SMA0300-Geometria Analítica - Aula 2

Roberta Wik Atique

O símbolo $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ indica uma sequência ordenada de vetores.

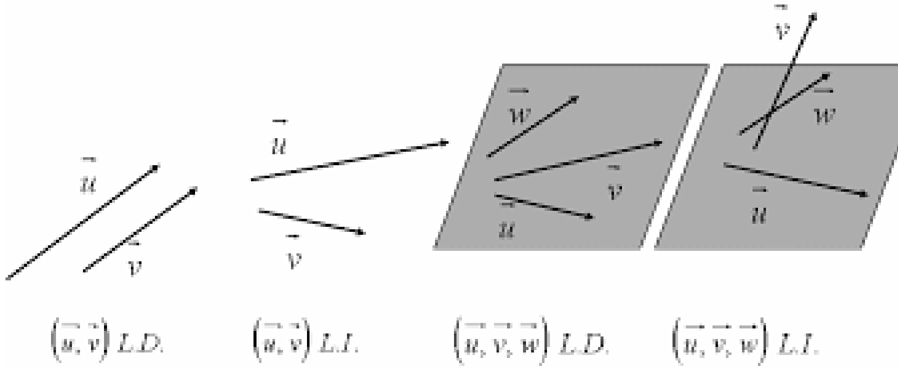
Observação: Convencionamos que o vetor nulo é paralelo a qualquer outro vetor, reta ou plano.

Definição (dependência linear):

1. Uma sequência $(\vec{v})$ é linearmente dependente (LD) se $\vec{v} = \vec{0}$.
2. Um par ordenado $(\vec{u}, \vec{v})$ é linearmente dependente (LD) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.
3. Uma tripla ordenada $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é linearmente dependente (LD) se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano. Em outras palavras, existe um plano que contém representantes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.
4. Qualquer sequência de 4 ou mais vetores é linearmente dependente (LD).

Definição (independência linear): Uma sequência de vetores é linearmente independente(LI) se não for linearmente dependente (LD):

1. Uma sequência $(\vec{v})$ é linearmente independente (LI) se $\vec{v} \neq \vec{0}$.
2. Um par ordenado $(\vec{u}, \vec{v})$ é linearmente independente (LI) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos.
3. Uma tripla ordenada $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é linearmente independente (LI) se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são paralelos a um mesmo plano. Em outras palavras, não existe um plano que contém representantes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.


$\vec{u}$
$\vec{v}$
$(\vec{u}, \vec{v})$ L.D.
$\vec{u}$
$\vec{v}$
$(\vec{u}, \vec{v})$ L.I.
$\vec{w}$
$\vec{v}$
$\vec{u}$
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ L.D.
$\vec{v}$
$\vec{w}$
$\vec{u}$
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ L.I.

Definição: Dados os vetores $\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, dizemos que $\vec{u}$ é combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ se existirem números reais (escalares) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n.$$

Observação: O vetor nulo é combinação linear de qualquer sequência de vetores.

Proposição 1: Dados dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ PARALELOS (mesma direção), um deles é combinação linear do outro.

Prova: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido:

$$\vec{u} = (\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|})\vec{v},$$

e vice-versa trocando $\vec{u}$ por $\vec{v}$. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentido contrário:

$$\vec{u} = -(\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|})\vec{v}.$$

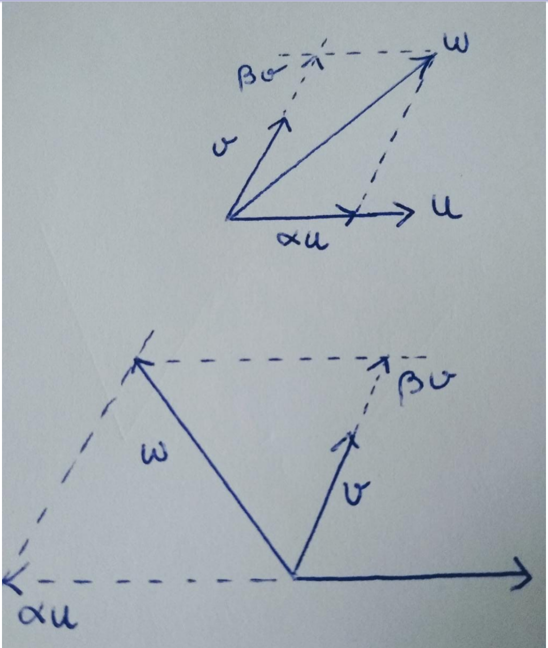
Proposição 2: Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ LD, um deles é combinação linear do outro.

