

# Quantização - Tipler - Cap. 3

## Quantização da massa:

Como ideia remonta à Grécia antiga, mas apenas no sec. XVII com Hooke e Gaspari que se tentou usar o conceito para explicar propriedades da matéria.

De forma mais efetiva, apenas em 1814 com Avogadro: em condições normais de temperatura e pressão um mesmo volume de gás contém o mesmo n.º de "partículas".

ou em 1859 com a teoria cinética dos gases:  $PV = nRT$ ,  $\bar{E} = \frac{3}{2}kT$   $\Leftarrow$  Maxwell

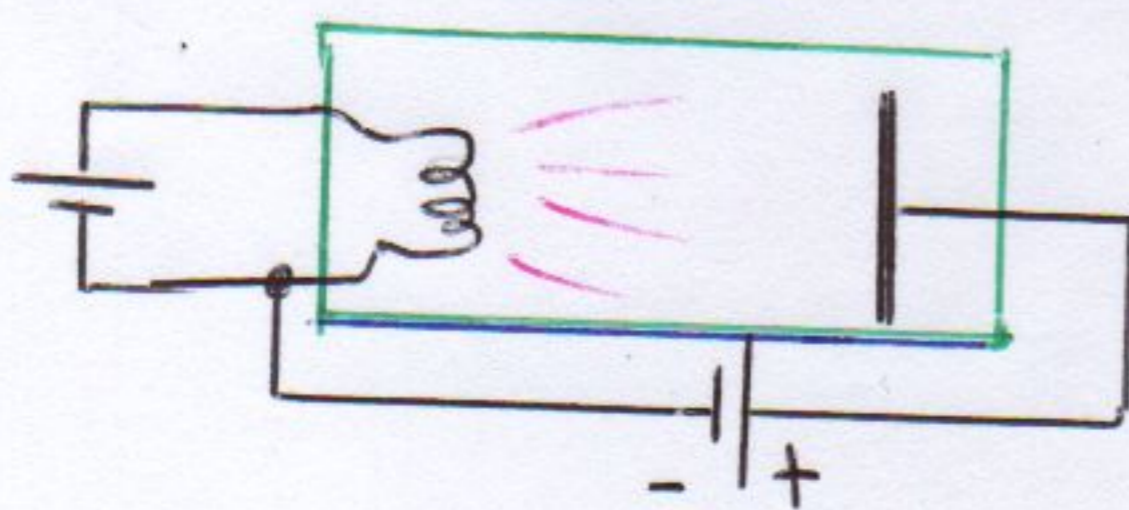
- 1738, Bernoulli: gases constituídos de partículas

- 1905, Einstein, movimento Browniano

## Quantização da carga:

Menos intuitiva aparece apenas no início do sec. XIX com a eletrólise de Faraday, em 1834.

Em 1859 Pliker descobre os raios catódicos:

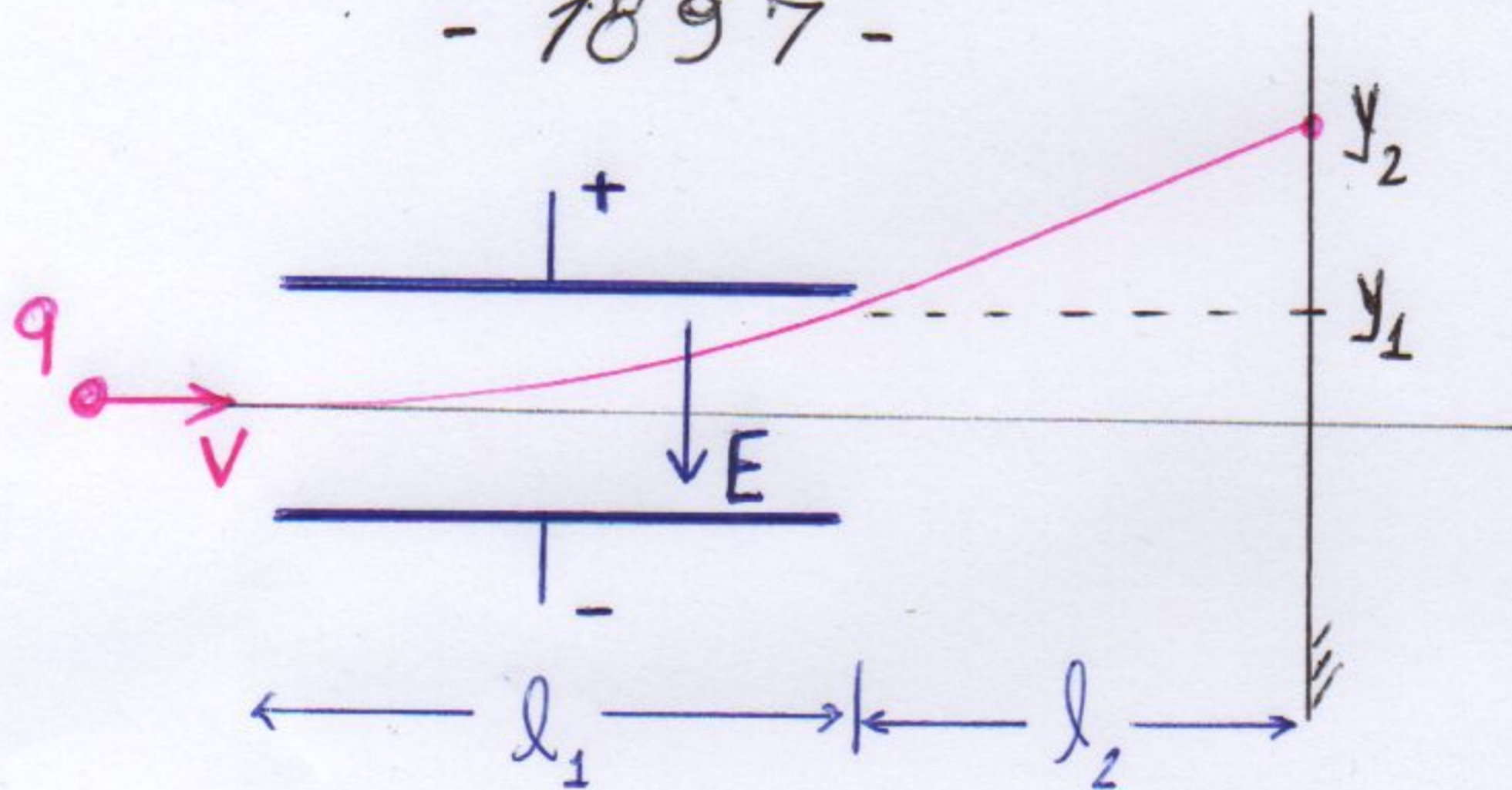


Em 1881, Helmholtz afirma que a corrente elétrica seria constituída de "partículas" de carga  $e$ . Stoney, 1891, as batizou de electrons.

## A descoberta do elétron

O experimento de J. J. Thomson

- 1897 -



no interior das placas:  $y_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \left( \frac{l_1}{v} \right)^2$

lembre-se que  $v_x = v$  já que  $F_x = 0$ .

ao sair das placas:  $y_2 = v_y t_2 = a t_1 \cdot \frac{l_2}{v} = \frac{eE}{m} \cdot \frac{l_1 l_2}{v^2}$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{eE}{m} \frac{1}{v^2} \left( \frac{l_1^2}{2} + l_1 l_2 \right)$$

Como determinar  $v$ ?

filtro de velocidades:

passam reto aquelas

em que  $F_m = F_e \Rightarrow qvB = qE \Rightarrow v = \frac{E}{B}$

$$q_{nto} \quad \underbrace{y_1 + y_2}_{\text{ângulo}} = \frac{e}{m} \underbrace{\frac{B^2}{E}}_{\text{Voltagem}} \left( \frac{l_1^2}{2} + l_1 l_2 \right) \underbrace{\quad}_{\text{ângulo}}$$

Isso fornece o valor experimental de  $e/m$ .

Thomson repetiu o experimento com diferentes catodos e concluiu que  $e/m$  é universal!

$$e/m \text{ Thomson} \sim 2 \cdot 10^{18} \text{ C/kg}$$

$$e/m \text{ hoje} \quad 1.76 \cdot 10^{18} \text{ C/kg}$$

Thomson compara seu valor de  $e/m$  com o que foi obtido na eletrólise de Faraday:

$$\frac{e/m \text{ dos raios catódicos}}{e/m \text{ da eletrólise}} \sim 1836$$

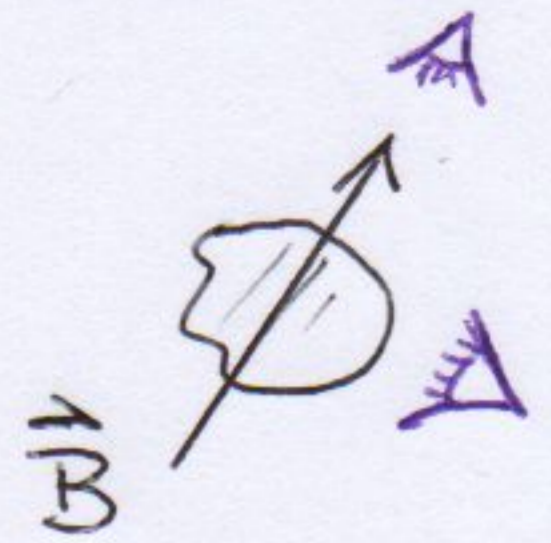
"Se as partículas dos raios catódicos são mais leves que aquelas da eletrólise, ou transportam 1836 vezes mais carga": Thomson opta pela 1ª afirmação, corretamente. A partícula da eletrólise era o próton!

