

# PEF – 3208 – Fundamentos da Mecânica das Estruturas

Prof. Dr. Rodrigo Provasi

e-mail: [provasi@usp.br](mailto:provasi@usp.br)

Sala 11 – Prédio de Engenharia Civil



# Figuras Planas

# Introdução

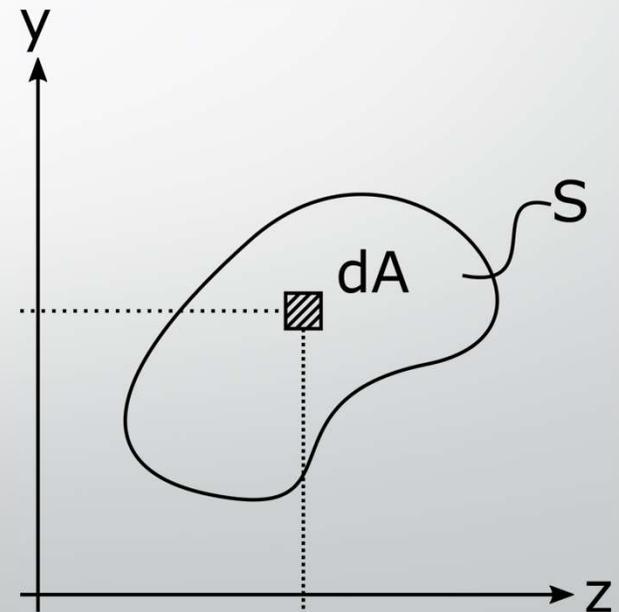
- Porque estudarmos as propriedades das figuras planas?
  - As tensões podem ser escritas em função do esforço solicitante e de alguma propriedade da seção transversal
  - Essas podem ser áreas e momentos de inércia de áreas

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \sigma = \frac{M}{I_{z0}} y \quad \tau = \frac{T}{J} r$$

# Definições

- Para uma figura plana qualquer, definimos:
- Área da figura  $S$ :

$$A = \int_S dA$$

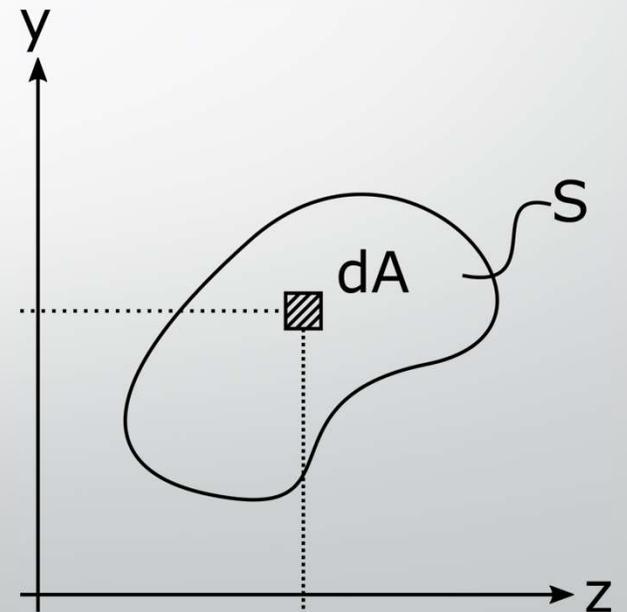


# Definições

- Momento estático de  $S$ :

$$M_z = \int_S y \, dA, \text{ em relação à } z$$

$$M_y = \int_S z \, dA, \text{ em relação à } y$$

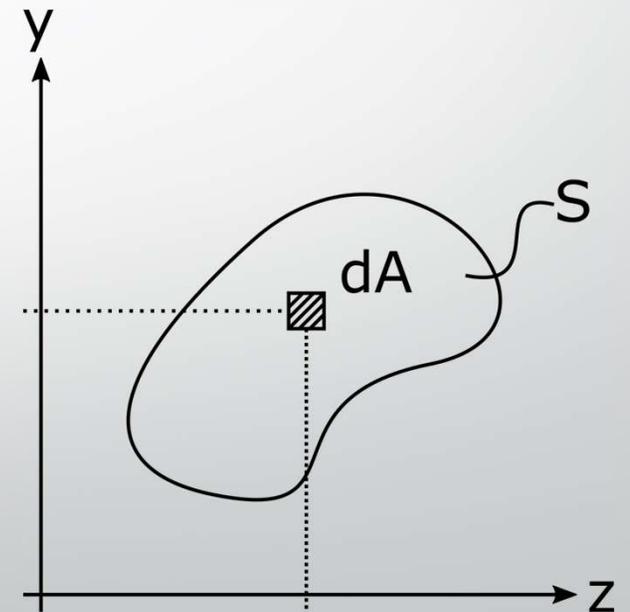


# Definições

- Momento de inércia de  $S$ :

$$I_z = \int_S y^2 dA, \text{ em relação à } z$$

$$I_y = \int_S z^2 dA, \text{ em relação à } y$$

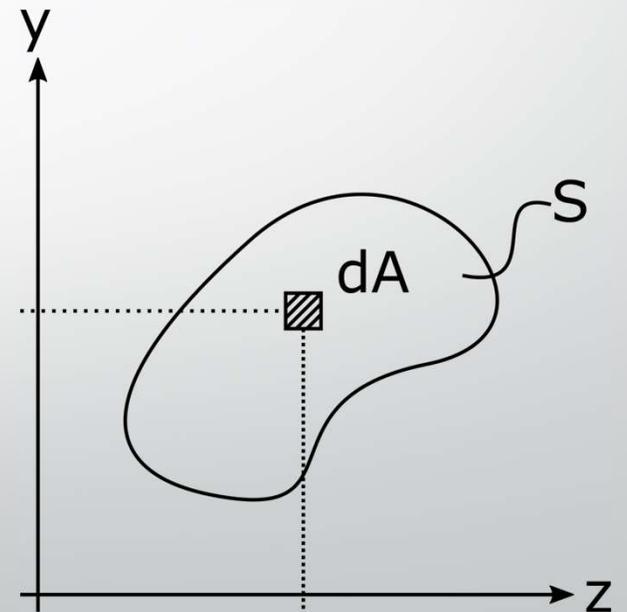


# Definições

- Momento polar de inércia de  $S$ :

$$J = \int_S r^2 dA$$

onde  $r$  é a posição radial da área infinitesimal  $dA$ ,  
ou seja  $r^2 = y^2 + z^2$ .

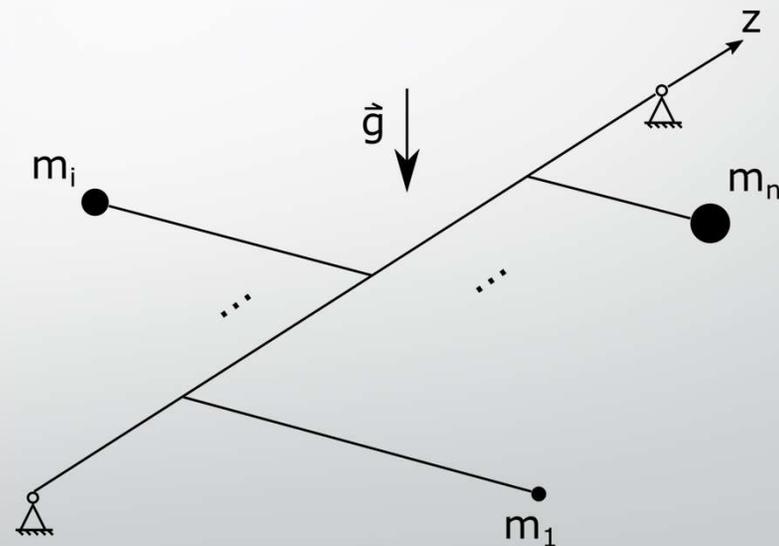


# Propriedades do Momento Estático

- Considere o problema da figura.
- Para haver equilíbrio ao redor de  $z$ , temos:

$$\sum_i m_i \mathbf{g} d_i = \mathbf{0} \rightarrow \sum_i m_i d_i = 0$$

*Importante:  $d_i$  tem sinal!*



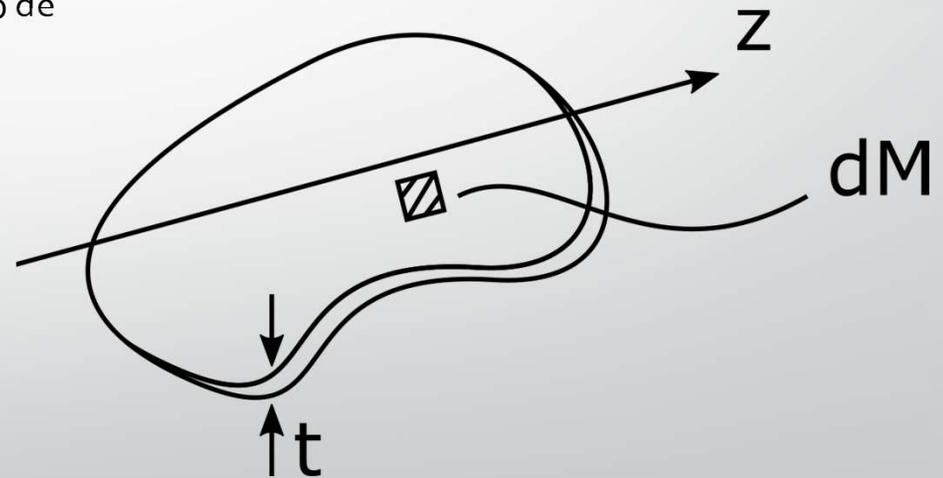
# Propriedades do Momento Estático

- Se estendermos o mesmo conceito para um sólido de densidade  $\gamma$  e espessura  $t$  constante:

$$\int_S y dm = \int_S y \gamma t dA = 0$$

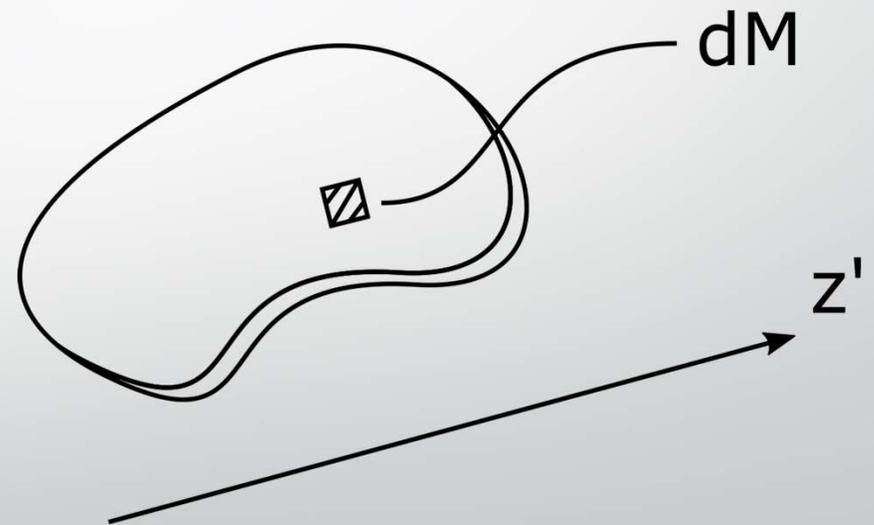
$$\gamma t \int_S y dA = \gamma t M_z = 0$$

Logo, para haver equilíbrio:  $M_z = 0$



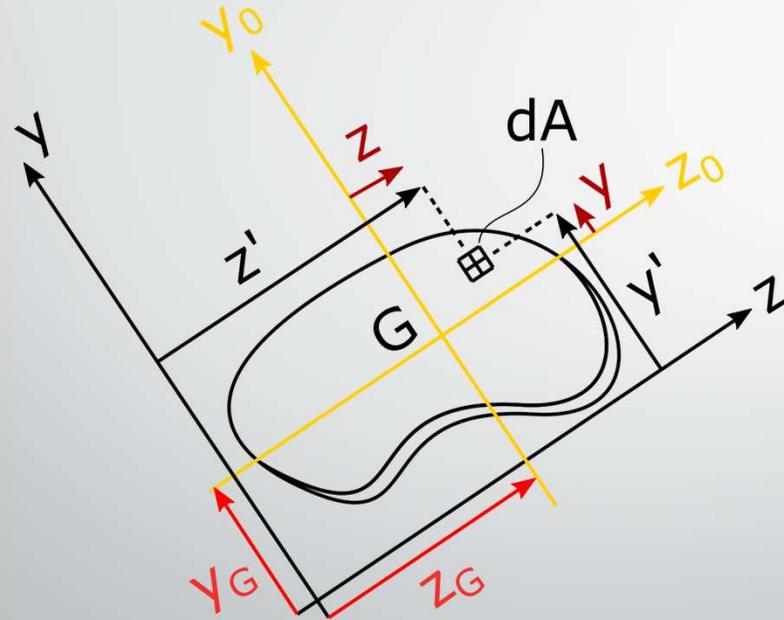
# Propriedades do Momento Estático

- Agora, não é todo o eixo que apresenta a propriedade anteriormente descrita.
- É fácil ver na figura que  $M_{z'} \neq 0$





# Baricentro de uma figura plana



- Observando a figura:

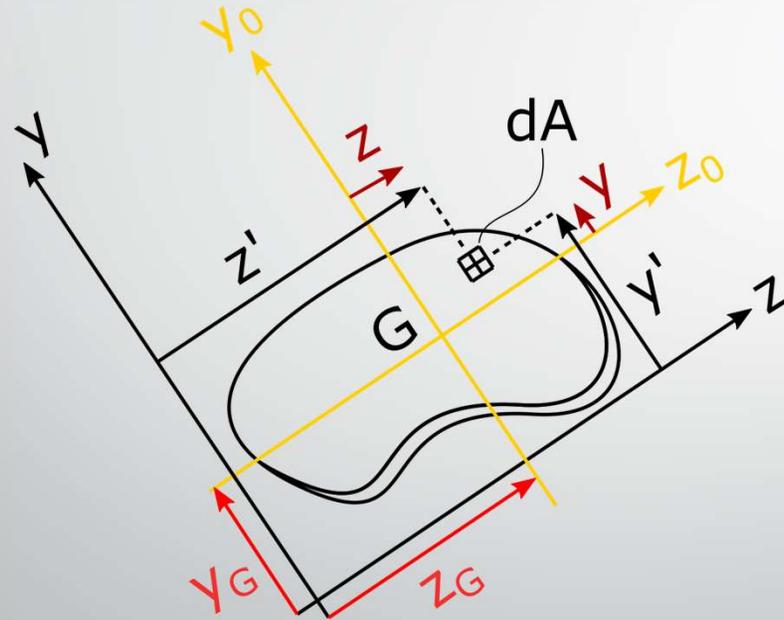
$$y' = y + y_G$$

- Assim, o momento estático em relação ao eixo z pode ser escrito como:

$$M_{S,z} = \int_S y' dA = \int_S (y + y_G) dA = \int_S y dA + \int_S y_G dA$$

$$M_{S,z} = M_{S,z_0} + y_G \int_S dA = y_G A$$

# Baricentro de uma figura plana



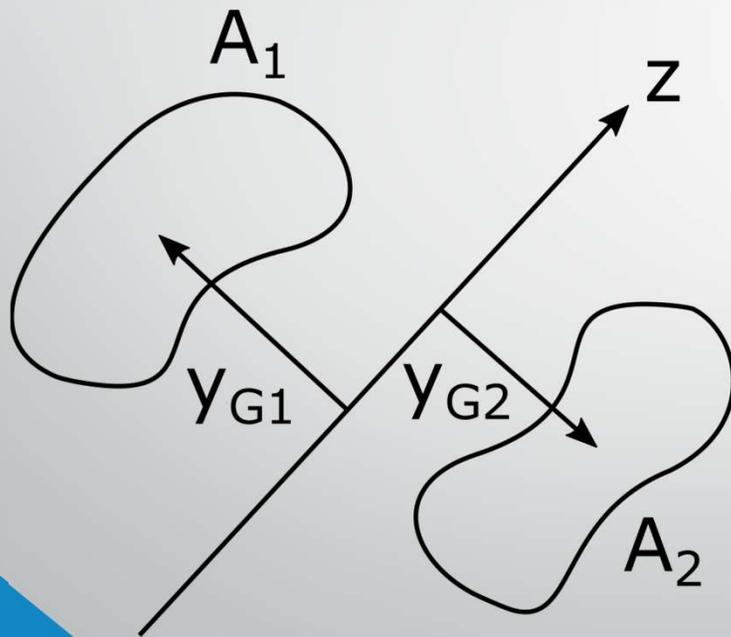
- Logo:

$$y_G = \frac{M_{s,z}}{A}$$

- Analogamente:

$$z_G = \frac{M_{s,y}}{A}$$

# Baricentro de figuras compostas



- Para determinar o baricentro de figuras compostas:

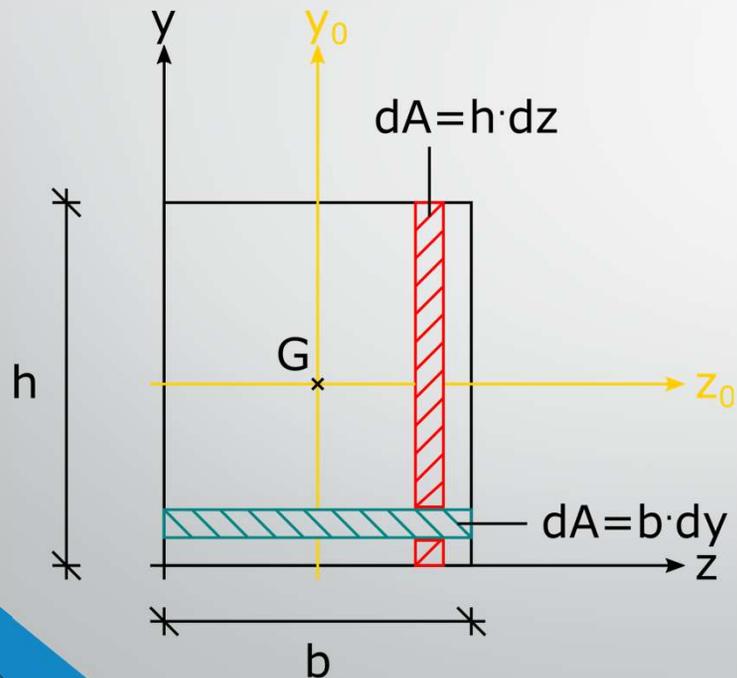
$$M_{s,z}^{total} = \sum_{i=1}^n y_{Gi} A_i = y_G A$$

- Logo:

$$y_G = \frac{M_{s,z}^{total}}{A}$$

com  $A = \sum A_i$ .

