Universidade de São Paulo - Escola Politécnica

Trabalho PEF3208: Fundamentos de Mecânica das Estruturas

Digitalização das aulas de PEF (2019)

Turma 02

Docente: Osvaldo Shigueru Nakao

Integrantes do grupo:

Pedro Henrique Gianjoppe dos Santos

Fábio Henrique Passos Videira

Brenda Santana Sclauser

Guilherme Vinicius de Sousa Soares D'Oswaldo

PEF3208: Fundamentos de Mecânica das Estruturas

Conceitos iniciais

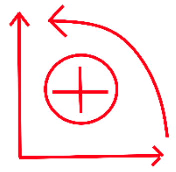
- Estrutura
- Resistência dos materiais
- Engenharia elétrica: Estruturas de transmissão de energia elétrica

Classificação das estruturas quanto à forma:

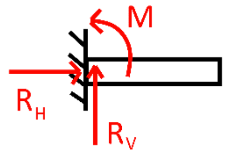
- Barra: l >> e,h
- Folha: e << l,h
- Bloco: e ~ l ~ h
- Sendo e: espessura, l: largura e h: altura

Apoios (plano)

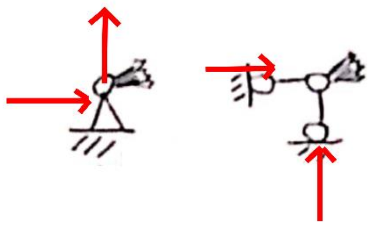
- Convenção de Grinter:



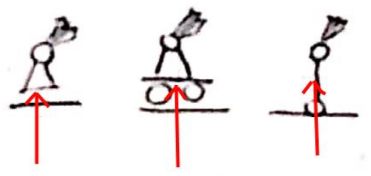
- Engastamento: impede 3 movimentos (translação horizontal, translação vertical e rotação)



- Articulação fixa: impede 2 movimentos (translação horizontal e vertical), porém permite rotação



- Articulação móvel: impede 1 movimento (Translação vertical)

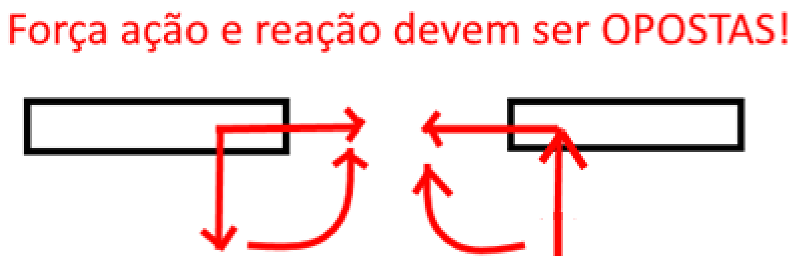


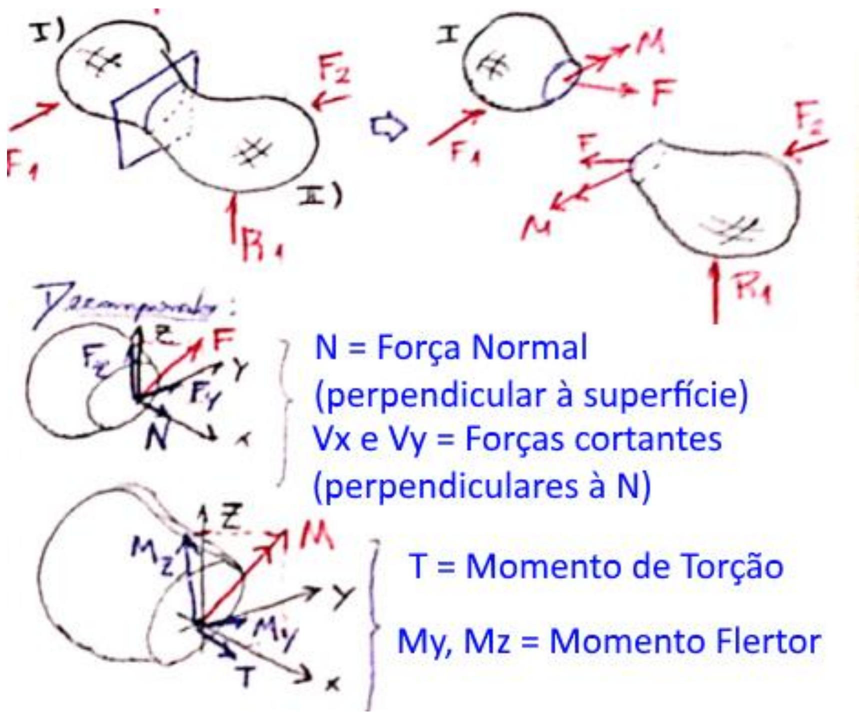
Ações:

- Externas:
  - Peso próprio
  - Carga concentrada ou distribuída
  - Reação
  - Temperatura
- Internas:
  - Esforços solicitantes
  - Esforços resistentes

Esforços solicitantes:

- Convenção de sinais para esforços solicitantes:



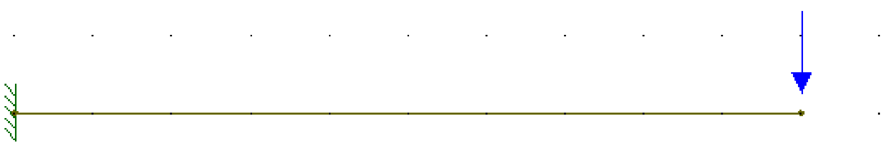


Exercícios:

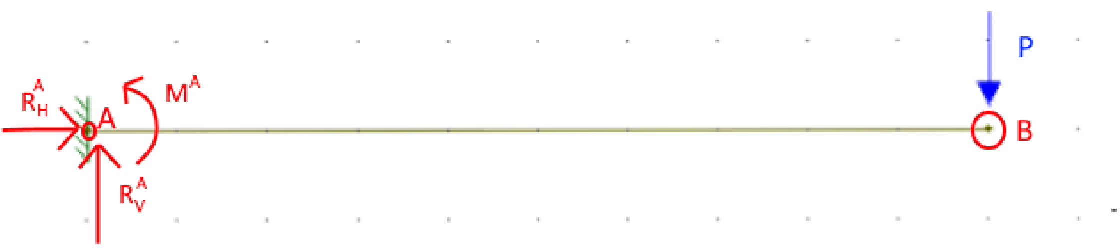
Passo 1) Nomear os pontos de interesse e marcar as reações nos apoios.
Passo 2) Desenhar o sistema mecanicamente equivalente
Passo 3) Impor as condições (equações) de equilíbrio
Passo 4) Desenhar o diagrama do corpo livre
Passo 5) Aplicar o Teorema fundamental de Resmat (Teorema do corte)
Passo 6) Esboçar o Diagrama dos Esforços Solicitantes

LISTA P1a)

Ex1)



Passo 1) Nomear os pontos de interesse e marcar as reações nos apoios.



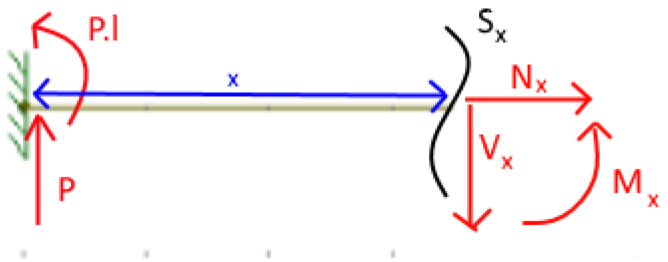
Passo 2) Equações de Equilíbrio

- Eixo x: $\sum F_H = 0 \Leftrightarrow R_H^A = 0$
- Eixo y: $\sum F_V = 0 \Leftrightarrow R_V^A - P = 0$
- Momento em relação ao ponto A (eixo perpendicular ao plano):

$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow M^A - P.l = 0 \Leftrightarrow M^A = P.l$$

Passo 3) Diagrama de forças do corpo livre

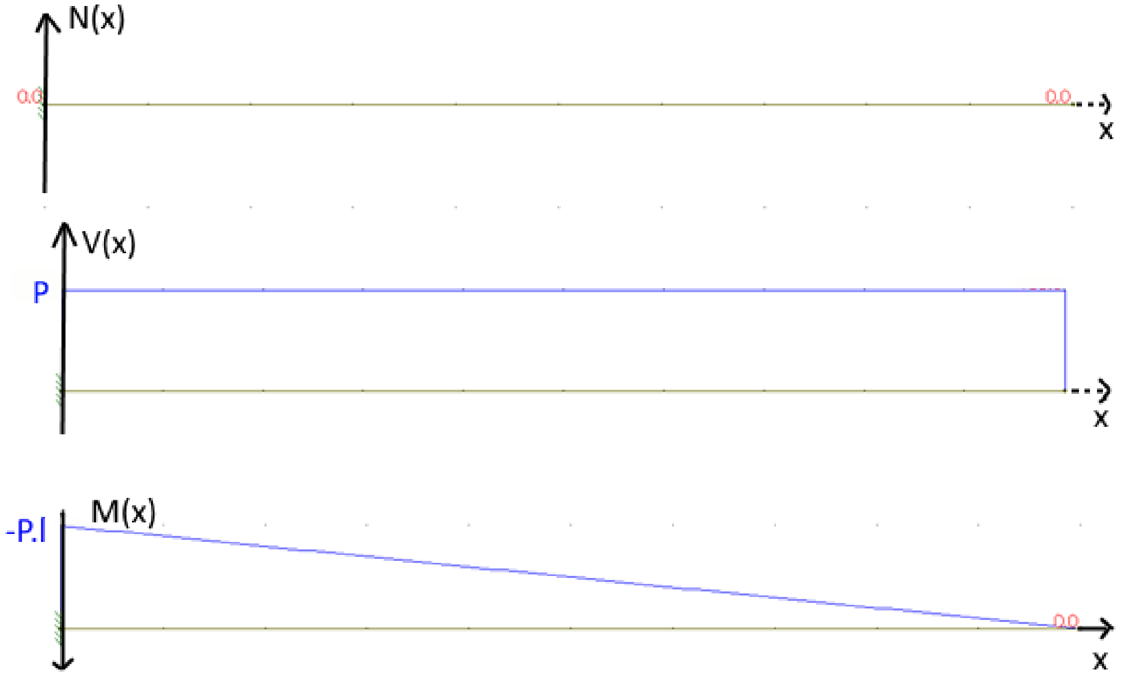
Passo 5) Aplicar o Teorema fundamental da Resmat (teorema do corte)