# Efeito Zeeman

- 1896 -

Zeeman tem sucesso num experimento que Faraday havia tentado em 1845:

átomo em campo magnético

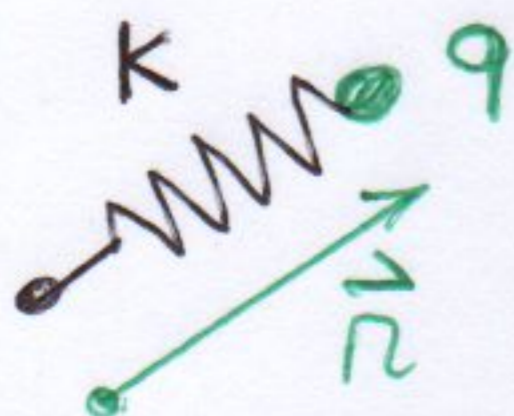
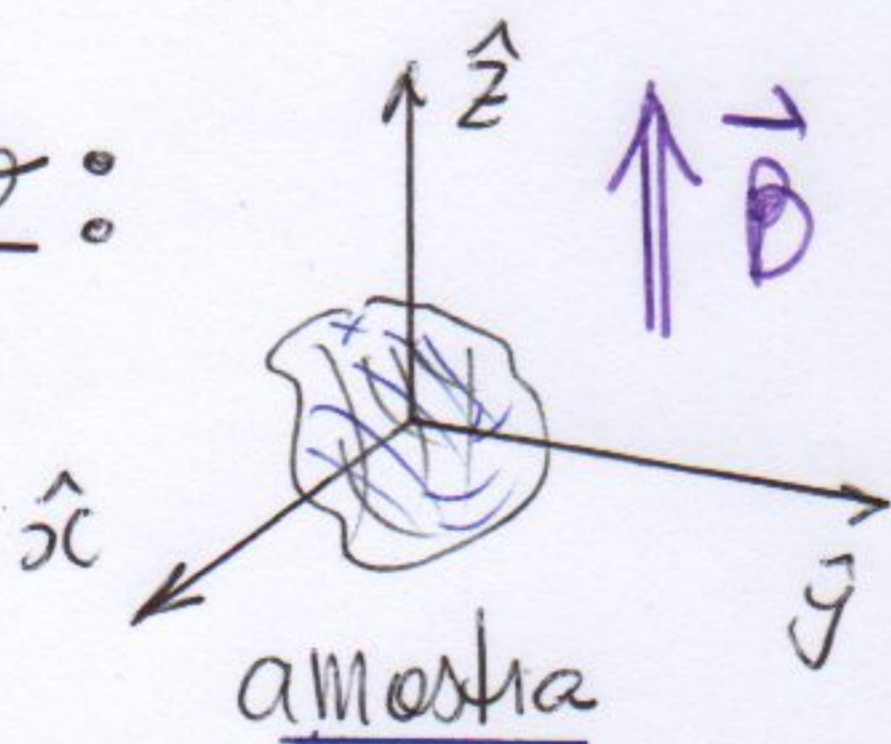


Cada linha de emissão do átomo, algumas já conhecidas na época, obria em 2 na direção do campo e em 3 na direção  $\perp$  ao campo.

A explicação seguia as ideias de Lorentz para emissão do átomo: átomos emitem porque cargas internas oscilam.

(ideia de Maxwell)

Modelo:



- Sem campo, átomo emite em  $\omega_0$
- carga oscila em torno de uma posição de equilíbrio.

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{\pm i\omega_0 t}$$

Com campo magnético:

$$m \ddot{\vec{r}} - k \vec{r} + q \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} + 2 \dot{\vec{r}} \times \vec{\omega}_L = 0}}$$

onde  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  e  $\vec{\omega}_L = -\frac{q\vec{B}}{2mc}$ ,  $\vec{B} = B \hat{z}$

estado estacionário (após transientes)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\omega_L \dot{y} = 0, \quad \omega_L = \frac{-qB}{2mc}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y - 2\omega_L \dot{x} = 0$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \Rightarrow \underline{\underline{z = z_0 e^{\pm \omega_0 t}}}$$

Definindo  $\eta \equiv x + iy \Rightarrow \underline{\underline{\ddot{\eta} + \omega_0^2 \eta - 2i\omega_L \dot{\eta} = 0}}$

Solução:  $\eta = \eta_0 e^{i\omega t}$ , com  $\omega > 0$

$$\Rightarrow \omega = \pm \omega_L \pm (\omega_L^2 + \omega_0^2)^{1/2} \approx \pm \omega_L + \omega_0$$

da "matemática"

só o + serve, já que  $\omega > 0$

sendo que estamos considerando campo fraco:

$$\Rightarrow \omega_L \ll \omega_0$$

Então, a solução  $e^{+i\omega t} \Rightarrow \omega = \omega_0 + \omega_L$

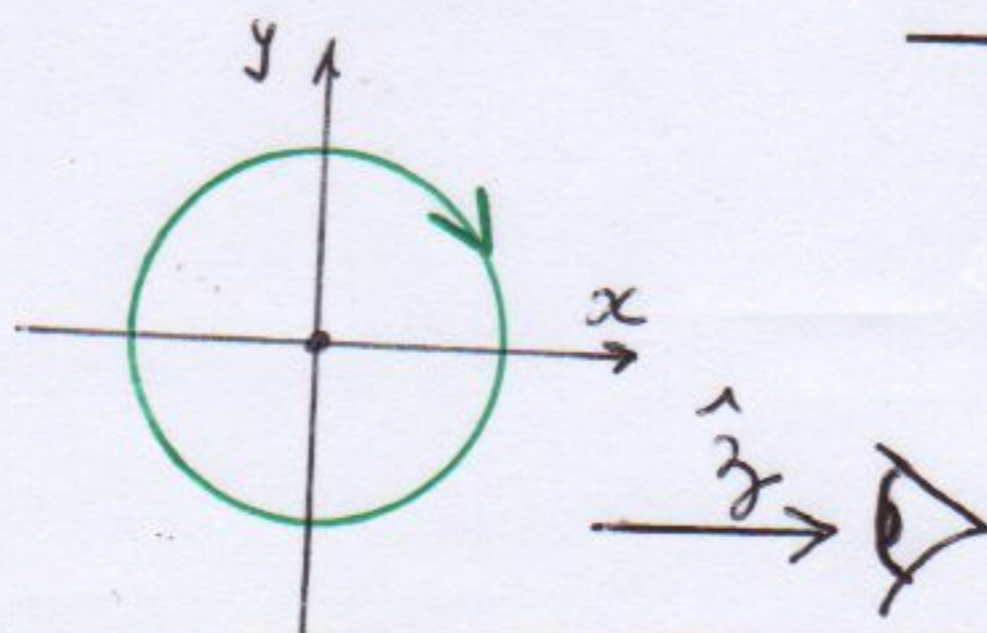
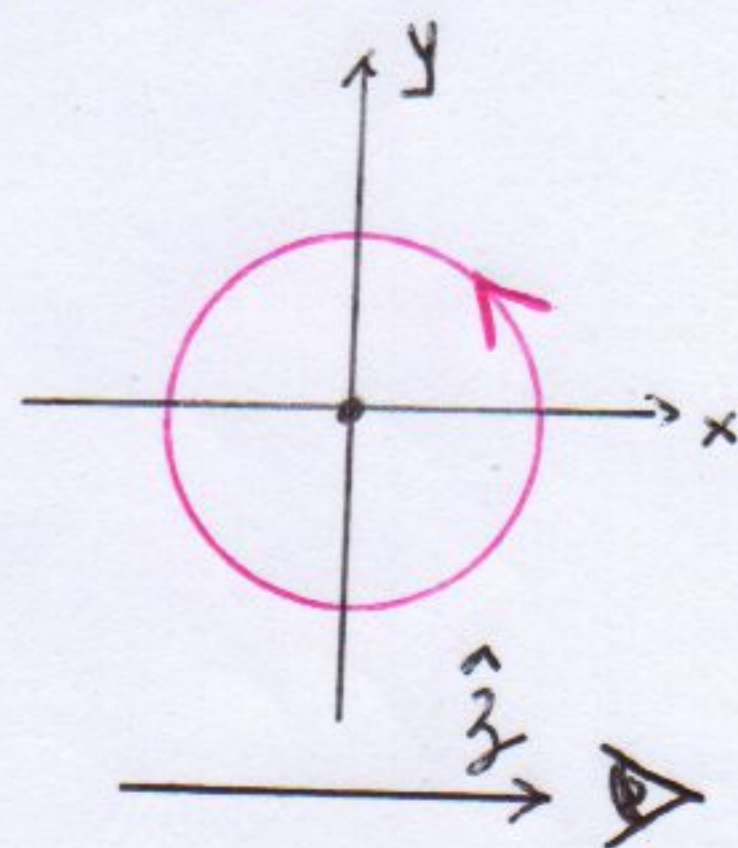
$$\Rightarrow x = \cos \omega t \quad e \quad y = \sin \omega t$$