# Exemplo: Retângulo



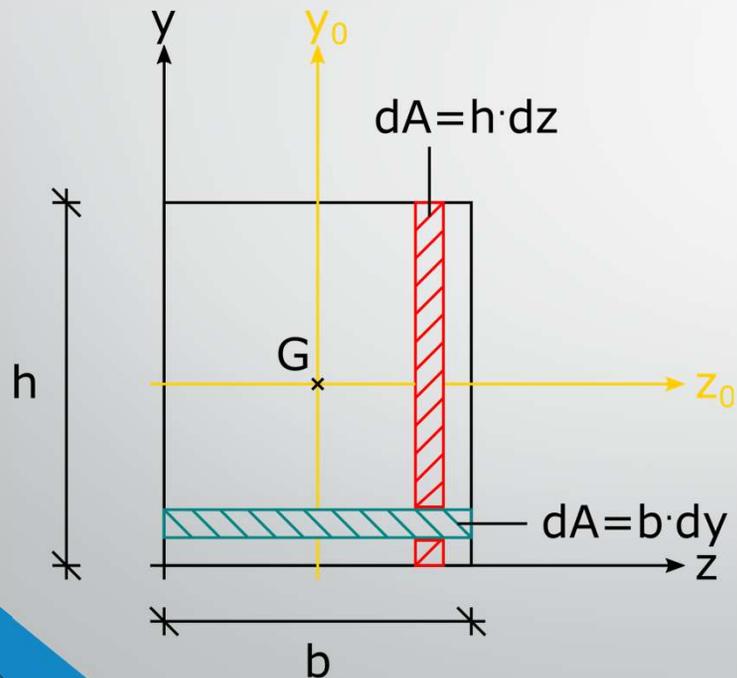
- Vamos fazer os cálculos para determinar o baricentro do retângulo:

$$y_G = \frac{M_{s,z}}{A}, A = b h$$

$$M_{s,z} = \int_S y dA = \int_0^h y b dy = b \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{b h^2}{2}$$

$$y_G = \frac{\frac{b h^2}{2}}{b h} = \frac{h}{2}$$

# Exemplo: Retângulo



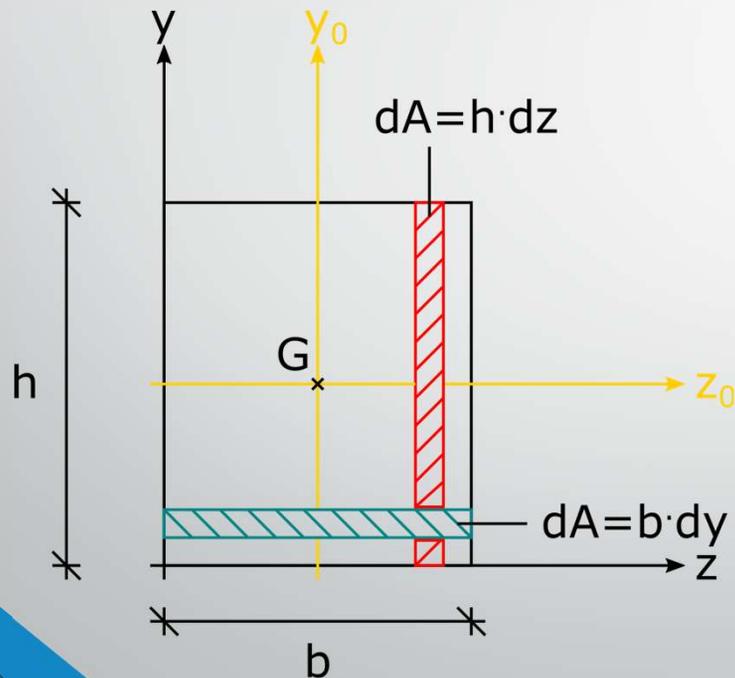
- Agora, para a posição  $z_G$ :

$$z_G = \frac{M_{S,y}}{A}, A = b h$$

$$M_{S,y} = \int_S z dA = \int_0^b z h dz = h \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^b = \frac{h b^2}{2}$$

$$z_G = \frac{\frac{h b^2}{2}}{b h} = \frac{b}{2}$$

# Exemplo: Retângulo



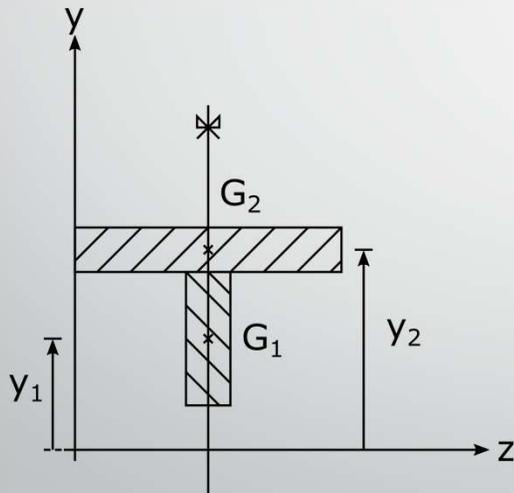
- Para mostrar que o eixo  $z_0$  é o eixo no qual o momento estático é zero:

$$M_{S,z_0} = \int_S y \, dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y \, b \, dy = b \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

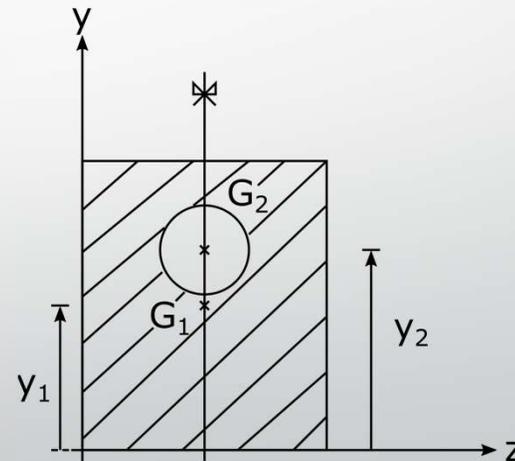
$$M_{S,z_0} = b \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( -\frac{h}{2} \right)^2 \right] = 0$$

# Baricentro

- Nota importante: o baricentro **sempre** está sobre os eixos de simetria da área!

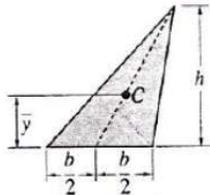
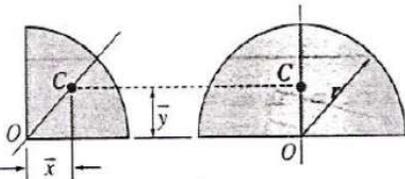
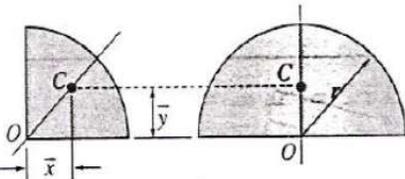


$$y_g = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2}$$



$$y_g = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2}$$

# Baricentro ou centroide

Forma de Superfície		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Triângulo			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicírculo		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$

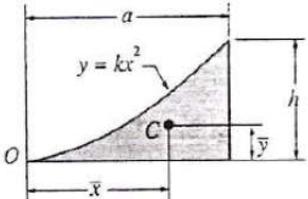
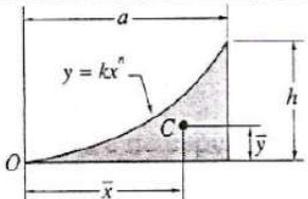
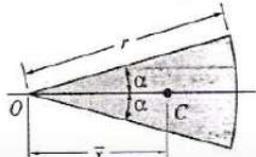
extraído de Beer, F. P. & Johnston Jr., R.

# Baricentro ou centroide

Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um quarto de elipse		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Limitada por um segmento de reta e uma semi-elipse		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e uma semiparábola		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Limitada por um segmento de reta e uma parábola		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$

extraído de Beer, F. P. & Johnston Jr., R.

# Baricentro ou centroide

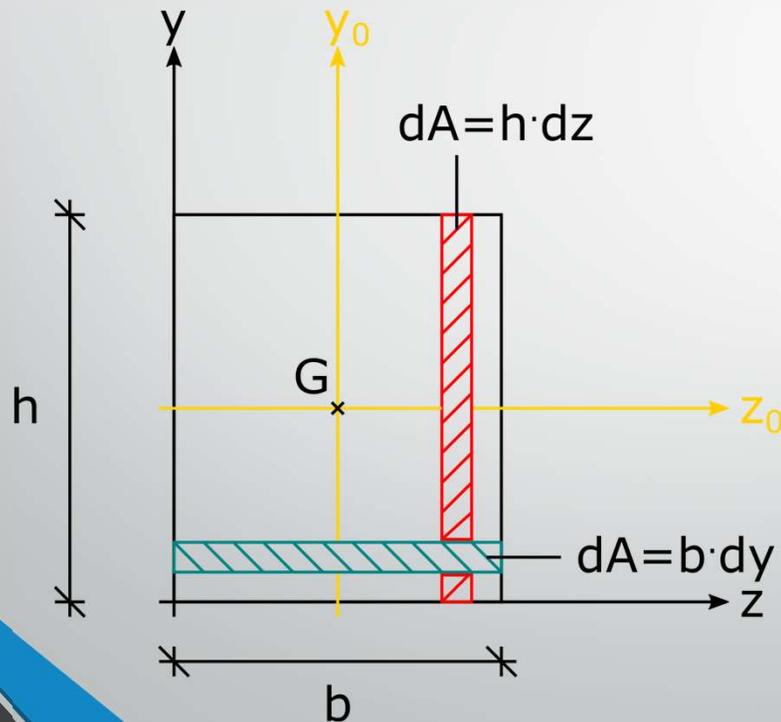
<p>Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um arco de parábola do 2º grau.</p>		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
<p>Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um arco de parábola do grau <math>n</math>.</p>		$\frac{n+1}{n+2} a$	$\frac{n+1}{4n+2} h$	$\frac{ah}{n+1}$
<p>Setor circular</p>		$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	$0$	$\alpha r^2$

extraído de Beer, F. P. & Johnston Jr., R.