- Eixo x: $\sum F_H = 0 \Leftrightarrow N_X = 0$
- Eixo y: $\sum F_V = 0 \Leftrightarrow -V_x + P = 0 \Leftrightarrow V_x = P$
- Momento em relação a S: $\sum M_S = 0 \Leftrightarrow +P.l + M_x - P.x = 0 \Leftrightarrow$

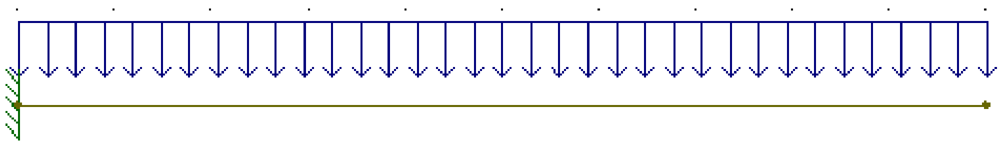
  $M_x = P.x - P.l$ => Equação de reta (M_x é $função\ de\ x, 1^o\ grau$)

Passo 6) Diagrama dos Esforços Solicitantes

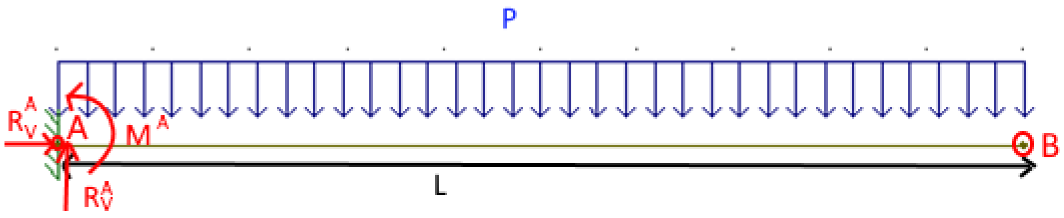


(Obs: O sentido do eixo dos valores de M(x) é para baixo, portanto o valor negativo do momento na figura está na parte de cima)

Ex2)



Passo 1) Nomear os pontos de interesse e marcar as reações nos apoios.



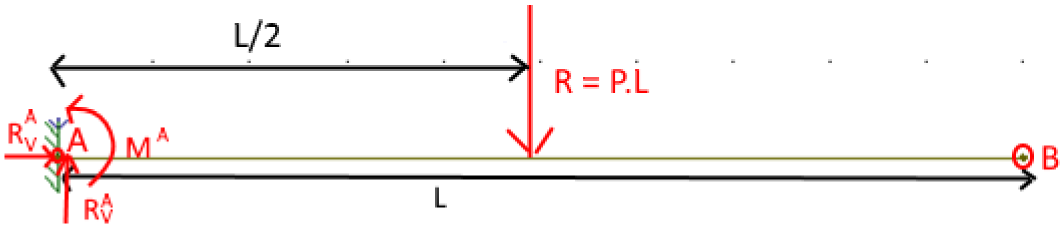
Passo 2) Desenhar o sistema mecanicamente equivalente determinando a força resultante e o ponto de aplicação.

- Força resultante $R = \int_0^L p.dx = p.L$ => Lembre-se que “a integral é a área”
- Local de aplicação de R: momento em relação a A deve ser o mesmo

$$M_A = -\int_0^L p.dx.x = -p\int_0^L x.dx = -p\frac{L^2}{2}$$

$M'_A = -p.L.D$, sendo D a distância de A até o local de aplicação de F

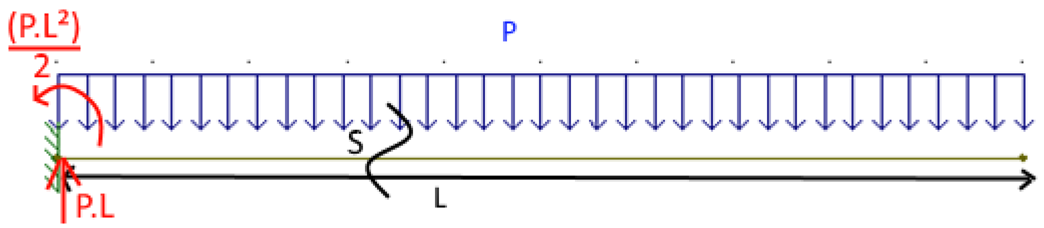
- $M_A = M'_A \Leftrightarrow -p\frac{L^2}{2} = -p.L.D \Leftrightarrow D = \frac{L}{2}$



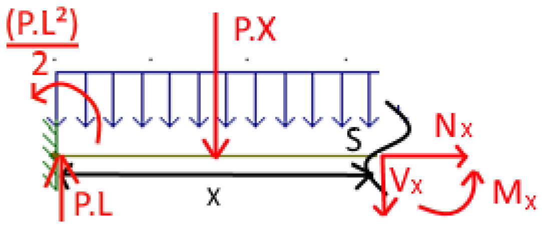
Passo 3) Equações de Equilíbrio

- Eixo x: $\sum F_H = 0 \Leftrightarrow R_H^A = 0$
- Eixo y: $\sum F_V = 0 \Leftrightarrow R_V^A - p.L = 0 \Leftrightarrow R_V^A = p.L$
- Momento em torno do polo A: $\sum M_A = 0 \Leftrightarrow M^A - p.L.\frac{L}{2} = 0 \Leftrightarrow M^A = p.\frac{L^2}{2}$