Mas a solução

$$e^{-i\omega t} \quad e \quad \omega = \omega_0 - \omega_L$$

$$\Rightarrow x = \cos \omega t$$

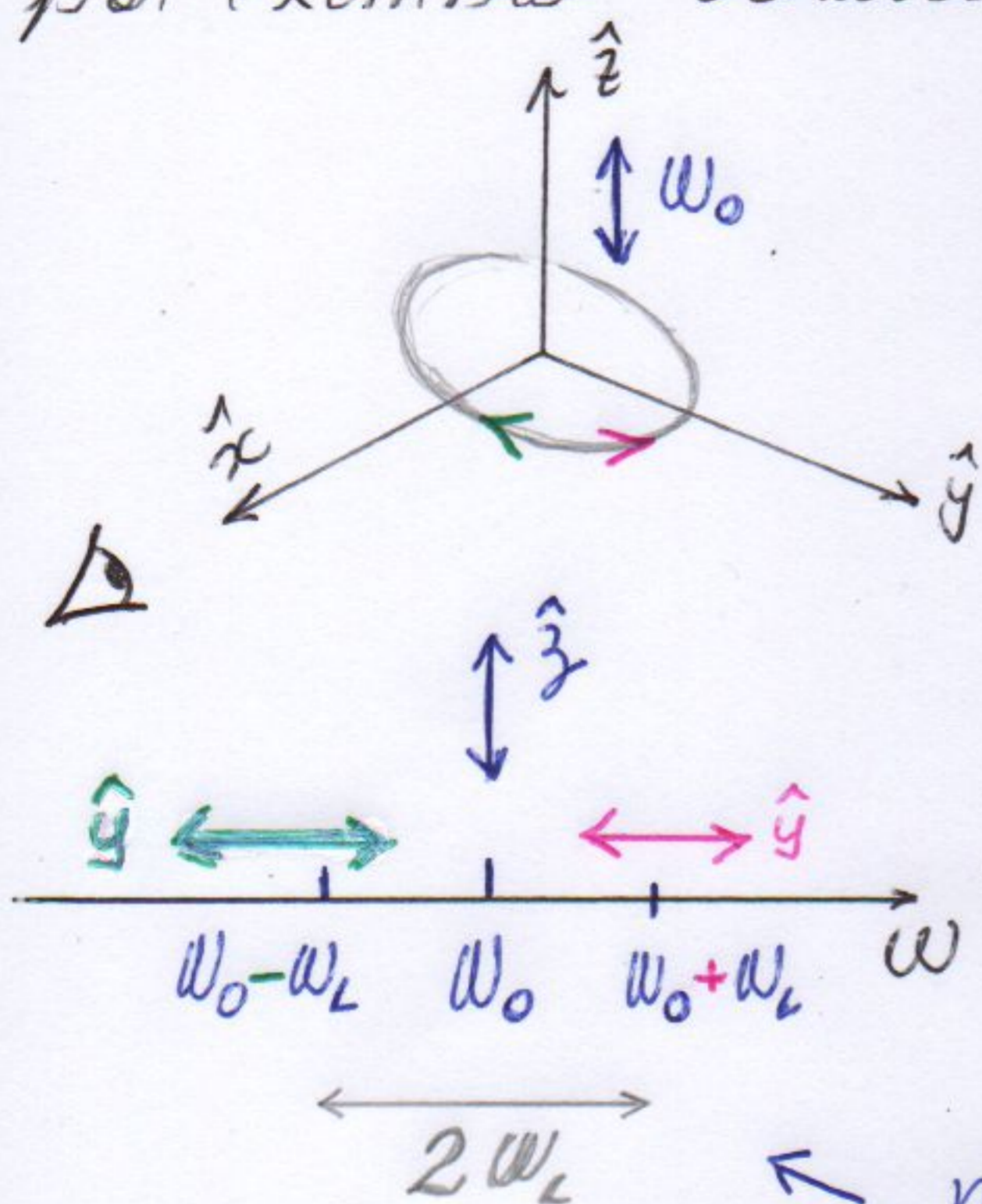
$$e \quad y = -\sin \omega t$$



O experimento revela que a polarização horária tem menor frequência  $\Rightarrow \omega_L > 0$

$$\Rightarrow g < 0 \quad (g = -e)$$

Na direção transversal ao campo  $\vec{B}$ , por exemplo olhando na direção  $\hat{x}$ :



• Vemos a oscilação em  $\hat{z}$ , frequência  $\omega_0$  e linearmente polarizada.

• Vemos duas outras linhas  $\omega_0 \pm \omega_L$ , polarizadas linearmente na direção  $\hat{y}$ .

← medindo esta separação tem-se  $\omega_L \Rightarrow$  tem-se  $e/m$

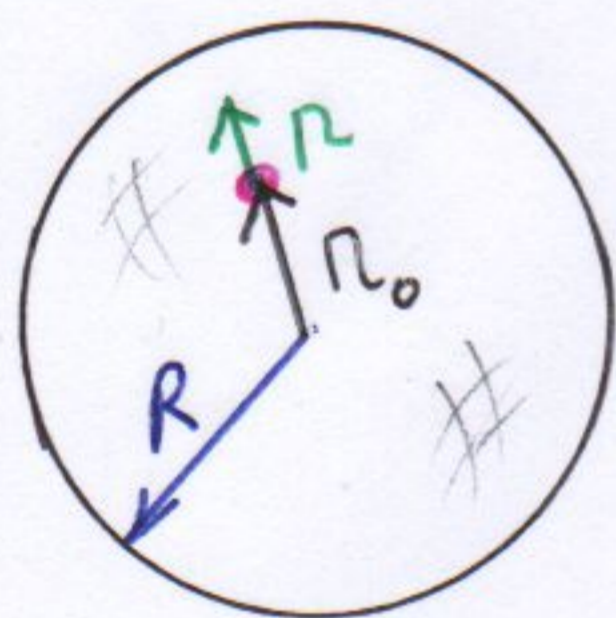
↑ dá o mesmo valor do experimento de Thomson  $\Rightarrow$  a mesma partícula!

Em fins de 1897 Preston descobre que para Zn ou Cd a linha se quadruplica na presença do  $\vec{B}$ ! Ficou conhecido como efeito Zeeman anômalo, com explicação apenas no cenário da nova Mecânica Quântica: é o spin!

# Modelo atômico de Thomson - 1904

Da igualdade de valores  $p_1$  e  $m$  obtidos por Zeeman e Thomson concluiu-se no interior dos átomos havia elétrons e que eles poderiam sair do átomo:  $\therefore$ , divisível!

Então Thomson propõe um modelo em que elétrons estão em posições de equilíbrio num gel positivo:



$\vec{n}_0$ : posição de equilíbrio

$\vec{n}' = \vec{n}_0 + \vec{n}$ . Então, em  $\vec{n}'$ ,

$$\vec{F} = -e\vec{E} = -e \frac{e}{\frac{4\pi}{3}R^3} \frac{4\pi}{3}n'^3 \frac{1}{n'^2} \hat{n}$$

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{R^3} n' \hat{n} = -\frac{e^2}{R^3} \vec{n}_0 - k\vec{n},$$

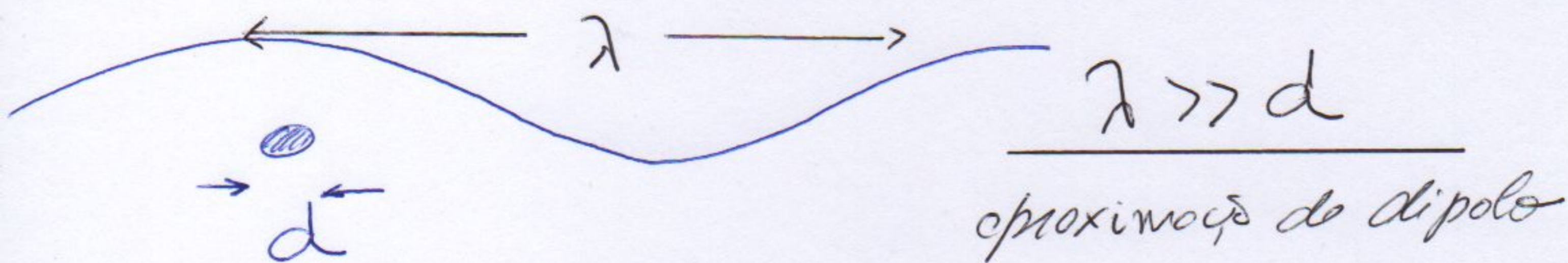
$$\text{onde } k = \frac{e^2}{R^3} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{e^2}{mR^3}}$$

$$\text{ou } \lambda_0 = \frac{c}{\omega_0/2\pi} = 2\pi c \sqrt{\frac{mR^3}{e^2}}.$$

Estimativas de  $e$ ,  $R$  e  $m$  fornecem  $\lambda_0 \sim 1180 \text{ \AA}$ , coerente com  $\lambda$  típicos de átomos (hidrogênio).

O modelo começa bem!

Vamos colocar esse ôtiono num campo de radiação eletromagn., mas com  $\lambda \gg$  raio ôtiono



$$\vec{E} = \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \sim \underbrace{\vec{E}'_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{d}}}_{\equiv \vec{E}_0} e^{-i\omega t}$$

$$m \ddot{\vec{n}} = -m\omega_0^2 \vec{n} - m\gamma \dot{\vec{n}} - e\vec{E}_0 \cos \omega t$$

Solução:  $\vec{n} = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

↑ "modo"
← amortecimento

Substituindo vem

$$\vec{n} = \frac{-e\vec{E}_0}{m} \left( \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \cos \omega t + \frac{\omega \gamma \sin \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \right)$$

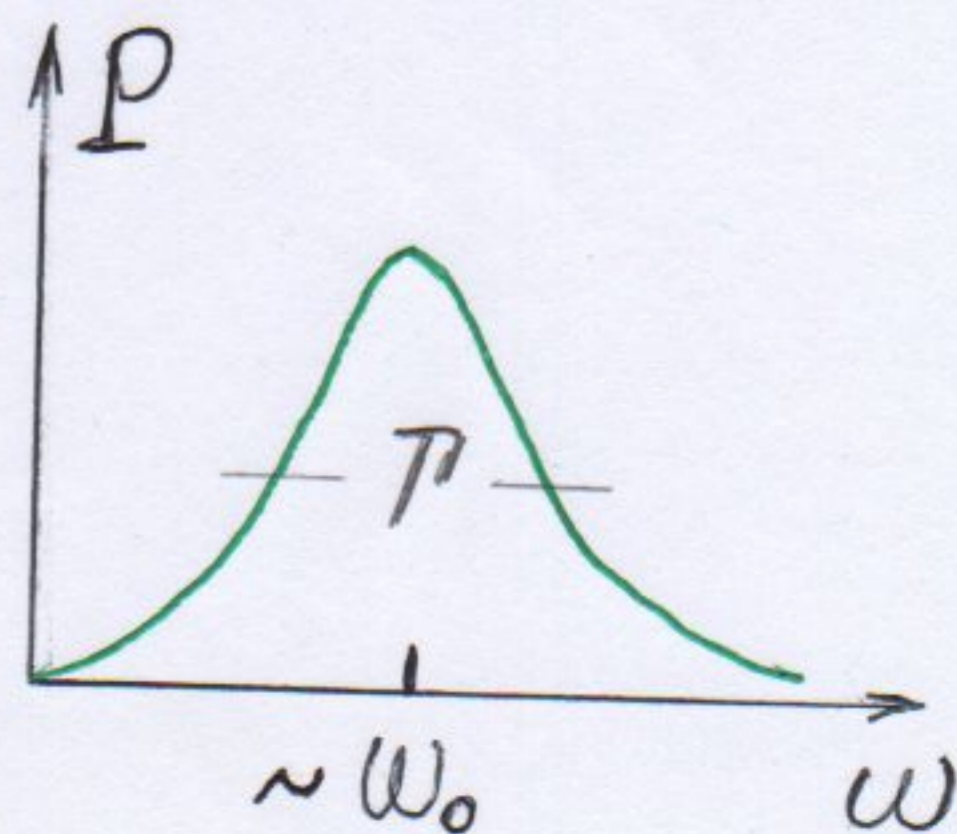
Logo a carga oscila e emite radiação.