# Momentos de Inércia

- Os momentos de inércia são importantes para a flexão → Determinam a rigidez a flexão (com o módulo de elasticidade do material determinam quão rígido uma barra é em relação à Flexão)

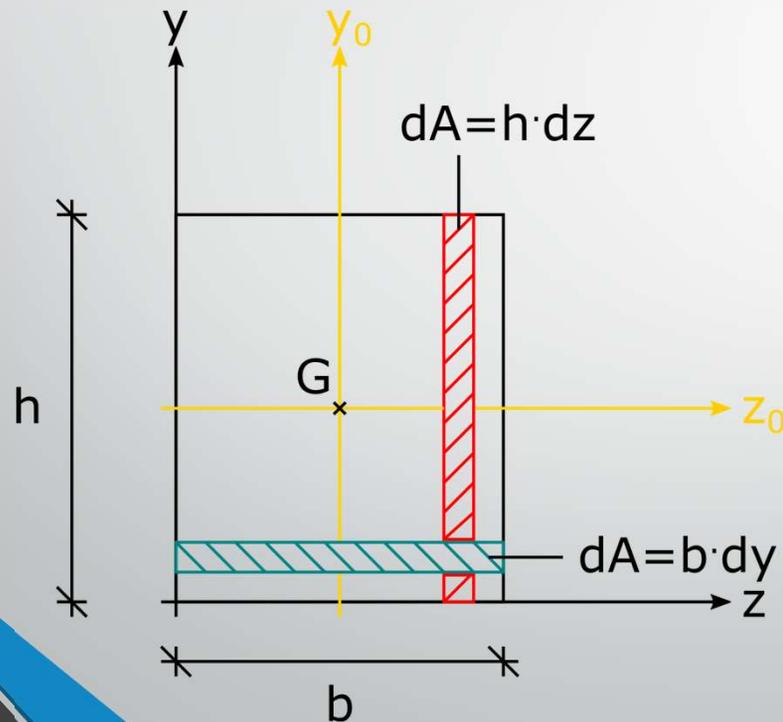
# Momento de inércia: retângulo



- Para o retângulo que vimos anteriormente, vamos calcular os momentos de inércia em relação aos eixos  $y$  e  $z$ .
- Para o eixo  $z$ :

$$I_z = \int_S y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{b h^3}{3}$$

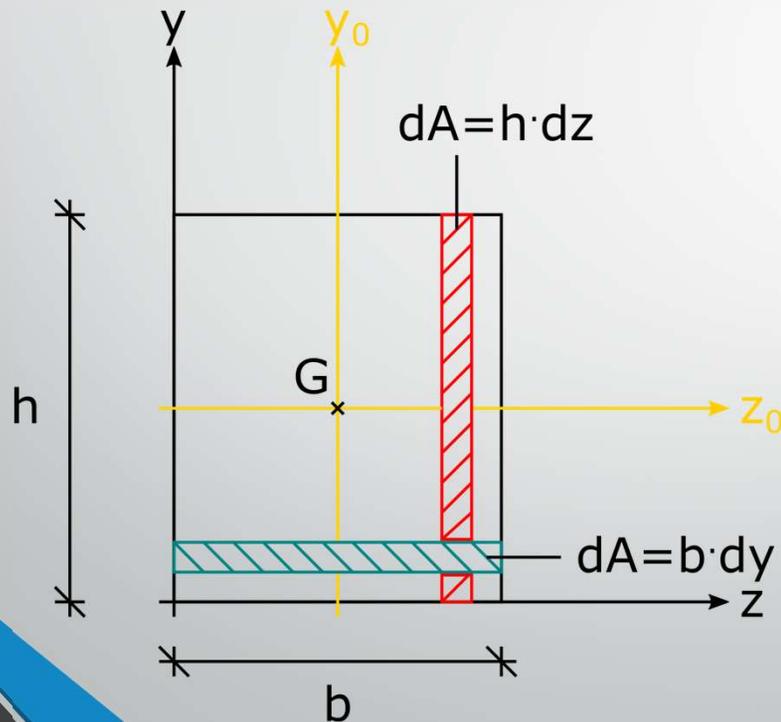
# Momento de inércia: retângulo



- Para o eixo  $y$ :

$$I_y = \int_S z^2 dA = \int_0^b z^2 h dz = h \left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^b = \frac{h b^3}{3}$$

# Momento de inércia: retângulo

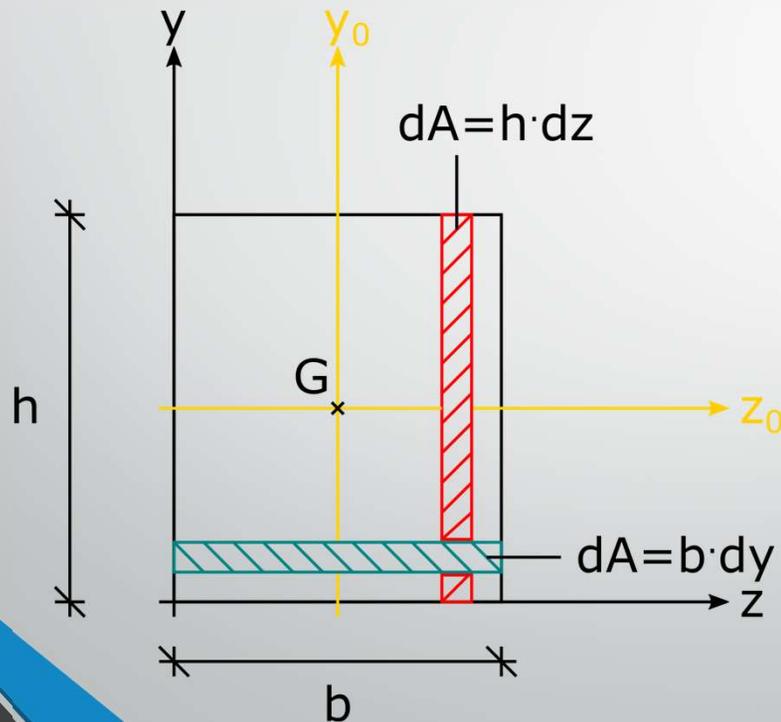


- Vamos repetir o procedimento para os eixos  $y_0$  e  $z_0$ .
- Para o eixo  $z_0$ :

$$I_{z_0} = \int_S y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$I_{z_0} = b \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{h}{2} \right)^3 - \frac{1}{3} \left( -\frac{h}{2} \right)^3 \right] = \frac{b h^3}{12}$$

# Momento de inércia: retângulo

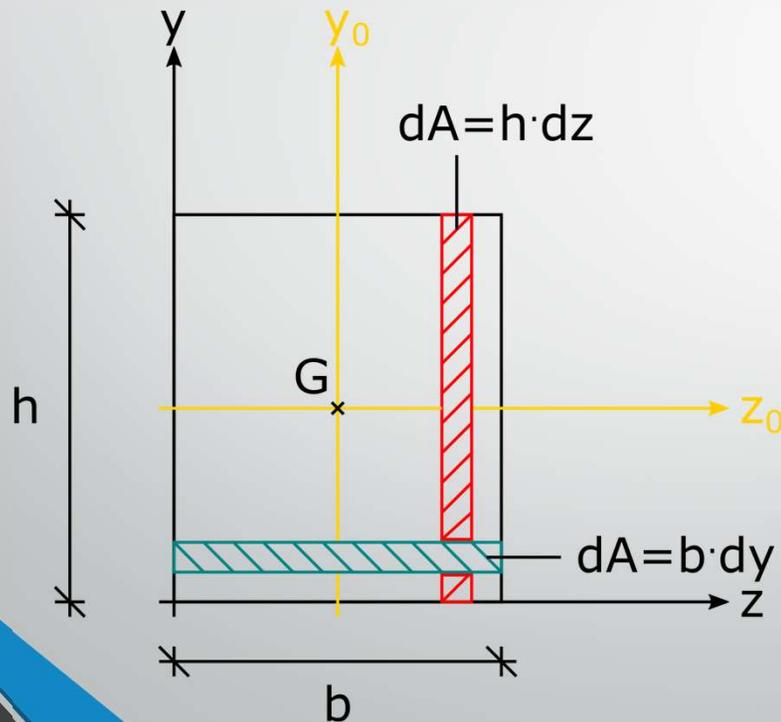


- Para o eixo  $y_0$ :

$$I_{y_0} = \int_S z^2 dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 h dz = b \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

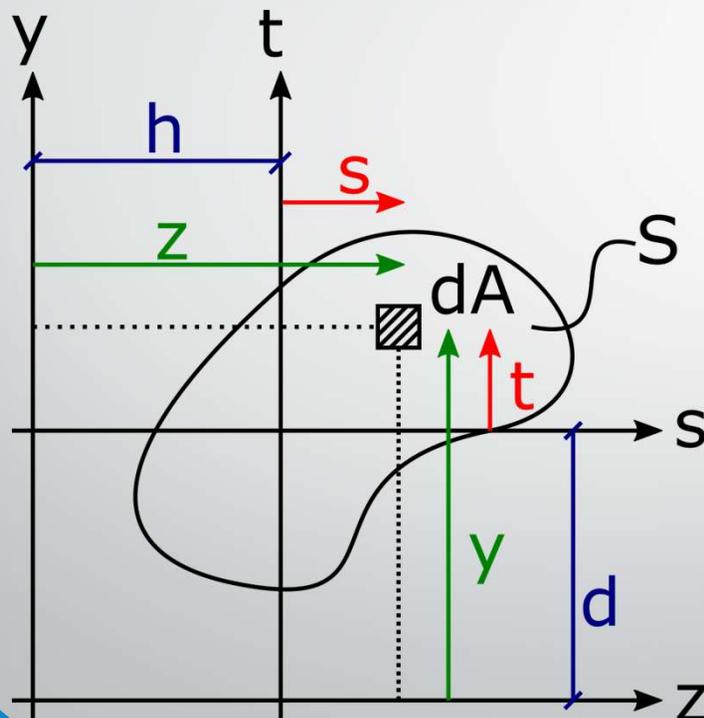
$$I_{y_0} = h \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{b}{2} \right)^3 - \frac{1}{3} \left( -\frac{b}{2} \right)^3 \right] = \frac{h b^3}{12}$$

# Momento de inércia: retângulo



- Como pode ser visto, os momentos de inércia em relação aos eixos que passam pelo baricentro não são nulos, porém são mínimos!
- Como relacionar os momentos de inércia dos dois sistemas?