Passo 4) Diagrama do corpo livre



Passo 5) Aplicar o teorema do corte na seção S

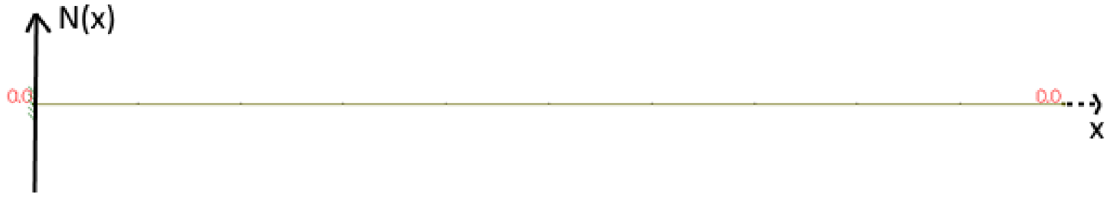


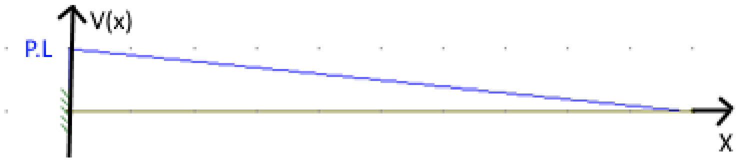
- Eixo x: $\sum F_H = 0 \Leftrightarrow N_X \ = 0$
- Eixo y: $\sum F_V = 0 \Leftrightarrow -V_x \ + pL \ - \ p.x = 0 \Leftrightarrow V_x \ = p(L-x)$
- Momento em relação ao eixo passando por S:

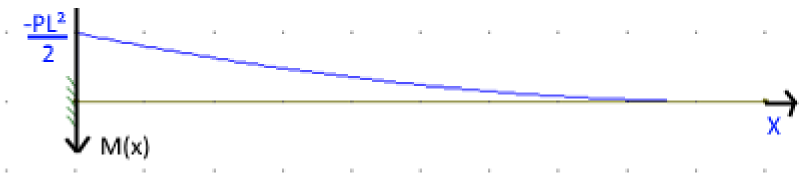
  $\sum M_S = 0 \Leftrightarrow +p.\frac{L^2}{2} + M_x \ - p.L.x + p.\frac{x}{2}.x = 0 \Leftrightarrow$

$M_x \ = -p.\frac{x^2}{2} + p.x\,L. - p.\frac{L^2}{2}$ => Equação de parábola (M_x é $função\ de\ x^2, 2^o\ grau$)

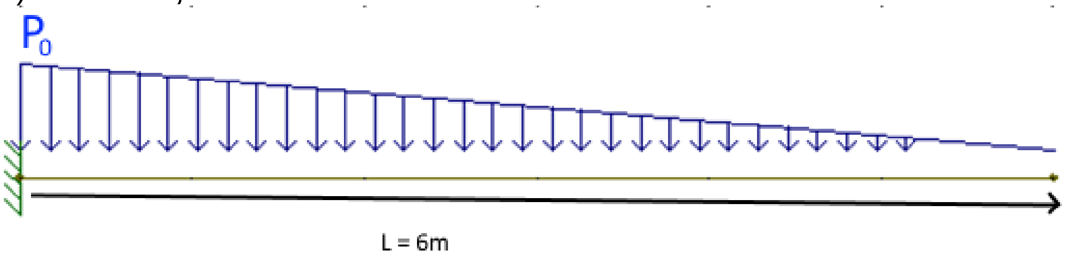
Passo 6) Diagrama dos Esforços Solicitantes