A potência irradiada é dada por

$$P(t) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\vec{a}}^2, \quad \text{e } \vec{a} = \frac{d^2 \vec{n}}{dt^2}$$

Em nosso caso  $\vec{a} = -\omega^2 \vec{n}$ . Substituindo em P e tomando a média temporal,

$$P = \frac{1}{3} \frac{e^2}{c^3} \left( \frac{eE_0}{m} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}$$





$P$  depende da amplitude ao quadrado do campo elétrico, que é proporcional ao fluxo de energia incidente:

$$\text{Vetor de Poynting: } \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \xrightarrow{\text{média}} S = \frac{c}{8\pi} E_0^2$$

Seção de choque:  $P/S$

$$\sigma = \frac{\text{potência irradiada}}{\text{fluxo incidente}} = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^3} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \tau^2}$$

1) Seção de choque de Thomson

é o limite de  $e^-$  livres em alta frequência

$$\tau \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \underline{\omega \gg \omega_0}$$

$$\Rightarrow \underline{\sigma = \frac{8\pi}{3} r_c^2}, \quad r_c = \frac{e^2}{mc^2}$$

$r_c$  é o raio clássico do elétron  $\sim 10^{-13}$  cm

$$\Rightarrow \sigma \sim 0,68 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad \text{↑ área}$$

1 barn

2)  $\omega \ll \omega_0$  - Espalhamento Rayleigh

$$\underline{\sigma \sim \frac{8\pi}{3} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 r_c^2} \quad \text{visível}$$

Na luz solar espalhada em nossa atmosfera  $\omega \ll \omega_0$ , pois  $\omega_0$  está no ultravioleta, assim vale que  $\sigma \sim \omega^4$  e como nossa visão vai só até o azul, o céu nos parece azul!

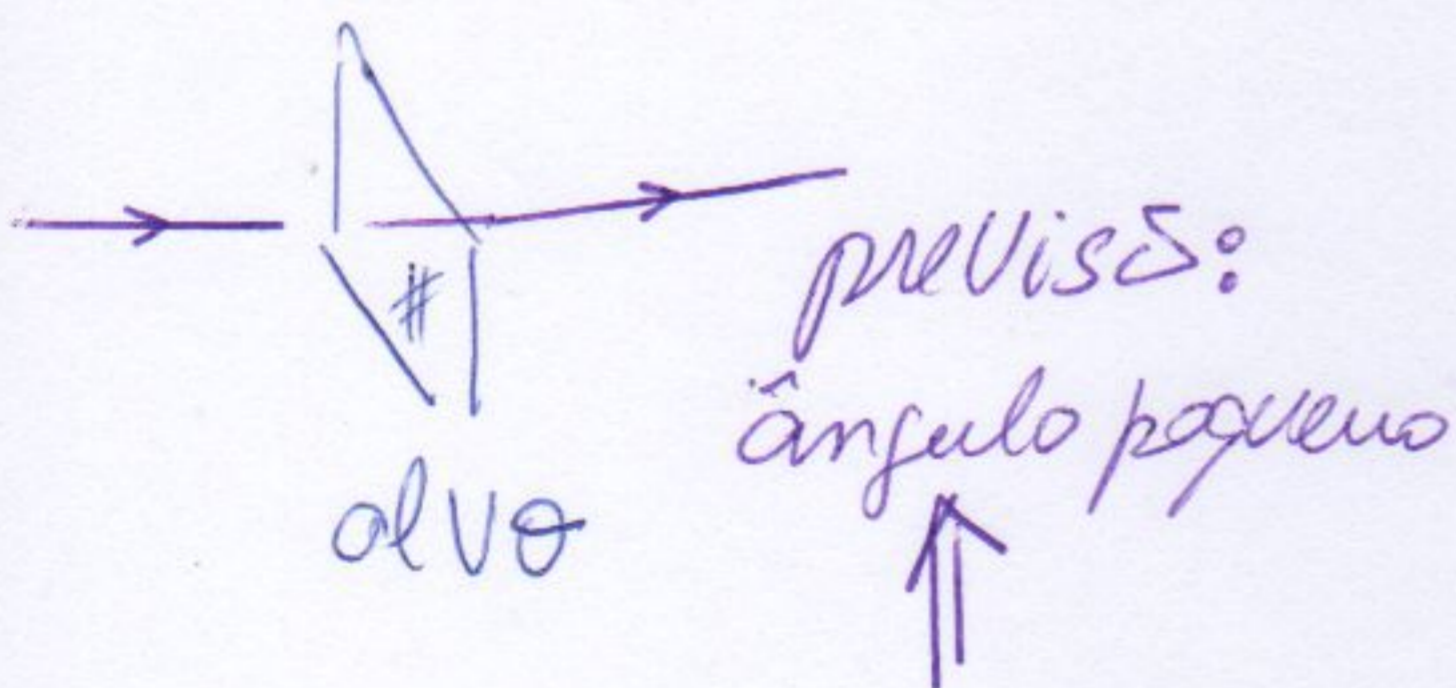
3) espalhamento ressonante  $\omega \sim \omega_0$

$$\sigma = \frac{2\pi}{3} N_c^2 \frac{\omega_0^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2/4} \sim \frac{8\pi}{3} N_c^2 \left(\frac{\omega_0}{\Gamma}\right)^2$$

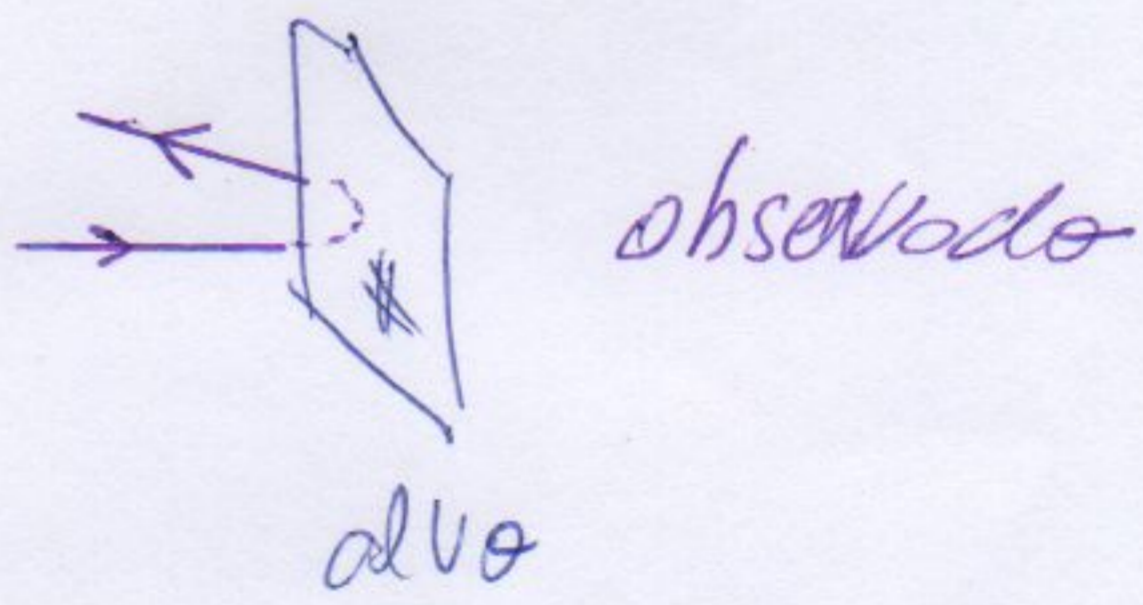
note como  $\Gamma \neq 0$  é importante neste limite

Esse modelo recebeu atenção até 1911, com relativo sucesso na explicação da interação matéria-irradiação, como por exemplo no estudo do índice de refração de materiais translúcidos ( $\Gamma$  pequeno).

Quando se abordou o espalhamento de partículas carregadas, no entanto, ele revelou ser falho!



isso porque a carga positiva neste modelo está ocupando um "gdo" volume



Levou Rutherford, em 1911, a propor a carga positiva concentrada em um núcleo atômico.

# O experimento de Millikan - 1909

## Medindo a carga do elétron

Ver } [www.if.ufrgs.br/historia/millikan.html](http://www.if.ufrgs.br/historia/millikan.html)  
} RBEF, Vol. 17, 107 (1995).

1834 - a eletrólise de Faraday

carga para depositar  $m$  gramas  $\rightarrow Q = F \frac{m}{M_A} \cdot \text{Val}$  Valência  
massa molar

PI  $m = M_A$ ,  $\text{Val} = 1$  medo-se  $Q \sim 96.500$  coulombs

$\Rightarrow F = 96.500 \text{ C} \equiv 1 \text{ Faraday}$

Em 1 mol tem-se  $\sim 6 \cdot 10^{23}$  átomos, logo,

cada átomo contribuiu  $e = \frac{96.500}{6 \cdot 10^{23}} \sim 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Tai a carga do elétron!

O problema era que não se tinha  $F$  ou  $N_A$  com precisão. Então, um experimento independente de ter  $F$  ou  $N_A$  era necessário.