Proposição 3: Suponhamos que $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI. Então $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LD se, e somente se, $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Prova:

- Observe que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ NÃO SÃO o vetor nulo e $\vec{w}$ PODE ser o vetor nulo.
- Suponha $\vec{w}$ paralelo a $\vec{u}$. Vimos que existe um número real α tal que $\vec{w} = \alpha\vec{u}$. Reciprocamente se $\vec{w}$ for paralelo a $\vec{v}$.
- Suponhamos que $\vec{w}$ não é paralelo a $\vec{u}$ nem a $\vec{v}$.

Combinação linear



Exercício: Assinale verdadeiro ou falso. Seja $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma sequência de vetores LD.

1. $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são necessariamente não nulos.
2. Um dos vetores pode ser o vetor nulo.
3. $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ podem ser paralelos.
4. Quaisquer dois vetores da sequência não podem ser LI.
5. Quaisquer dois vetores da sequência podem ser LD.

Proposição 4: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma sequência de vetores LD se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros dois.

Exercício: Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer vetores. Tome:

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}, \quad \vec{b} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}, \quad \vec{c} = 7\vec{v} - 3\vec{w}$$

Mostre que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é LD.
Solução: Vamos encontrar escalares x, y, z (um deles não nulo! por que?) tais que

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}.$$

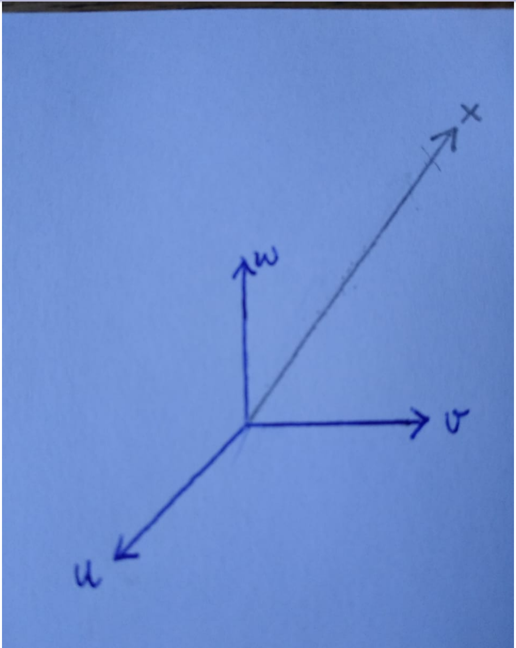
$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c} = x\vec{u}+2x\vec{v}-x\vec{w}+2y\vec{u}-3y\vec{v}+y\vec{w}+7z\vec{v}-3z\vec{w} =$$

$$(x+2y)\vec{u}+(2x-3y+7z)\vec{v}+(-x+y-3z)\vec{w} = \vec{0} = 0\vec{u}+0\vec{v}+0\vec{w}.$$

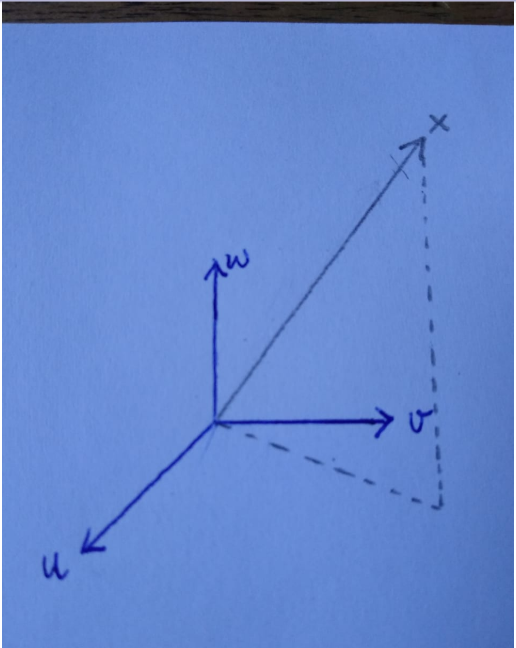
Observe que $x = 2, y = -1, z = -1$ é uma solução. Logo $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

Proposição 5: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma sequência de vetores LI então qualquer vetor $\vec{x}$ é combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