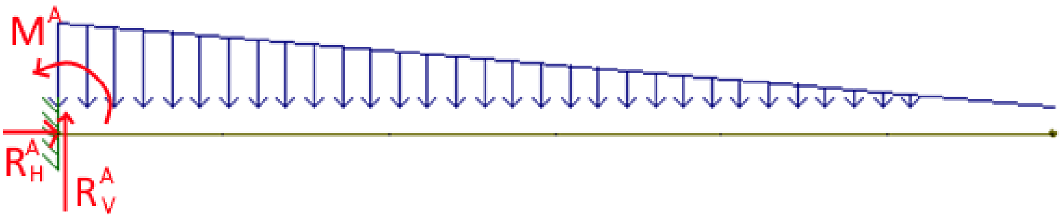




Ex3) Po = 10kN, L=6m

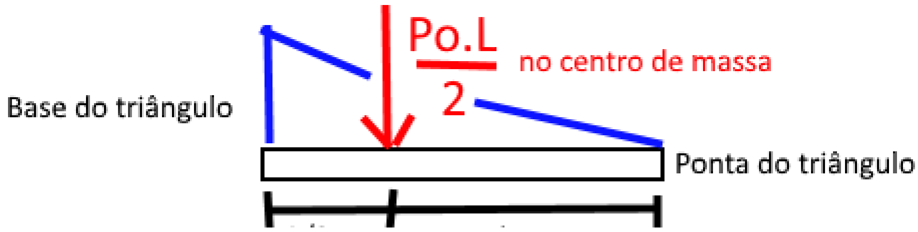


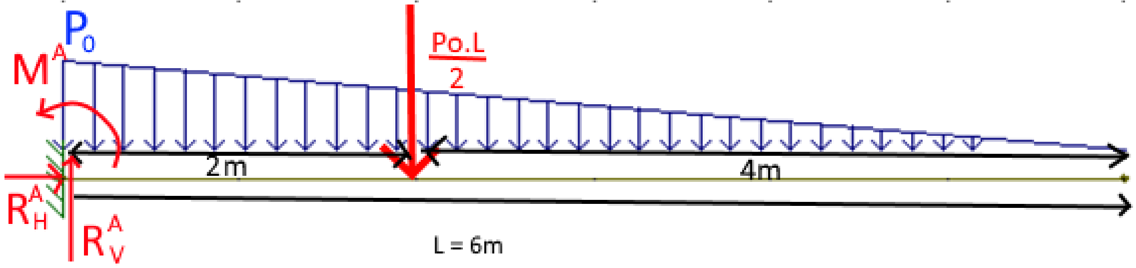
Passo 1) Nomear os pontos de interesse e marcar as reações nos apoios.



Passo 2) Desenhar o sistema mecanicamente equivalente

- Força resultante $R = \int_0^L p.dx$ Lembre-se que a “integral é a área” => R = $\frac{Po.L}{2}$
- Local de aplicação de R: no centro de massa

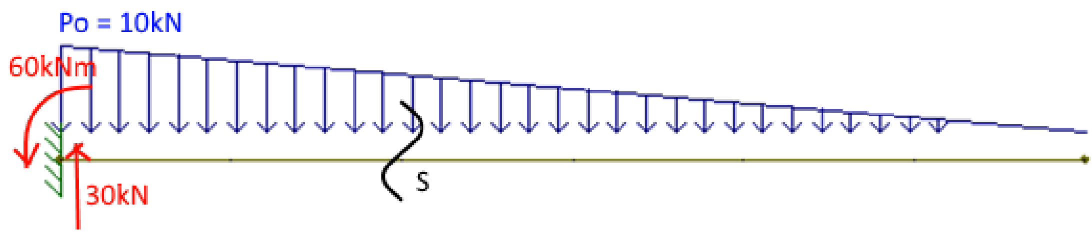




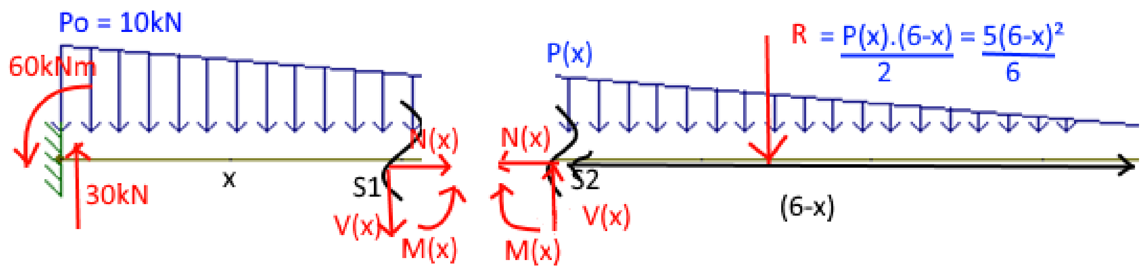
Passo 3) Equações de Equilíbrio

- Eixo x: $\sum F_H = 0 \Leftrightarrow R_H^A = 0$
- Eixo y:$\sum F_V = 0 \Leftrightarrow R_V^A - 30 = 0 \Leftrightarrow R_V^A = 30kN$
- Momento em relação ao ponto A: $\sum M_A = 0 \Leftrightarrow M^A - 30.2 = 0 \Leftrightarrow M^A = 60kNm$

Passo 4) Diagrama do corpo livre



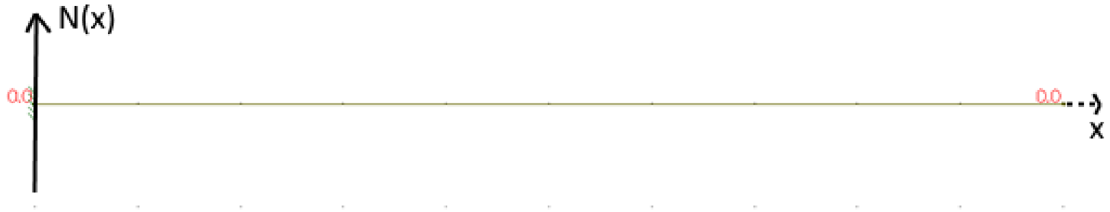
Passo 5) Aplicando o teorema do corte, dividiu-se em dois tramos. A partir do tramo da direita, tem-se



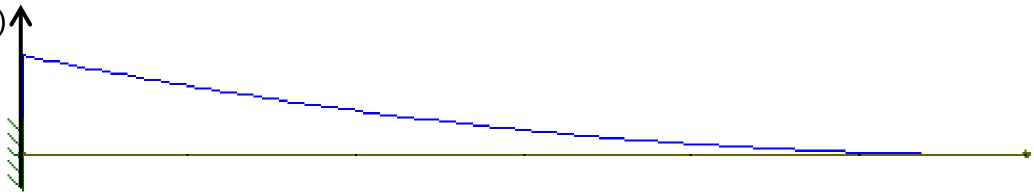
- Por regra de três, temos que: $\frac{P(x)}{6-x} = \frac{10}{6} \Leftrightarrow P(x) = \frac{10}{6}(6-x)$
- Eixo x: $\sum F_H = 0 \Leftrightarrow N_X = 0$
- Eixo y: $\sum F_V = 0 \Leftrightarrow + V_x - R = 0 \Leftrightarrow V_x = \frac{5}{6}(6-x)^2$ => Polinômio do 2º grau (parábola)