1897 - C. T. R. Wilson e Thomson

usam câmara de neblina (vapor d'água)

$$e \sim 1,1 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

1903 - H. A. Wilson (estudante de Thomson)

usa campo elétrico aplicado na nuvem da câmara:  $e \sim 1,04 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

1907 - Millikan e Begegan

apótemo experimento de H.A. Wilson com forte campo elétrico que "explodiu" a nuvem  $\Rightarrow$  sobravam gotículas controláveis pelo campo  $\Leftarrow$  gota idêntica

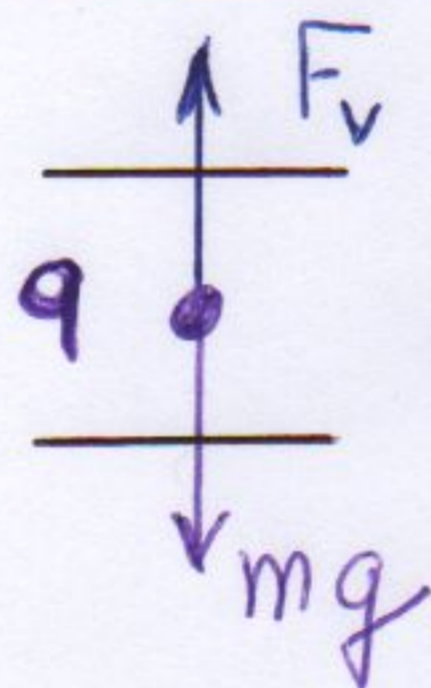
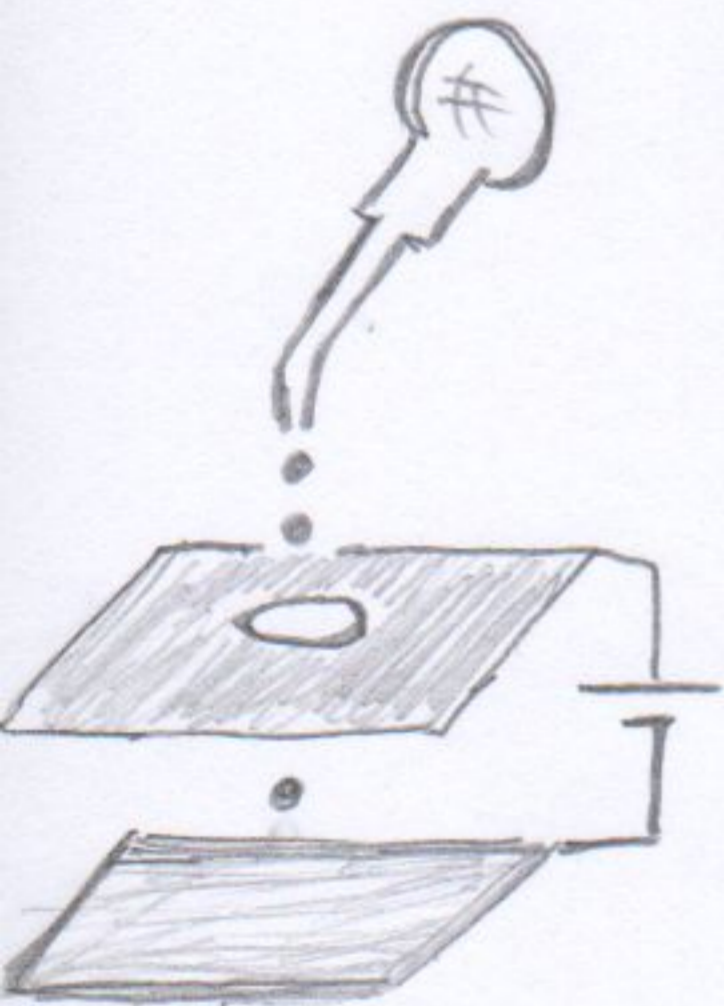
$$e \sim 1,56 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Fletcher troca vapor de água por aerossol de óleo, p/ evitar efeito de evaporação.  
↑  
estudante de Millikan

Millikan, nobel em 1923

— X —

o experimento



$\leftarrow$  viscosidade

gota em queda no ar:

$$mg - bV = m \frac{dV}{dt}$$

$$q \quad b = 6\pi\eta \cdot a$$

↑  
viscosidade do ar

↑  
raio da gota

velocidade terminal:

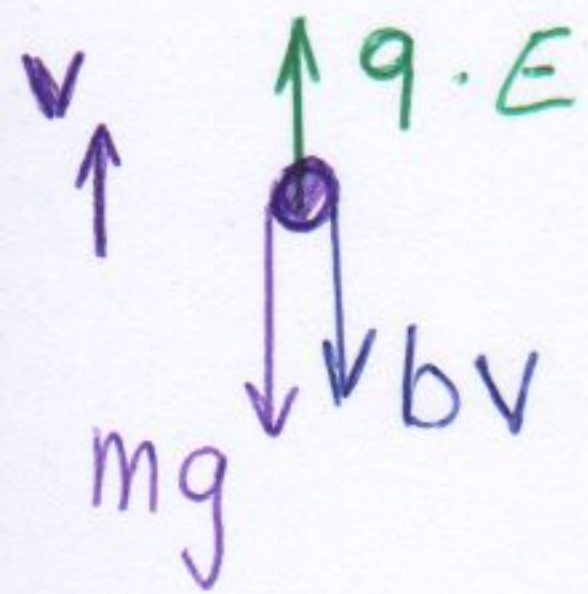
$$q \text{ do } \frac{dV}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow V_d = \frac{mg}{b}$$

↑  
velocidade de deriva

Essa relação serve p/ se determinar b:  $b = \frac{mg}{V_d}$   
já que  $V_d$  eu posso medir.

Liga-se um campo elétrico que tende a  
sota a subir:



$q$  é a carga macroscópica que  
a gota recebe ao ser esferificada

$$qE - mg - bV = m \frac{dV}{dt}$$

Ento a velocidade terminal de subida é

$$V_s = \frac{qE - mg}{b}, \quad \text{e } b = \frac{mg}{V_d}$$

$$\Rightarrow q = \frac{mg}{E} \left( \frac{V_s}{V_d} + 1 \right) = \frac{mg}{E} \left( \frac{T_d}{T_s} + 1 \right) \quad (\text{I})$$

onde  $V_s = L/T_s$  e  $V_d = L/T_d$ , sendo  $L$  uma  
distância  $m'$  escolhida e  $T_s - T_d$  medidos com  
cronômetro.

Imadia-se a câmara com raios-X e  
com isto a gota adquire algumas cargas

do ar:  $q' = q + M' \cdot e$  a massa  
 $\bar{m}$  muda

Veja que se admite  
a quantização da carga:

se seja, admitese  $M'$  é inteiro  
(desconhecido)

a existência de uma  
carga fundamental  $e$ .

Então,  $q' = \frac{mg}{E} \left( \frac{T_d}{T'_s} + 1 \right)$   $T'_d = T_d$  , já que na descida  $E=0$ .

$$q' - q = \frac{mg}{E} T_d \left( \frac{1}{T'_s} - \frac{1}{T_s} \right) \quad (\text{II})$$

Tomando  $q' - q = m' \cdot e$  e  $q = m \cdot e$  , logo,

(I)  $\Rightarrow \frac{1}{m} \left( \frac{1}{T_d} + \frac{1}{T_s} \right) = \frac{eE}{mgT_d}$  p/ uma mesma gota  
ctas iguais  $\equiv C$

(II)  $\Rightarrow \frac{1}{m'} \left( \frac{1}{T'_s} - \frac{1}{T_s} \right) = \frac{eE}{mgT_d}$  lembre-se:  
e: carga do elétron  
m: massa da gota

### Procedimento experimental

P/ uma mesma gota (observada com luneta)  $C$  e' cto. Nela,  $e$  e' o que queremos determinar.  $E, g$  e  $T_d$  conhecemos. A massa  $m$  da gota sai assim:

$$m = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} a^3, \quad a = \frac{b}{6\pi\eta_{ar}}, \quad b = \frac{mg}{V_d}$$

$$\Rightarrow m^2 = \frac{162}{g^3} \pi^2 \frac{V_d^3 \eta_{ar}^3}{\rho_{des}}$$

$a \sim 10^{-5} \text{ cm} \Rightarrow m \sim 10^{-15} \text{ gramas} \Rightarrow \text{peso} \sim \underline{\underline{10^{-17} \text{ N}}}$

Como  $qE \sim 10^{-19} \cdot 10^3 = \underline{\underline{10^{-16} \text{ N}}}$  comparávir OK!

No Cap. III do Tipler há uma tabela com dados supostamente obtidos por Millikan.

Também, por exemplo, o conjunto

$$\frac{1}{T'_s} - \frac{1}{T_s} = 0,03234 \quad \text{e} \quad \frac{1}{T_d} + \frac{1}{T_s} = 0,12887$$

Levando à Eq. (I) e (II) :

$$\frac{1}{M_1} 0,12887 = C \quad \Rightarrow \quad \frac{M_1}{M'_1} = \frac{0,12887}{0,03234} = 3,9848 \rightarrow 4$$

$$\frac{1}{M'_1} 0,03234 = C$$

Eu preciso de  $M_1$  e  $M'_1$  para calcular  $C$ , mas só tenho a razão. Então, feço uma tabela

$M'_1$	$M_1$	$C$
1	4	0.03234
2	8	-
3	12	-
⋮	⋮	⋮
6	24	0.00539
⋮	⋮	⋮

Então, entro na câmara e colho novas medidas:

$$\frac{1}{T'_s} - \frac{1}{T_s} = 0,01616 \quad \text{e} \quad \frac{1}{T_d} + \frac{1}{T_s} = 0,11289$$

$$\Rightarrow \frac{1}{M'_2} 0,01616 = \frac{1}{M_2} 0,11289 \Rightarrow \frac{M_2}{M'_2} = \frac{0,11289}{0,01616} = 6,9858 \rightarrow 7$$

$M'_2$	$M_2$	$C$
1	7	0,01616
2	14	-
3	21	0,00539

Então, para esta gota,

$$C = 0,00539$$

$$\text{Como } C = \frac{eE}{mgT_d} \Rightarrow e = 1.591 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Descobriu-se posteriormente que para gotas  
to pequenas havia necessidade de se corrigir  $\eta$   
em função de temperatura e pressão:

$$e = 1.601 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Valor atual :  $1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$



# Cap. 4 O modelo de Rutherford - 1911

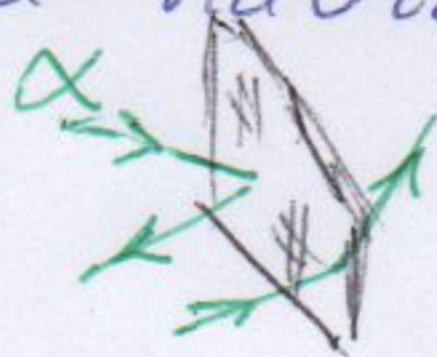
## Evolução histórica:

- 1896 Becquerel descobre a radiatividade.
- 1898 Rutherford trabalha com Thomson estudando a observação dos raios emitidos por urânio:

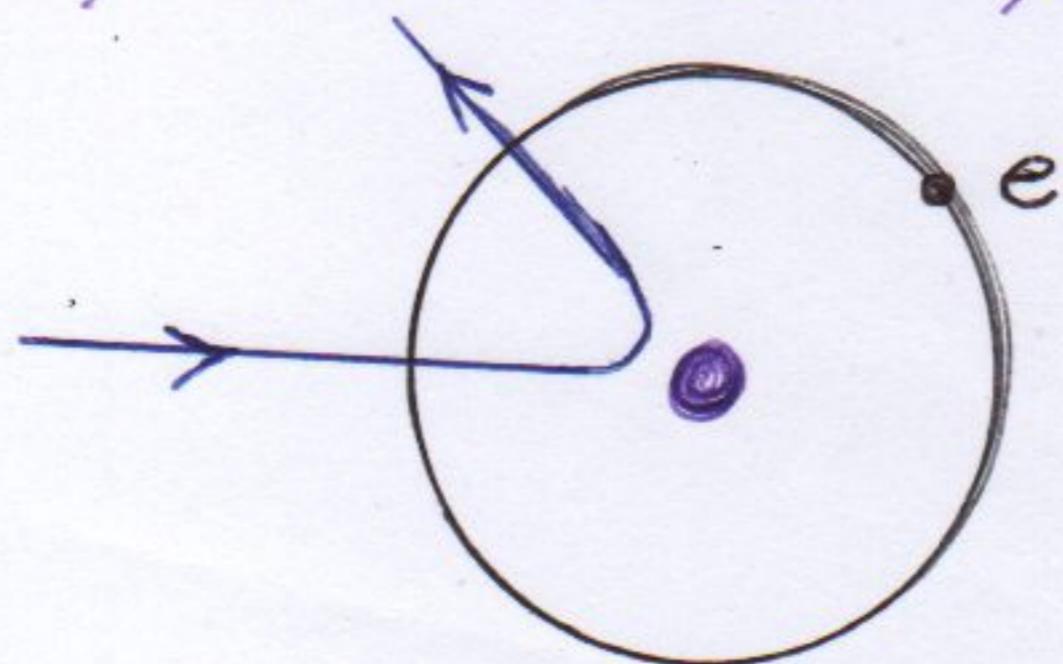
$\alpha$  e  $\beta$  - elétrons,  $< 0$   
 $\uparrow$  núcleos de hélio,  $> 0$

- 1906 Rutherford faz 1º espalhamento com  $\alpha$ .
- 1907 " , em Manchester, encontra Geiger e Marsden, que primorosa e espalhamento  $\alpha$ :

observaram que havia fortíssimo espalhamento



Rutherford, então, sugere que o átomo tem uma carga central positiva ocupando um volume muito pequeno, daí o forte campo de flutindo as partículas  $\alpha$ .

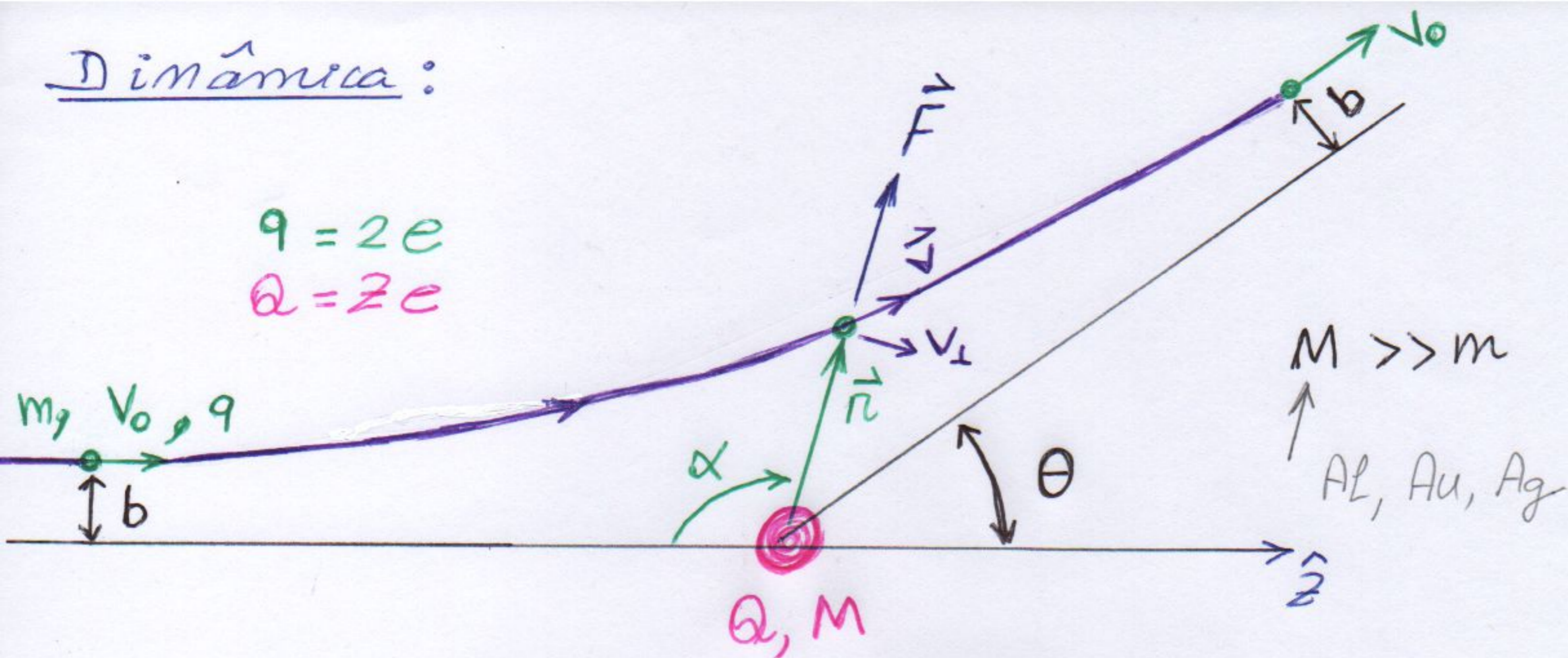


átomo nuclear

Dinâmica:

$q = 2e$

$Q = Ze$



$P/\pi \rightarrow \infty \quad V(r) \rightarrow 0 \quad \text{só } \phi_m \quad E_c > 0 \Rightarrow E > 0$   
 $\Rightarrow$  hipérbola

- $b$  : parâmetro de impacto
- $\theta$  : ângulo de espalhamento

Queremos determinar  $b(\theta)$

$\vec{F} = \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \Rightarrow F_z = \frac{qQ}{r^2} \cos(\pi - \alpha) = -\frac{qQ}{r^2} \cos \alpha$

$\vec{F}$  central  $\Rightarrow$  momento angular é conservado

$m v_0 b = m r v_{\perp} = m r \cdot r \frac{d\alpha}{dt} = m r^2 \frac{d\alpha}{dt}$

$\Delta \vec{p} = \vec{I} \Rightarrow \Delta p_z = I_z = \int_0^{\infty} F_z dt$

$m v_0 \cos \theta - m v_0 = \int_0^{\infty} -\frac{qQ}{r^2} \cos \alpha dt = \int_0^{\pi - \theta} -\frac{qQ}{r^2} \cos \alpha \frac{dt}{d\alpha} d\alpha$

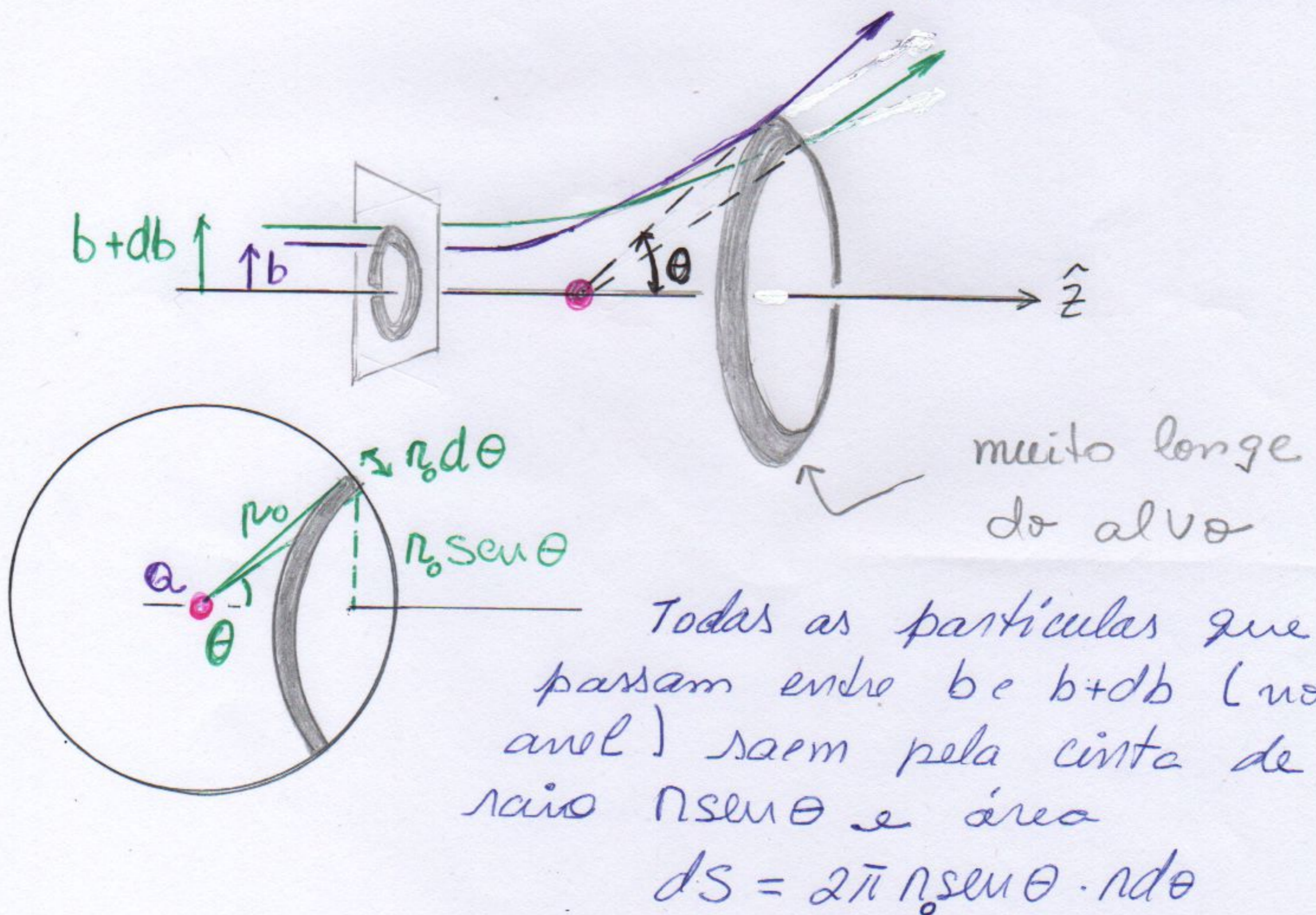
$$mV_0(\cos\theta - 1) = \int_0^{\pi-\theta} \frac{-9Q}{r^2} \cos\alpha \frac{mV_0^2}{b} d\alpha = \frac{-9Q}{V_0 b} \sin\theta$$

$$\cos\theta - 1 = -\frac{9Q}{mV_0^2 \cdot b} \sin\theta \Rightarrow -2\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{-9Q}{mV_0^2 \cdot b} 2\sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{9Q}{mV_0^2 \cdot b} \quad \text{ou} \quad \underline{b = \frac{9Q}{mV_0^2} \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}}$$