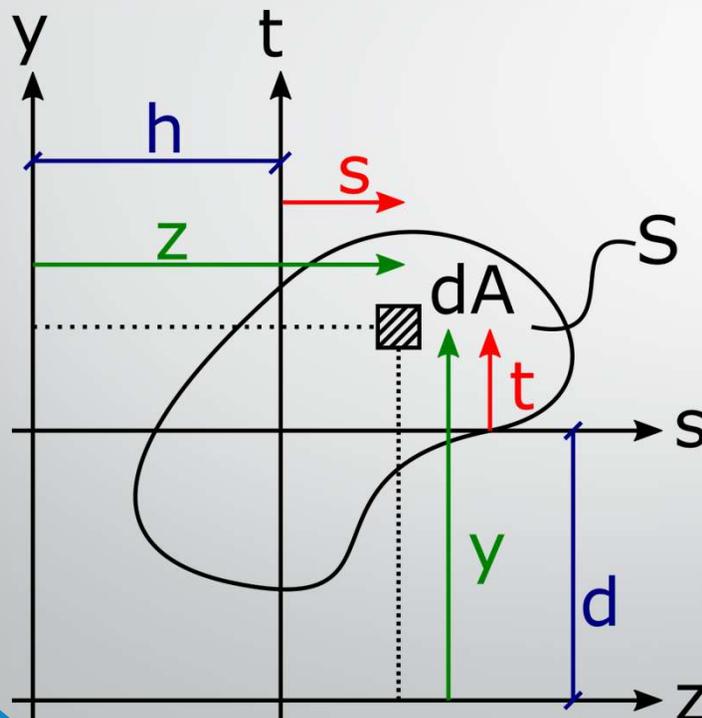
# Teorema de Steiner



- Vamos analisar a relação entre os eixos  $z$  e  $s$ . Podemos escrever a relação entre as distâncias medidas entre a área infinitesimal e os eixos como:

$$y = t + d$$

# Teorema de Steiner



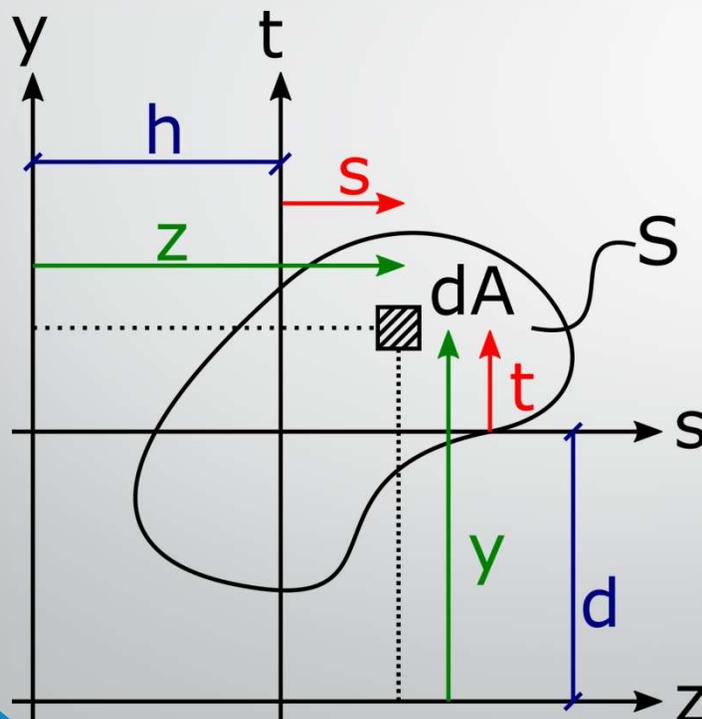
- Assim, podemos escrever o momento de inércia em relação ao eixo z como:

$$I_z = \int_S y^2 dA = \int_S (t + d)^2 dA = \int_S (t^2 + 2td + d^2) dA$$

$$I_z = \int_S t^2 dA + 2d \int_S t dA + d^2 \int_S dA$$

$$I_z = I_s + 2d M_{S,s} + d^2 A$$

# Teorema de Steiner



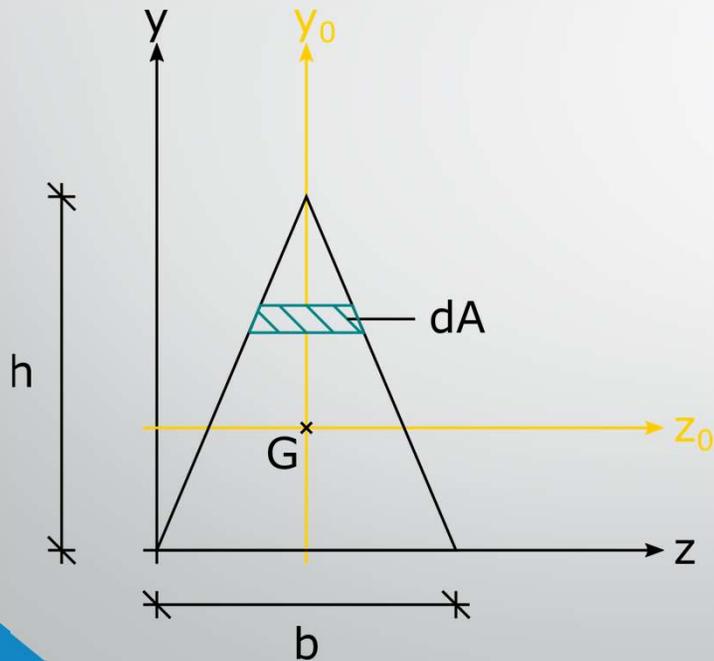
- Se o eixo  $s$  coincidir com o eixo que passa pelo baricentro  $z_0$  (ou seja,  $M_{z_0} = 0$ ):

$$I_z = I_{z_0} + d^2 A$$

- Se a figura é composta, é possível obter o baricentro da figura composta transportando todos os momentos de inércia para o eixo do baricentro da figura composta:

$$I_{z_0} = \sum_{i=1}^n (I_{z_0,i} + d_i^2 A_i)$$

# Momento de inércia de um triângulo

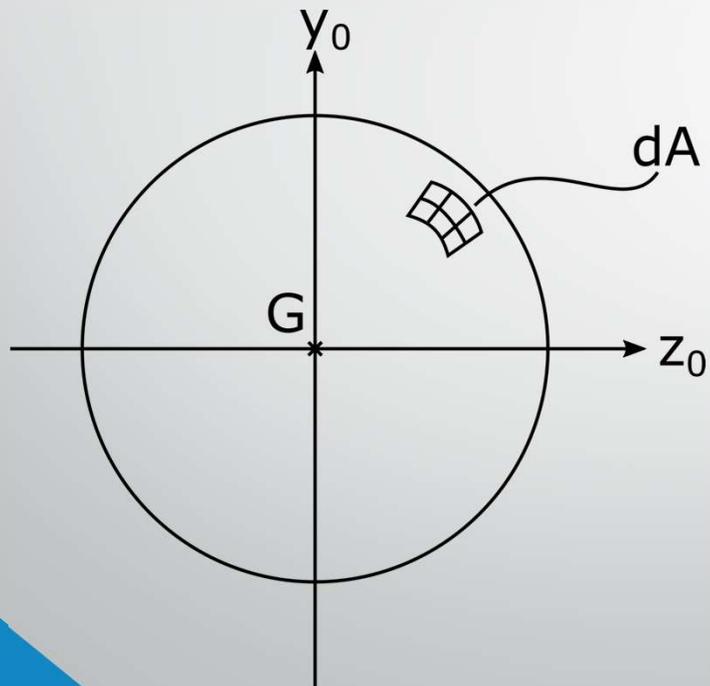


- É possível demonstrar que:

$$I_z = \frac{b h^3}{12}$$

$$I_{z_0} = \frac{b h^3}{36}$$

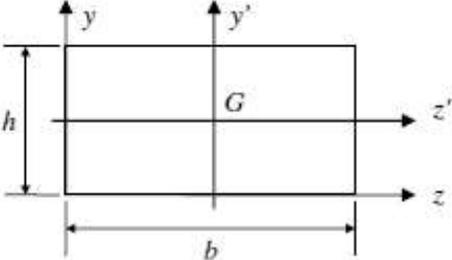
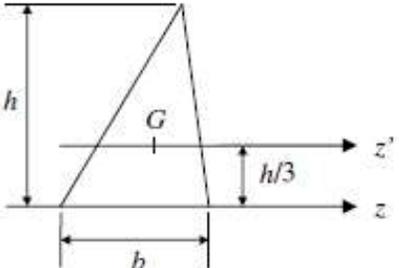
# Momento de inércia de um círculo