- Momento em relação a S2: $\sum M_S = 0 \Leftrightarrow - M_x \ - \frac{5}{6}(6-x)^2 \frac{(6-x)}{3} \ = 0 \Leftrightarrow$
  $M_x \ = \frac{5}{18}(6-x)^3$ => Polinômio do 3º grau

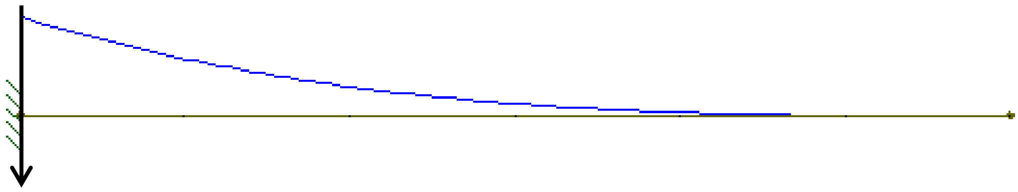
Passo 6) Diagrama dos Esforços Solicitantes



V(x)



M(x)

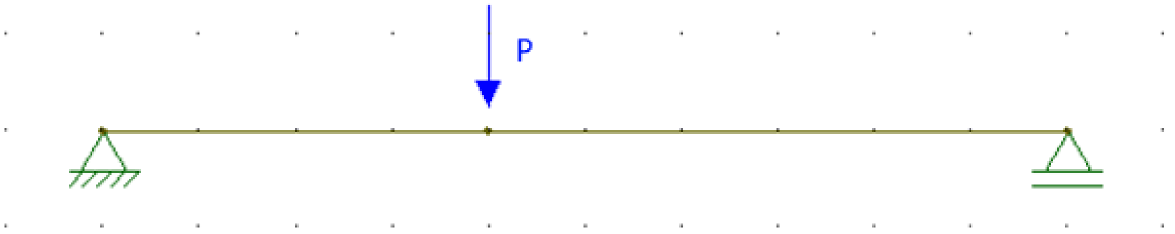


Teoremas e regras

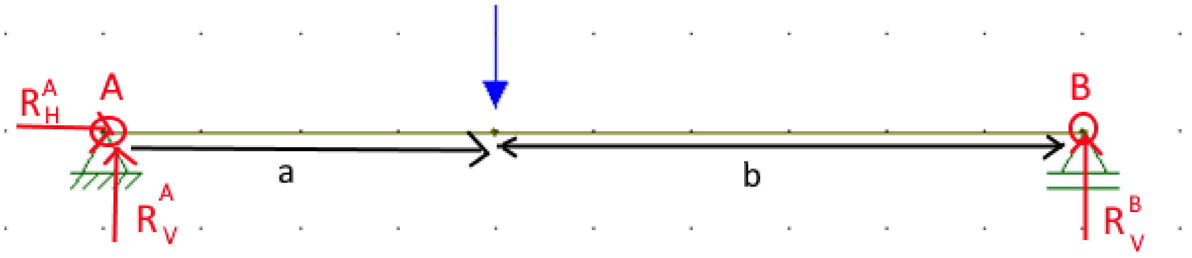
Para uma barra submetida a uma força distribuída por comprimento orientada para baixo com as funções V(x) e M(x) obtidas a partir de um x com o sentido da esquerda para a direita tem-se

1. A derivada da expressão do Momento é a da Força Cortante
$$V(x) = \frac{dM}{dx}$$
2. A derivada da expressão da Força Cortante é a força distribuída com sinal trocado
$$\frac{dV(x)}{dx} = -p$$
3. Em uma barra, quando a força distribuída por comprimento é constante, o diagrama da força cortante é uma reta e o diagrama do momento é uma parábola cuja concavidade é definida pela “regra do barbante”, ou seja, a forma do diagrama do momento acompanha a forma de um barbante submetida àquela força por toda a sua extensão.

Ex4)



Passo 1) Nomear os pontos de interesse e marcar as reações nos apoios.



Passo 2) Equações de Equilíbrio

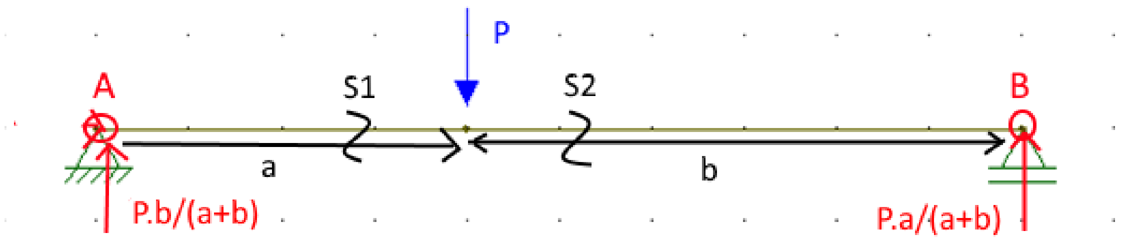
- Eixo x: $\sum F_H = 0 \Leftrightarrow R_H^A = 0$
- Momento em torno do eixo que passa pelo ponto A e é perpendicular ao plano: $\sum M_A = 0 \Leftrightarrow -P.a + R_V^B.(a+b) = 0 \Leftrightarrow$

$$R_V^B = P.a/(a+b)$$

- Momento em relação ao ponto B: $\sum M_B = 0 \Leftrightarrow R_V^A.(a+b) + P.b = 0 \Leftrightarrow$

