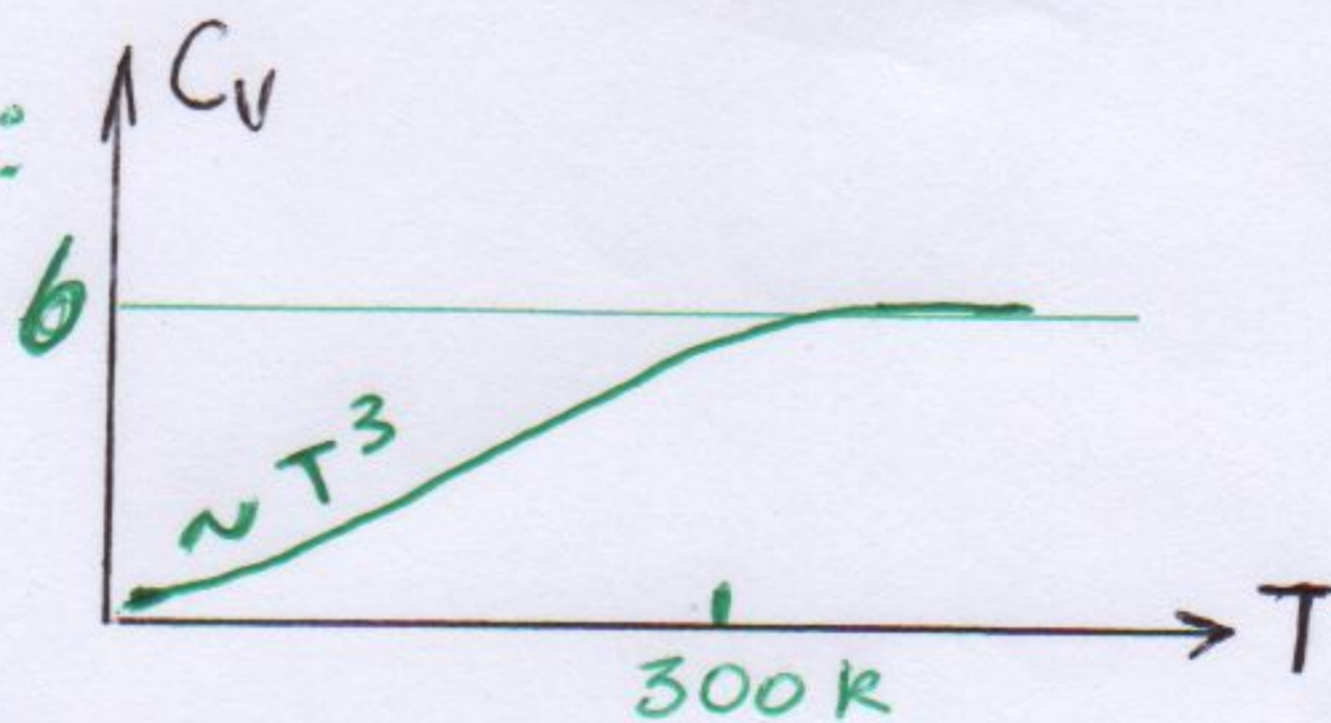
$$E = N_A \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2 \right)$$

→ 6 coord. quadráticas por partícula

$$\rightarrow U, \text{ ou } \bar{E}, = N_A \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} kT = 3RT$$

$$\rightarrow C_v = \frac{dU}{dT} = 3R \sim 6 \text{ cal/mol}\cdot\text{K}$$

Experimentalmente:



Einstein, 1906,

aplica ideia de Planck

a um sólido modelado como uma coleção de osciladores harmônicos:

$N_A$  osciladores de freq.  $\omega_0$ : ( $\omega = 2\pi\nu$ ;  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ )

$$U = 3N_A \frac{\hbar\omega_0}{e^{\beta\hbar\omega_0} - 1}$$

↳ seria  $kT$  na teoria clássica

$$C_v = \frac{dU}{dT} = \frac{3N_A(\hbar\omega_0)^2}{4kT^2} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT}\right)$$