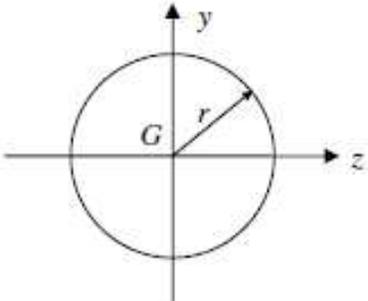
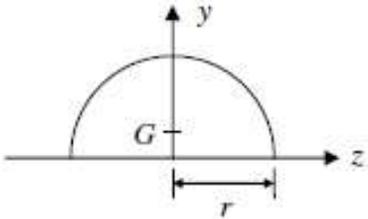
- É possível demonstrar que:

$$I_z = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

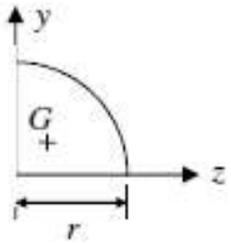
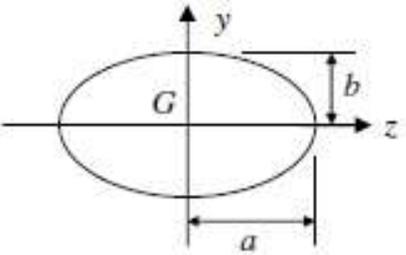
# Momento de inércia de figuras geométricas comuns

Retângulo		$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}$ $I_z = \frac{b \cdot h^3}{3}$ $I_y = \frac{b^3 \cdot h}{3}$
Triângulo		$I_z = \frac{b \cdot h^3}{36}$ $I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$

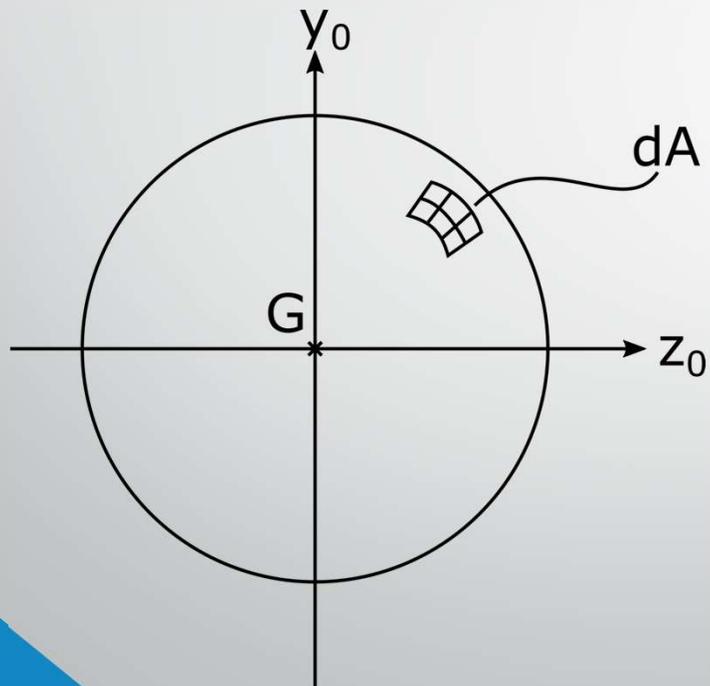
# Momento de inércia de figuras geométricas comuns

Círculo		$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$
Semicírculo		$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{8}$

# Momento de inércia de figuras geométricas comuns

Quadrante		$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{16}$
Elipse		$I_z = \frac{\pi \cdot a \cdot b^3}{4}$ $I_y = \frac{\pi \cdot a^3 \cdot b}{4}$

# Momento Polar de Inércia



- Para calcular o momento polar de inércia vamos utilizar um círculo. Assim:

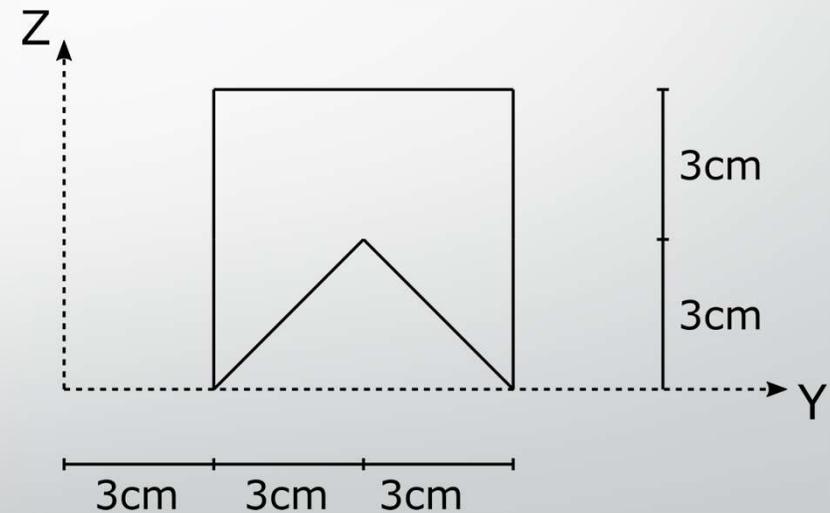
$$J = \int_S r^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\theta$$

$$J = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2}$$

## Exemplo: Prova P2 / 2019

1ª Questão: Considere a figura plana dada (pentágono) e determine:

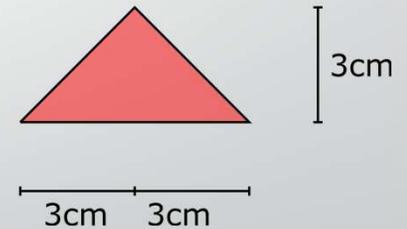
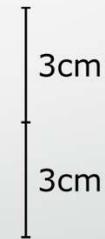
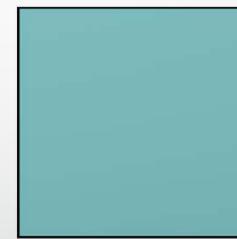
- A) O centro de gravidade  $G$  em relação aos eixos  $Y$  e  $Z$  dados;
- B) O momento de inércia em torno do **eixo vertical** que passa por  $G$ .



## Exemplo: Prova P2 / 2019

*Para o cálculo do item A) precisamos dividir a figura em áreas mais simples para o cálculo:*

*Considerando as figuras ao lado, podemos construir uma tabela com os valores e posições dos baricentros das figuras em relação aos eixos dados.*



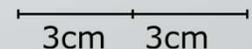
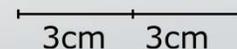
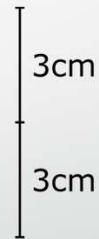
## Exemplo: Prova P2 / 2019

Área	$y_G$	$z_G$	$A$
I - Quadrado	6	3	36
II - Triângulo	6	1	9

$$y_G = \frac{y_I A_I - y_{II} A_{II}}{A_I - A_{II}} = \frac{6 \cdot 36 - 6 \cdot 9}{36 - 9} = 6 \text{ cm}$$

*Está sobre o eixo de simetria*

$$z_G = \frac{z_I A_I - z_{II} A_{II}}{A_I - A_{II}} = \frac{6 \cdot 36 - 1 \cdot 9}{36 - 9} = \frac{11}{3} = 3,67 \text{ cm}$$

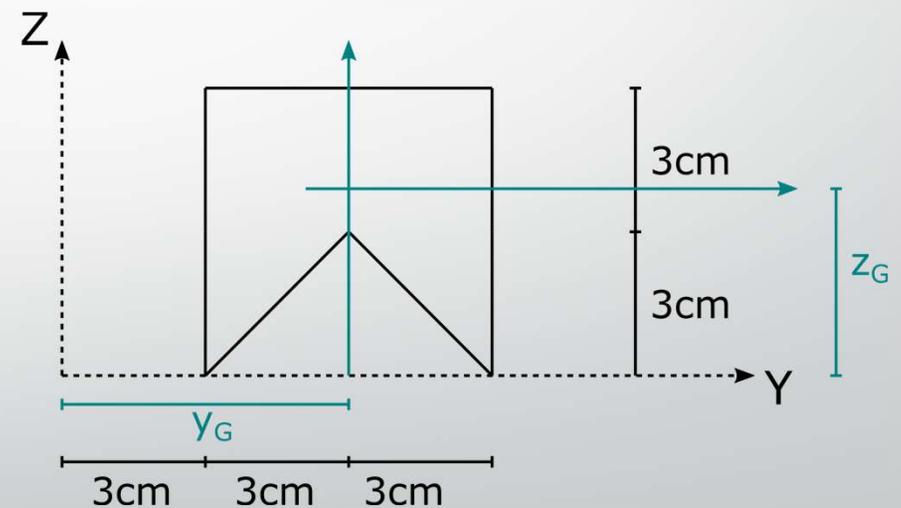


## Exemplo: Prova P2 / 2019

*Sendo assim:*

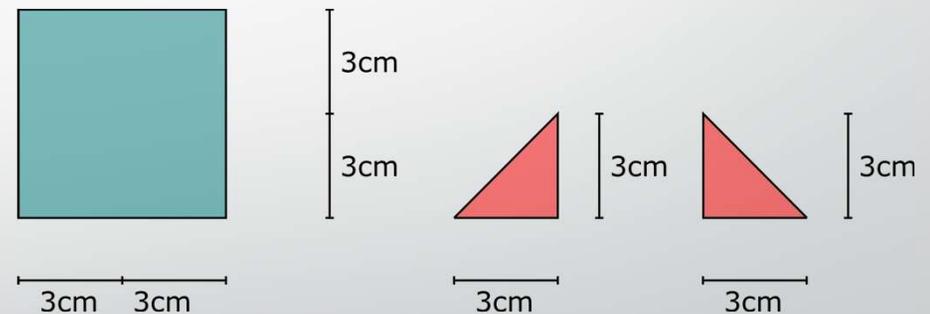
*A) As coordenadas do baricentro  $G$  são  $(6; 3,67)$ .*