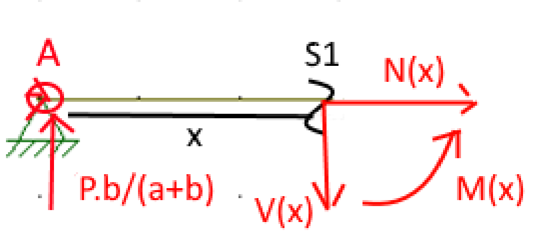
$$R_V^A = P.b/(a+b)$$

Passo 3) Diagrama do corpo livre



Passo 4) Aplicar o teorema do corte no tramo antes da seção onde está aplicada força P e depois dessa seção porque a parcela de P que caminha pelos tramos para cada um dos apoios é diferente. As parcelas de P que caminham para os apoios A e B serão as mesmas se P estiver aplicada no meio do vão.

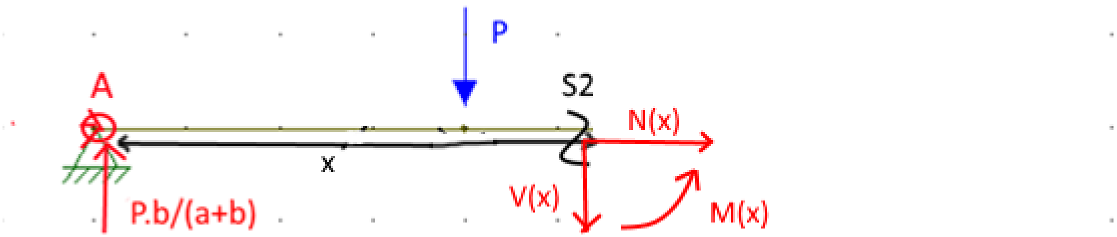
Seção S1: 0 < x < a



- Eixo x: $\sum F_H = 0 \Leftrightarrow N_X \ = 0$
- Eixo y: $\sum F_V = 0 \Leftrightarrow -V_x \ + P.b/(a+b) = 0 \Leftrightarrow V_x \ = P.b/(a+b)$
- Momento em relação a S1: $\sum M_S = 0 \Leftrightarrow -P.\frac{b}{a+b}x + M_x \ = 0 \Leftrightarrow$

  $M_x \ = P.\frac{b}{a+b}x$ => Equação de reta com coef. angular > 0 (reta crescente com o eixo dos M_x orientado para baixo)