Veja que:  $b \uparrow \Rightarrow \theta \downarrow$ ,  $V_0 \uparrow \Rightarrow \theta \downarrow$  e  $9Q \uparrow \Rightarrow \theta \uparrow$ .

Com essa relação podemos contar o número de partículas  $\alpha$  espalhadas de um feixe incidente:



Seja  $I$  a intensidade do feixe, isto é, o nº de partículas por unidade de área (e tempo)

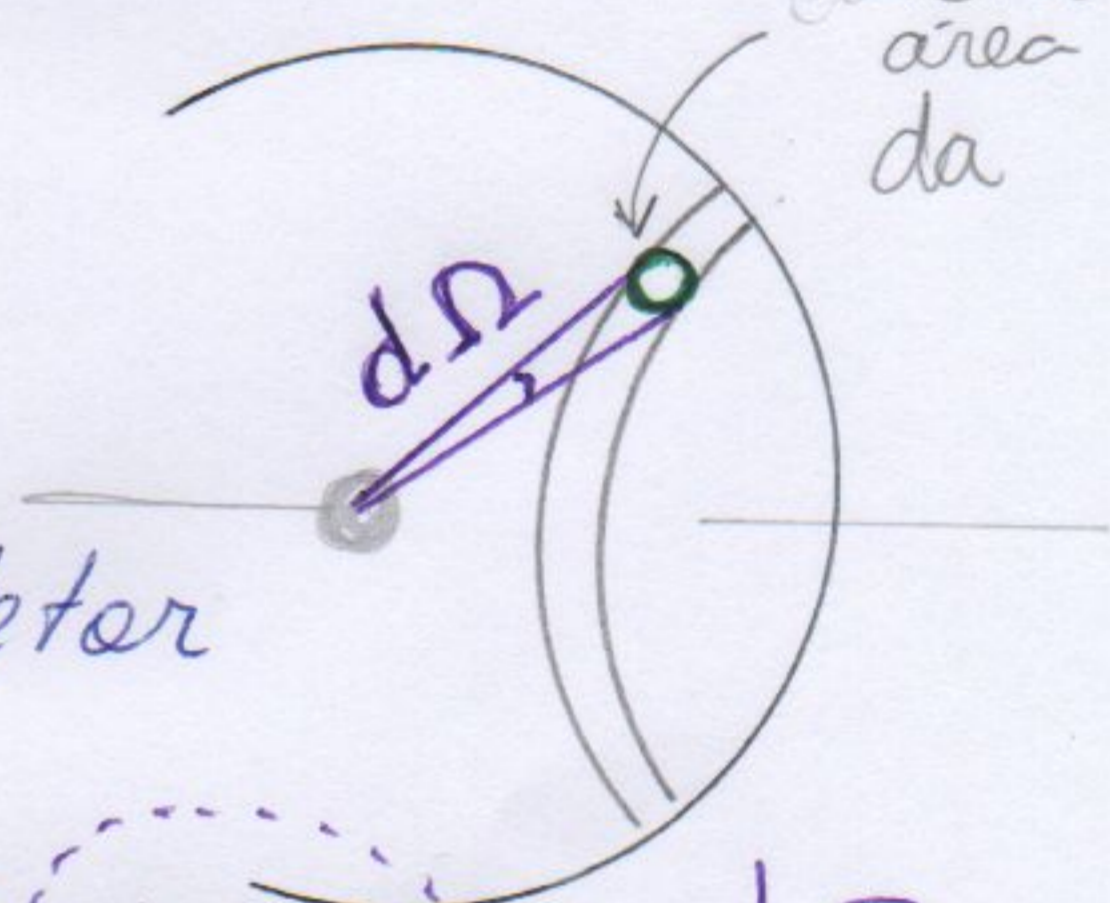
Então, o nº partículas (por segundo) que choca o anel  $\{b, b+db\}$  é

$$dN = I \, 2\pi \, b \, |db| = I \, 2\pi \, \frac{qQ}{mV_0^2} \frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2} \frac{qQ}{mV_0^2} \frac{d\theta/2}{\sin^2\theta/2}$$

$$dN = I \left( \frac{qQ}{2mV_0^2} \right)^2 \frac{2\pi \sin\theta d\theta}{\sin^4\theta/2}$$

Que número por unidade de área  $dS$  é

$$\frac{dN}{dS} = \frac{I}{r_0^2} \left( \frac{qQ}{2mV_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\theta/2}$$



Se  $da$  for a área do detector ele contará

$$dn = \frac{dN}{dS} \cdot da = I \left( \frac{qQ}{2mV_0^2} \right)^2 \frac{da/r_0^2}{\sin^4\theta/2} \leftarrow d\Omega$$

### Seção de choque diferencial

Defino  $d\sigma$  como a área no alvo que desvia partículas em  $d\Omega$ :  $dn = I d\sigma$

Então,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{ze^2}{mV_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\theta/2}$$

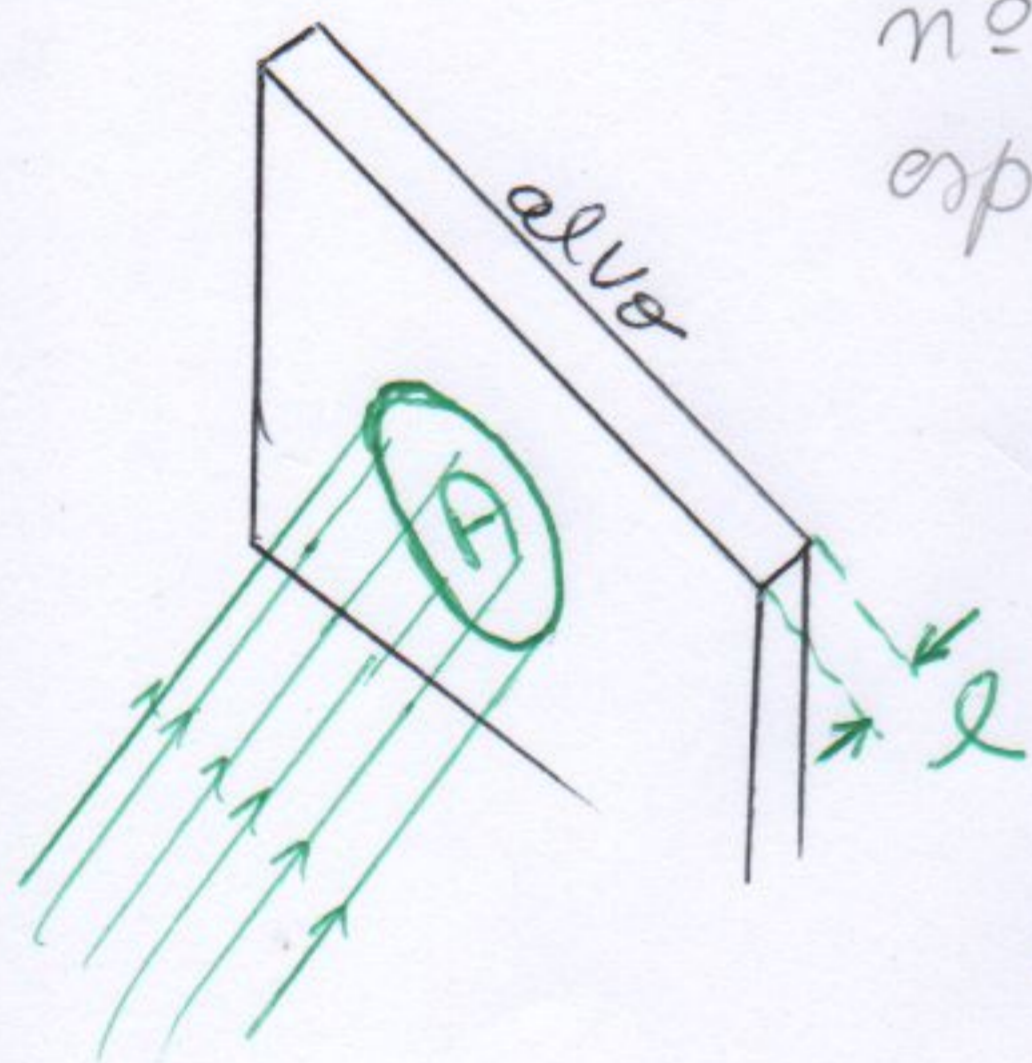
Geiger e Marsden tentam dependência com  $z^2$ , com  $1/E_0^2$ , com  $1/\sin^4\theta/2$  e tudo OK! Ver Tipler, Fig. 4.11 e 4.12

# Espalhamento por uma folha fina

De uma folha suficientemente fina de núcleos cada partícula  $\alpha$  é espalhada apenas por um núcleo.