*Já para o item B, precisamos redividir as áreas com o triângulos cuja base esteja paralela ao eixo  $z$ .*



# Exemplo: Prova P2 / 2019

*Já para o item B, precisamos redividir as áreas com o triângulos cuja base esteja paralela ao eixo z.*



## Exemplo: Prova P2 / 2019

*Dessa forma:*

$$I_{z0} = I_{z0}^{quad} - 2I_{z0}^{tri}$$

$$I_{z0} = \left( \frac{6 \cdot 6^3}{12} \right) - 2 \left( \frac{3 \cdot 3^3}{36} + 1^2 \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \right)$$

$$I_{z0} = 108 - 2(2,25 + 4,5) = 94,5 \text{ cm}^4$$

*Dessa forma:*

$$I_{z0} = I_{z0}^{quad} - 2I_{z0}^{tri}$$

$$I_{z0} = \left( \frac{6 \cdot 6^3}{12} \right) - 2 \left( \frac{3 \cdot 3^3}{36} + 1^2 \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \right)$$

$$I_{z0} = 108 - 2(2,25 + 4,5) = 94,5 \text{ cm}^4$$

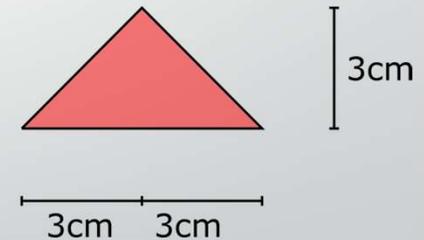
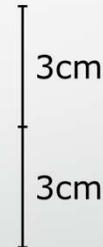
# Exemplo: Prova P2 / 2019

Apesar de não ser pedido no exercício, vamos calcular o momento de inércia na outra direção:

$$I_{y0} = I_{y0}^{quad} - I_{z0}^{tri}$$

$$I_{y0} = \left( \frac{6 \cdot 6^3}{12} + |3 - 3,67|^2 \cdot 36 \right) - \left( \frac{6 \cdot 3^3}{36} + |2 - 3,67|^2 \cdot 9 \right)$$

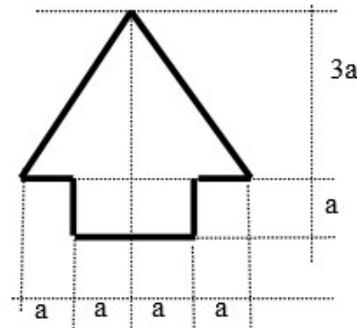
$$I_{y0} = (108 + 16) - (4,5 + 25) = 153,5 \text{ cm}^4$$



# Exemplo: Prova Sub / 2019

Questão B (3 pontos): Para a seção transversal da figura, determine:

- a posição de centro de gravidade  $G$ , fornecendo coordenadas e indicando os eixos de referência;
- o momento de inércia em relação ao eixo horizontal passando por  $G$ .



# Exemplo: Prova Sub / 2019

QB      30

Adotando o seguinte sistema de eixos:

a) Por simetria,  $z_G = 0$ . 0,75

$$y_G = \frac{\frac{4a \cdot 3a}{2} \cdot 2a + 2a \cdot a \cdot \frac{a}{2}}{\frac{4a \cdot 3a}{2} + 2a \cdot a} = \frac{12a^3 + a^3}{6a^2 + 2a^2} = \frac{13}{8}a \quad (1,625a) \quad 0,75$$

## Exemplo: Prova Sub / 2019

$$b) I_{z_0} = ?$$

$$I_{z_0} = \left[ \left( \frac{2a \cdot a^3}{12} \right) + \left( \frac{a}{2} - \frac{13a}{8} \right)^2 \cdot 2a^2 \right] + \left[ \left( \frac{4a \cdot 3a^3}{36} \right) + \left( 2a - \frac{13a}{8} \right)^2 \cdot 6a^2 \right]$$

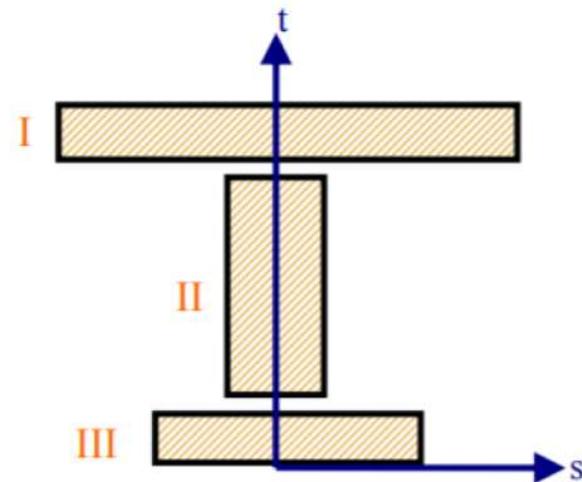
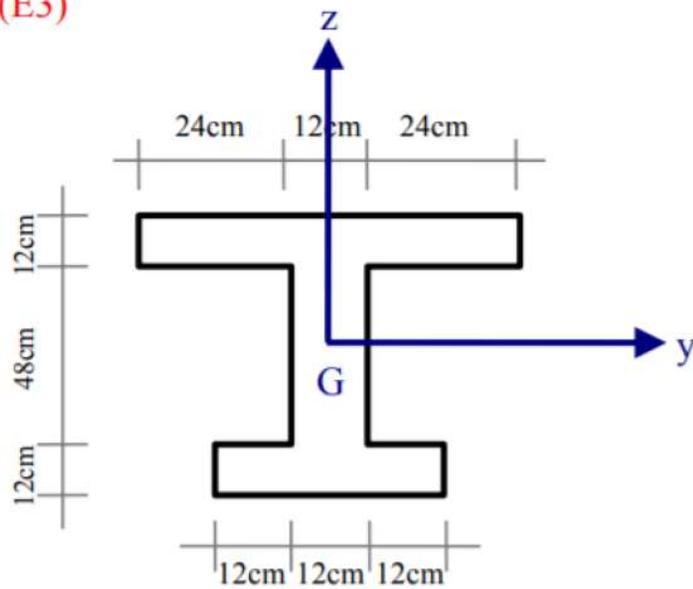
$$I_{z_0} = \left[ \frac{a^4}{6} + \frac{81a^2 \cdot 2a^2}{64} \right] + \left[ 3a^4 + \frac{9a^2 \cdot 6a^2}{64} \right] =$$

$$\boxed{I_{z_0} = \frac{157a^4}{24} \quad (6,541\bar{6}a^4)} \quad 1,5$$

# Exemplo

Calcule os Momentos de Inércia em relação aos seus eixos principais de inércia.

(E3)



# Exemplo

1) Calculo do Centro de Gravidade.

$s_{CG} = 0$  Pois Ot é um eixo de simetria da peça.

$$t_{CG} = \frac{A_I \cdot t_{CGI} + A_{II} \cdot t_{CGII} + A_{III} \cdot t_{CGIII}}{A_I + A_{II} + A_{III}}$$

$$t_{CG} = \frac{60.12.66 + 12.48.36 + 36.12.6}{60.12 + 12.48 + 36.12} \rightarrow t_{CG} = 41 \text{ cm}$$

# Exemplo

2) Momento de Inércia em relação ao eixo Oy.

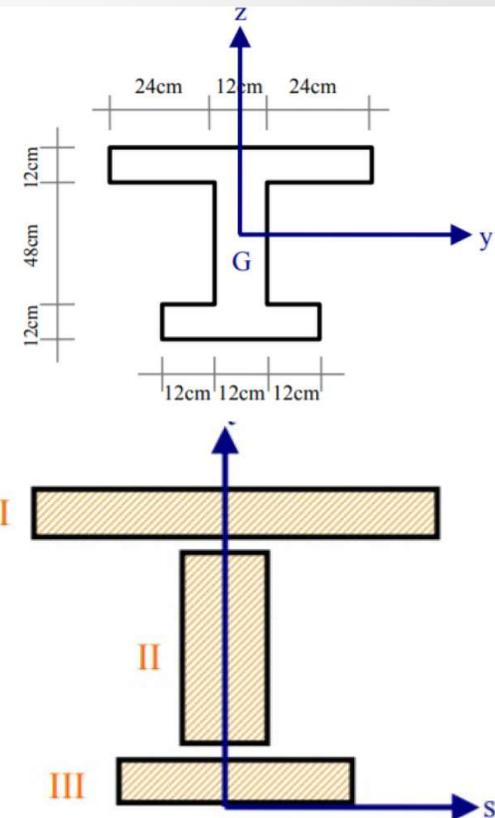
$$I_y = I_{Iy} + I_{IIy} + I_{IIIy}$$

$$I_{Iy} = I_{Is} + A_I \cdot d^2 \rightarrow I_{Iy} = \frac{60 \cdot 12^3}{12} + 60 \cdot 12 \cdot (66 - 41)^2 = 458\,640 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIy} = I_{IIs} + A_{II} \cdot d^2 \rightarrow I_{IIy} = \frac{12 \cdot 48^3}{12} + 12 \cdot 48 \cdot (36 - 41)^2 = 124\,992 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIIy} = I_{IIIs} + A_{III} \cdot d^2 \rightarrow I_{IIIy} = \frac{36 \cdot 12^3}{12} + 36 \cdot 12 \cdot (6 - 41)^2 = 534\,384 \text{ cm}^4$$

$$\therefore I_{IIIy} = 1\,118\,016 \text{ cm}^4$$



# Exemplo

3) Momento de Inércia em relação ao eixo Oz.