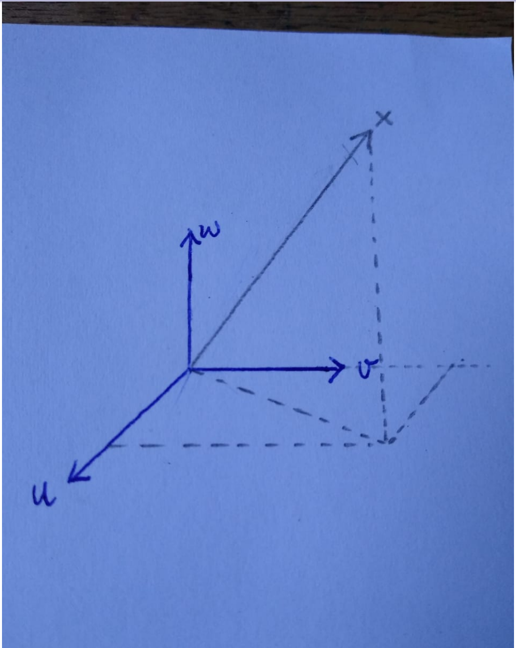
Combinação linear



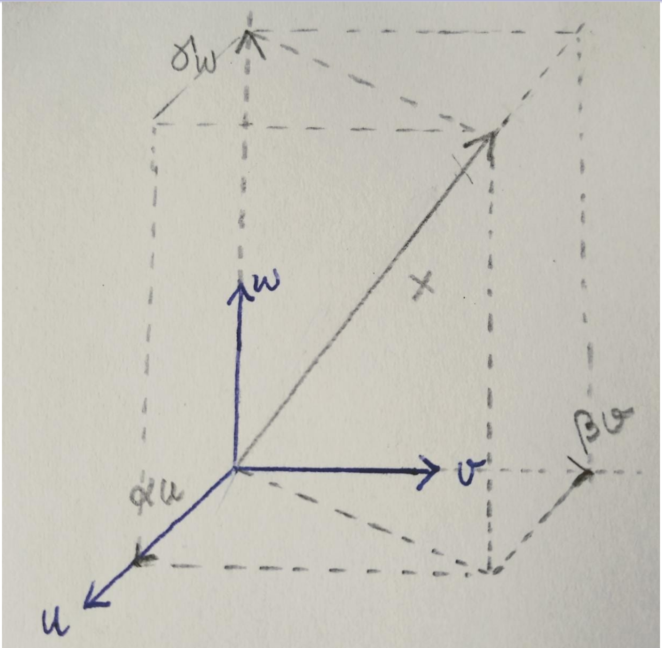
Combinação linear



Combinação linear



Combinação linear



Proposição 6: $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})$, é uma sequência de vetores LD se, e somente se, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ não todos nulos tais que

$$\alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \cdots + \alpha_n\vec{v_n} = \vec{0}.$$

Vimos que se $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ são dois vetores LD não nulos então $\vec{v_2} = \alpha\vec{v_1}$ onde $\alpha = \pm\|\vec{v_2}\|/\|\vec{v_1}\|$. Logo $\alpha\vec{v_1} - \vec{v_2} = \vec{0}$, $\alpha \neq 0$. Se $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ é LD um deles é combinação linear dos outros dois, suponhamos $\vec{v_1}$. Existem α_2 e α_3 escalares tais que

$$\vec{v_1} = \alpha_2\vec{v_2} + \alpha_3\vec{v_3}.$$

Logo

$$\vec{v_1} - \alpha_2\vec{v_2} - \alpha_3\vec{v_3} = \vec{0}.$$

Proposição 7: $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})$, $n = 1, 2, 3$, é uma sequência de vetores LI se, e somente se, a expressão

$$\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \cdots + \alpha_n \vec{v_n} = \vec{0}$$

admite apenas a solução nula: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Proposição 8: Seja $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$, $n = 1, 2, 3$, uma sequência de vetores LI. Se

$$\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \cdots + \alpha_n \vec{v_n} = \beta_1 \vec{v_1} + \beta_2 \vec{v_2} + \cdots + \beta_n \vec{v_n}$$

então $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2 \dots \alpha_n = \beta_n$.

Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI então dado qualquer vetor $\vec{x}$ existem ÚNICOS escalares α, β, γ tais que

$$\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}.$$

Definição: Uma base de V^3 é uma sequência $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ LI.

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3 e $\vec{v}$ um vetor qualquer de V^3. Então existem únicos escalares x, y, z tais que $\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Tais escalares são chamados de coordenadas de $\vec{v}$ na base E.