Tendo a folha  $M_0$  núcleos/volume e o feixe incidente área transversal  $A$ , o n.º total de  $\alpha$  espalhadas em  $d\Omega$  é

$$dN = \underbrace{M_0 A \cdot l}_{\text{n.º de núcleos espalhadores}} \cdot \underbrace{I \left( \frac{Ze^2}{mV_0^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \theta/2}}_{I \cdot d\Omega}$$



A fração de partículas  $\alpha$  espalhadas entre  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  é

$$df = \frac{dN}{A \cdot I} = M_0 \cdot l \left( \frac{Ze^2}{mV_0^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \theta/2}$$

n.º de  $\alpha$  na área  $A$  que incidem no alvo (por segundo)

Qual a fração espalhada com  $\theta > \theta_0$ ?

$$f(\theta > \theta_0) = \int_{\theta_0}^{\pi} df = M_0 \cdot l \left( \frac{Ze^2}{mV_0^2} \right)^2 \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d\Omega}{\sin^4 \theta/2}$$

$$\int_{\theta_0}^{\pi} \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{\sin^4 \theta/2} = \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{2\pi \cdot 2 \sin \theta/2 \cos \theta/2}{\sin^4 \theta/2} d\theta = 4\pi \int_{\frac{\sin \theta_0}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^3} dx =$$

$$= 4\pi \left( \frac{1}{\sin^2 \theta_0/2} - 1 \right) = 4\pi \cot^2 \theta_0/2$$

$$\therefore f(\theta > \theta_0) = M_0 \cdot l \cdot \left( \frac{Ze^2}{mV_0^2} \right)^2 \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} =$$

$$= M_0 \cdot l \cdot \underbrace{\pi b^2(\theta_0)}_{\text{área}} \quad \text{! claro}$$

onde  $b(\theta) = \left( \frac{2Ze^2}{mV_0^2} \right) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$  já deduzido.

O resultado é óbvio: a fração de  $\alpha$  espalhadas a  $\theta > \theta_0$  correspondem aquelas que passaram com  $b$  entre 0 e  $b(\theta_0)$ , ou seja, na área  $\pi b^2(\theta_0)$ !

Tipler exemplo 4.2

calcular  $f(\theta > 90^\circ)$  para  $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ com } E_c = 5 \text{ MeV} \\ \text{ouro, } Z = 79, \\ l = 10^{-6} \text{ m} \\ M_0 = 5,9 \cdot 10^{28} \text{ ot/m}^3 \end{array} \right.$

$$b(\theta_0 = 90^\circ) = \frac{2 \cdot \overset{Z}{79} \cdot \overset{e}{(4,8 \cdot 10^{-10})^2}}{2 \cdot \overset{\uparrow}{5 \cdot 10^6} \cdot \underbrace{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^7}_{\text{eV} \rightarrow \text{erg}}}$$

$mV_0^2 = 2E_c$

$$= 2,28 \cdot 10^{-14} \text{ metro}$$

CGS

$$\text{Então, } f(\theta > 90^\circ) = 5,9 \cdot 10^{28} \cdot 10^{-6} \cdot \pi (2,28 \cdot 10^{-14})^2$$

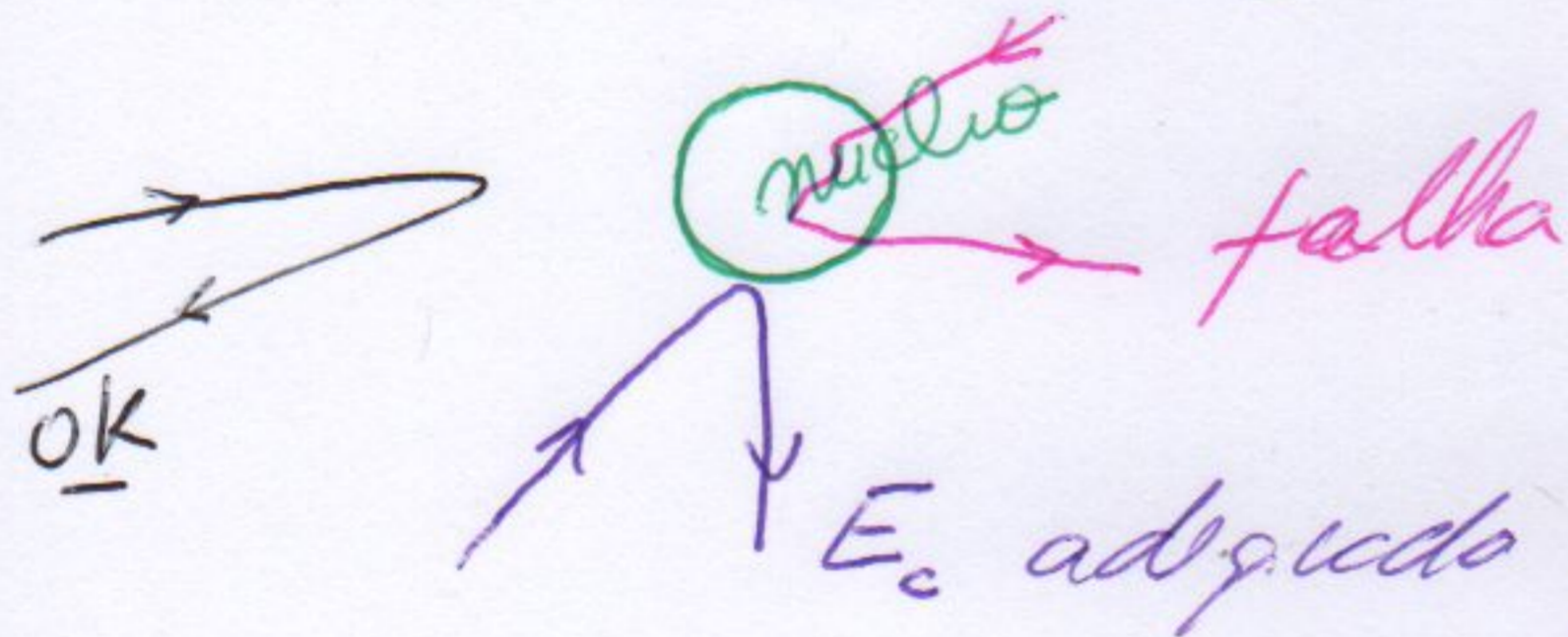
$$= 9,6 \cdot 10^{-5} \sim 10^{-4}$$

$\Rightarrow \approx 1$  a cada 10.000 !

O raio nuclear - Rutherford e Chadwick  
1925

Toda teoria de espalhamento de Rutherford pressupõe que a partícula  $\alpha$  nunca penetra o núcleo alvo, pois, se fizesse a trajetória deixaria de ser  $1/n^2$  (e forças nucleares atuariam).

Para estimar o raio nuclear a ideia é lançar  $\alpha$  com diferentes  $E_c$  e verificar a talha:



$E_c$  adequado para estimar o raio:

no  $\infty$ ,  $E = E_c$

em  $r_d$ , ponto de retorno do  $\alpha$ ,

$$E = \frac{qQ}{r_d} = \frac{2Ze^2}{r_d}$$

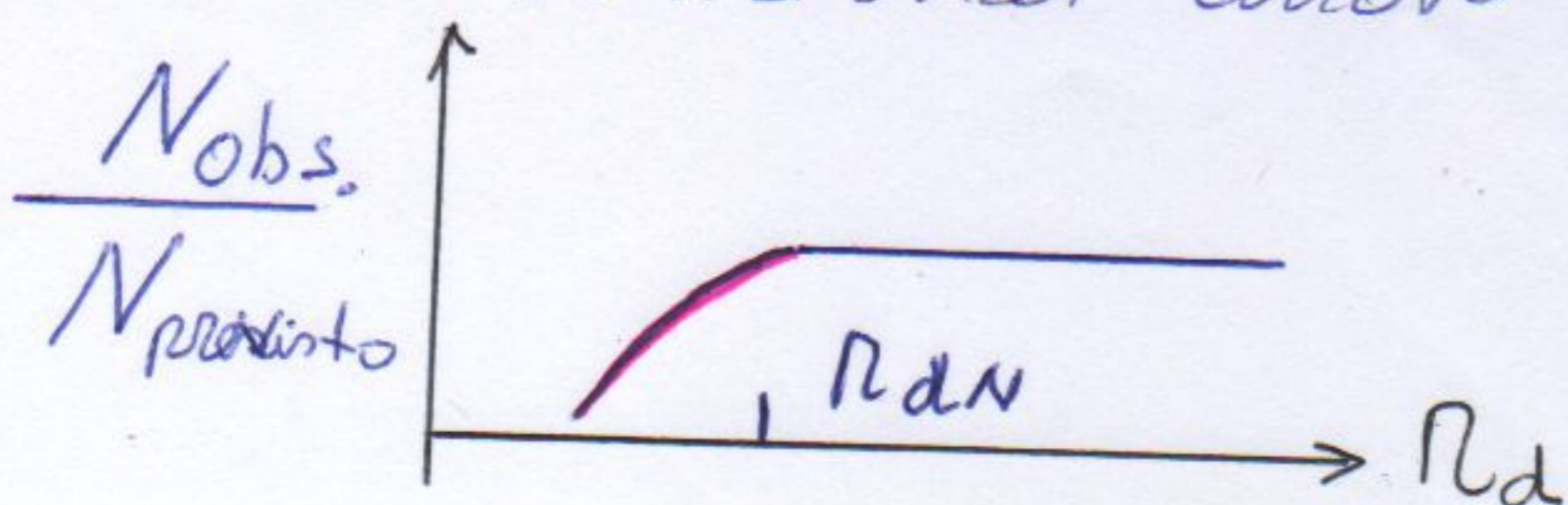
$$\therefore E_c = \frac{2Ze^2}{r_d} \Rightarrow \underline{\underline{r_d = \frac{2Ze^2}{E_c}}}$$

Procedimento:

Rutherford tinha  $\alpha$  de energia 7.7 MeV.

Para  $Z = 13$ , Al, e era  $E_c$ , mas Equiv. falha!

Ele diminuiu  $E_c$  colocando folhas de mica no feixe. Logo volta a funcionar com o  $E_c$  e fixo  $r_d$ :



$r_{dN} \sim 10^{-14}$  metro