$$p/ KT \gg h\omega_0$$

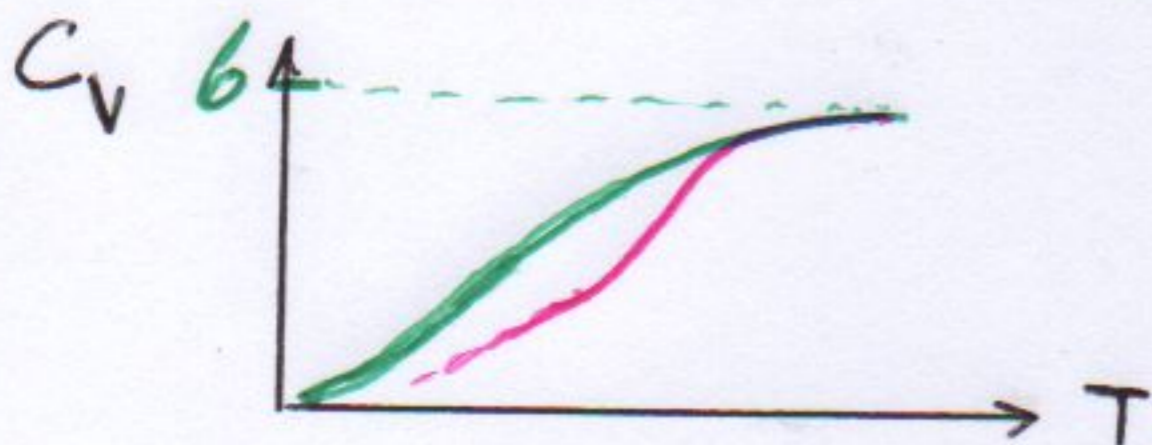
$$C_V \sim 3R$$

$$p/ KT \ll h\omega_0$$

$$C_V \sim \frac{1}{T^2} e^{-\frac{h\omega_0}{KT}}$$

hum,

± Sr. Einstein!

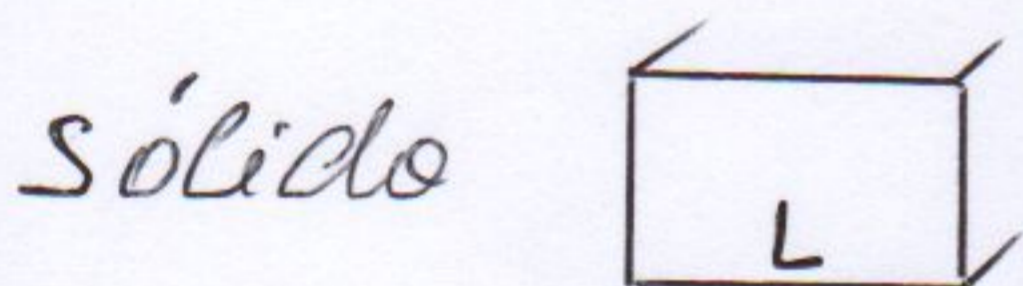


Vai a zero, mas  
n̄ como deveria!

pto fraco: todos os osciladores q  $\omega_0$ !

### Debye, 1913

Considere os modos normais do sólido.



do cálculo de R-T,

$$dN = \frac{4\pi}{v^3} V \cdot v^2 dv,$$

onde  $v$  é a velocidade da onda que origina o modo normal (a do som).

Num sólido, temos

1 polarização longitudinal :  $v_l$

2 " " transversais :  $v_t$

$$\text{Assim, } dN_v = \frac{4\pi}{v^3} V v^2 dv \cdot \left( \frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3} \right).$$

A energia do sólido é

$$U = \int_0^{v_{\max}} dN_v \cdot \underbrace{E(v)}_{= \frac{h\nu}}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

depende  
muito de  
cada sólido

De terminando  $\nu_{\max}$ :

e n.º total de modos é  $3N_A$ , logo,

$$\int_0^{\nu_{\max}} dN_{\nu} = 3N_A \Rightarrow \frac{4\pi}{3} V \left( \frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3} \right) \nu_{\max}^3 = 3N_A$$

denotando por  $x = \frac{h\nu}{kT}$  e  $\Theta = \frac{h\nu_{\max}}{k}$ ,

$$U = 3N_A k \cdot 3 \frac{T^4}{\Theta^3} \int_0^{\Theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

Limites:

1,  $T \gg \Theta$ :

$$\int_0^{\Theta/T \rightarrow 0} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \sim \int_0^{\Theta/T \rightarrow 0} \frac{x^3 dx}{x + x^2 + \dots} \sim \int_0^{\Theta/T \rightarrow 0} \frac{x^3 dx}{x} = \frac{\Theta^3}{3T^3}$$

$$\therefore U = 3R \frac{3T^4}{\Theta^3} \frac{\Theta^3}{3T^3} = 3RT \Rightarrow \underline{\underline{C_V = 3R}}$$

2,  $T \ll \Theta$

$$\int_0^{\Theta/T \rightarrow \infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \Rightarrow U = \frac{3\pi^4}{5} R \frac{T^4}{\Theta^3}$$

$$C_V = \frac{12}{5} \pi^4 R \left( \frac{T}{\Theta} \right)^3 \sim \underline{\underline{T^3}}$$