$$I_z = I_{Iz} + I_{IIz} + I_{IIIz}$$

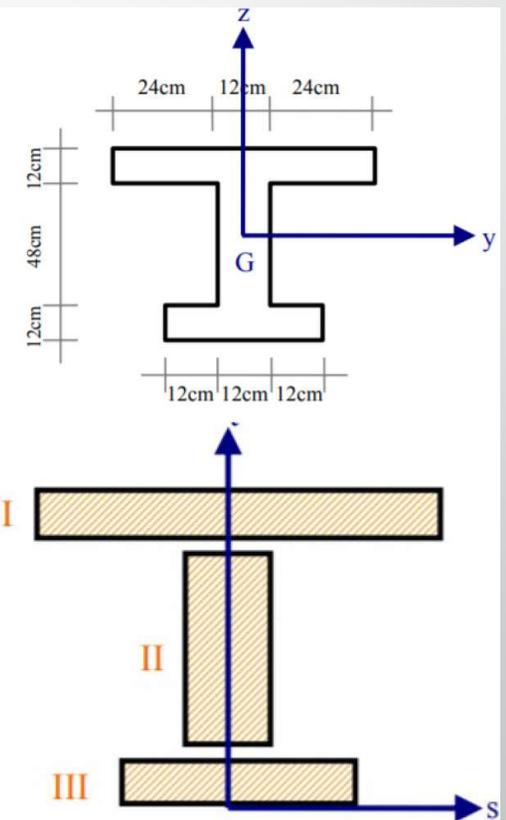
$$I_{Iz} = I_{It} + A_I \cdot d^2 \rightarrow I_{Iz} = \frac{12 \cdot 60^3}{12} = 216\,000 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIz} = I_{It} + A_{II} \cdot d^2 \rightarrow I_{IIz} = \frac{48 \cdot 12^3}{12} = 6\,912 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIIz} = I_{It} + A_{III} \cdot d^2 \rightarrow I_{IIIz} = \frac{12 \cdot 36^3}{12} = 46\,656 \text{ cm}^4$$

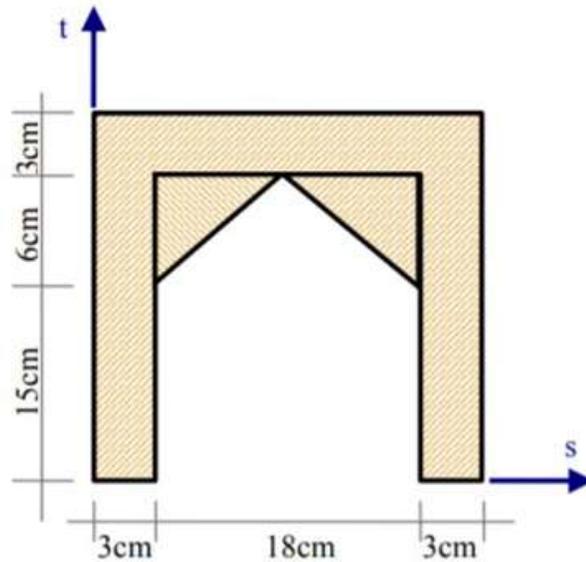
$$\therefore I_{IIz} = 269\,568 \text{ cm}^4$$

4) Conclusão: a peça é mais estável em torno do eixo Oy.



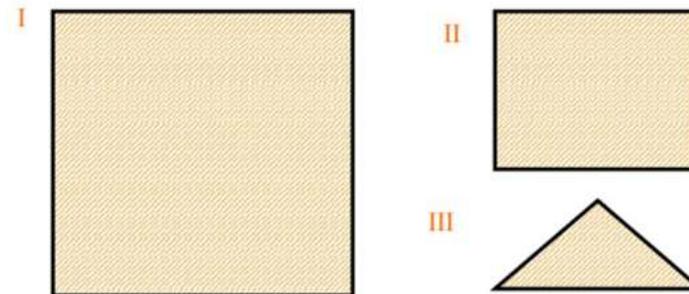
# Exemplo

- (E5) Para a seção transversal da figura abaixo, determine:
- A posição do centro de gravidade (fornecer as coordenadas e indicar os eixos de referência).
  - Os momentos principais (centrais) de inércia.
  - As direções dos eixos principais (centrais) de inércia.



# Exemplo

Decompondo a peça em 3 partes temos:



1) Cálculo da Área.

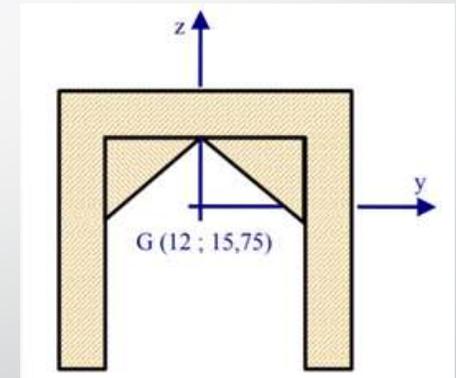
$$A = A_I - A_{II} - A_{III} \rightarrow A = 24 \cdot 24 - 18 \cdot 15 - \frac{18 \cdot 6}{2} \rightarrow A = 252 \text{ cm}^2$$

2) Cálculo do Centro de Gravidade.

$s_{CG} = 12 \text{ cm}$  Pois um eixo perpendicular a Os em 12 cm divide a peça simetricamente.

$$t_{CG} = \frac{A_I \cdot t_{CGI} - A_{II} \cdot t_{CGII} - A_{III} \cdot t_{CGIII}}{A_I - A_{II} - A_{III}}$$

$$t_{CG} = \frac{24 \cdot 24 \cdot 12 - 18 \cdot 15 \cdot 7,5 - \frac{18 \cdot 6}{2} \cdot 17}{252} \rightarrow t_{CG} = 15,75 \text{ cm}$$



# Exemplo

3) Momento de Inércia em relação ao eixo Oy.

$$I_y = I_{Iy} - I_{IIy} - I_{IIIy}$$

$$I_{Iy} = I_{Is} + A_I \cdot d^2 \rightarrow I_{Iy} = \frac{24 \cdot 24^3}{12} + 24 \cdot 24 \cdot (12 - 15,75)^2 = 35\,748 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIy} = I_{IIs} + A_{II} \cdot d^2 \rightarrow I_{IIy} = \frac{18 \cdot 15^3}{12} + 18 \cdot 15 \cdot (7,5 - 15,75)^2 = 23\,439 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIIy} = I_{IIIs} + A_{III} \cdot d^2 \rightarrow I_{IIIy} = \frac{18 \cdot 6^3}{36} + \frac{18 \cdot 6}{2} \cdot (17 - 15,75)^2 = 192 \text{ cm}^4$$

$$\therefore I_{IIIy} = 12\,116 \text{ cm}^4$$

# Exemplo

4) Momento de Inércia em relação ao eixo Oz.

$$I_z = I_{Iz} - I_{IIz} - I_{IIIz}$$

$$I_{Iz} = I_{It} + A_I \cdot 0^2 \rightarrow I_{Iz} = \frac{24 \cdot 24^3}{12} = 27\,648 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIz} = I_{IIt} + A_{II} \cdot 0^2 \rightarrow I_{IIz} = \frac{15 \cdot 18^3}{12} = 7\,290 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIIz} = I_{IIIIt} + A_{III} \cdot d^2 \rightarrow I_{IIIz} = 2 \cdot \left( \frac{6 \cdot 9^3}{36} + \frac{6 \cdot 9}{2} \cdot 3^2 \right) = 729 \text{ cm}^4$$

$$\therefore I_{IIIz} = 19\,629 \text{ cm}^4$$

5) Conclusão: a peça é mais estável em torno do eixo Oz.

# Exercício (Presença)

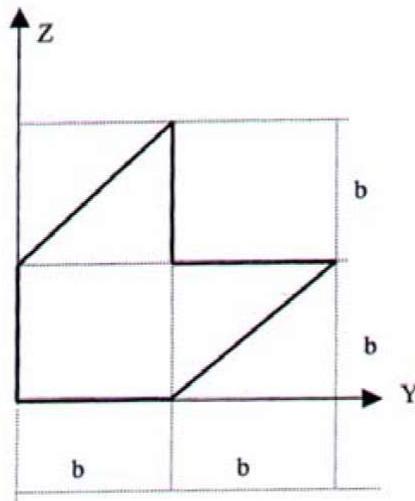
## Questão 2

Considere a figura plana dada (hexágono) e determine:

(a) o centro de gravidade em relação ao eixo Y e Z dados;

(b) os momentos centrais de inércia.

Considere  $b = (\text{algarismo das dezenas do número USP}) + 1$ .





# Agradecimento

Gostaria de agradecer aos professores Martin Paul Schwark e Osvaldo Nakao pelas sugestões e por exercícios extras.