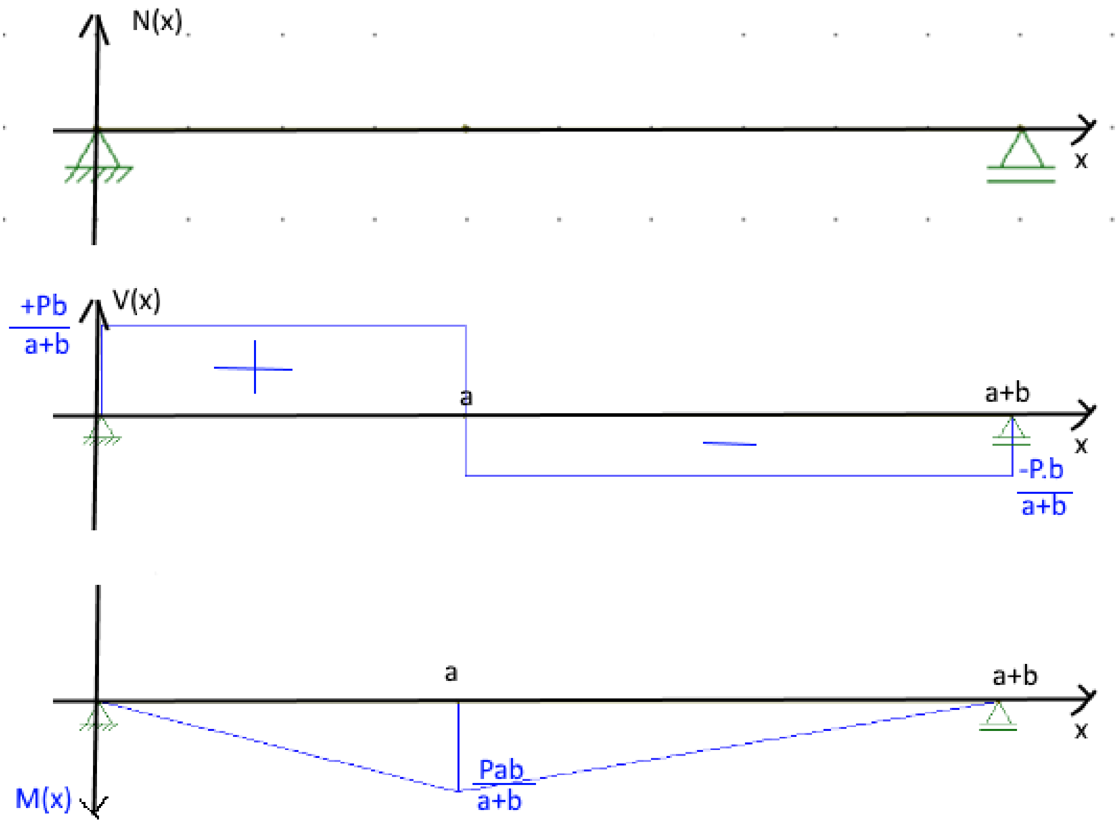
Seção S2: 0 < x < a+b



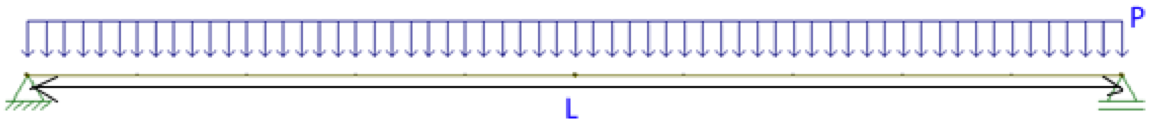
- Eixo x: $\sum F_H = 0 \Leftrightarrow N_X \ = 0$
- Eixo y: $\sum F_V = 0 \Leftrightarrow -V_x \ + P.\frac{b}{a+b} - P = 0 \Leftrightarrow V_x \ = -P.a/(a+b)$
- Momento em relação a S1: $\sum M_S = 0 \Leftrightarrow -P.\frac{b}{a+b}x + M_x \ + \ P(x-a) = 0 \Leftrightarrow$

  $M_x \ = -P.\frac{a}{a+b}x + P.a$ => Equação de reta com coef. angular < 0 (reta decrescente, mas com o sentido do eixo dos M(x) orientado para baixo)

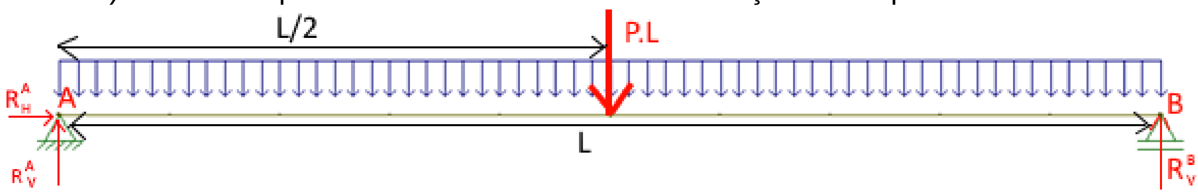
Passo 5) Diagrama dos Esforços Solicitantes



Ex5)



Passo 1) Nomear os pontos de interesse e marcar as reações nos apoios.



Passo 3) Equações de Equilíbrio

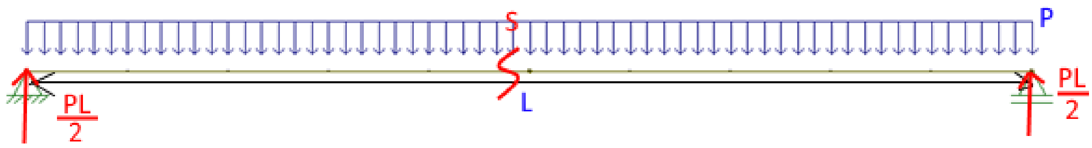
- Eixo x: $\sum F_H = 0 \Leftrightarrow R_H^A = 0$
- Momento em relação ao ponto A: $\sum M_A = 0 \Leftrightarrow -P.L.(\frac{L}{2}) + R_V^B.L = 0 \Leftrightarrow$

$$R_V^B = +P.\frac{L}{2}$$

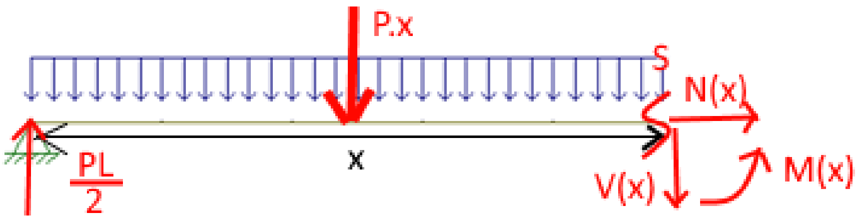
- Momento em relação ao ponto B: $\sum M_B = 0 \Leftrightarrow -R_V^A.L + P.L.(\frac{L}{2}) = 0 \Leftrightarrow$

$$R_V^A = +P.\frac{L}{2}$$

Passo 4) Diagrama de forças do corpo livre



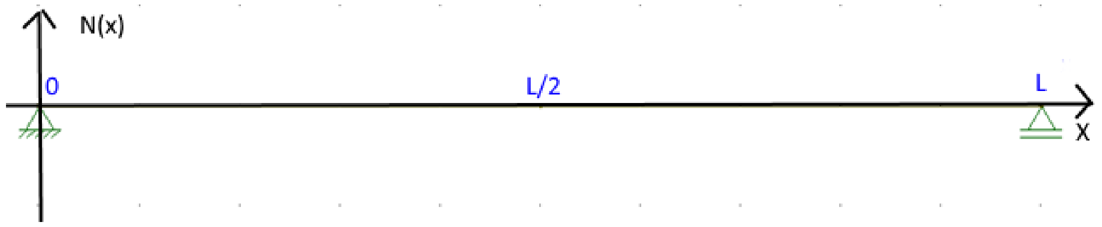
Passo 5) Aplicar o teorema do corte. Basta aplicar em uma única seção. Corta-se em mais seções se houver forças concentradas ou se houver mudança na direção da barra.

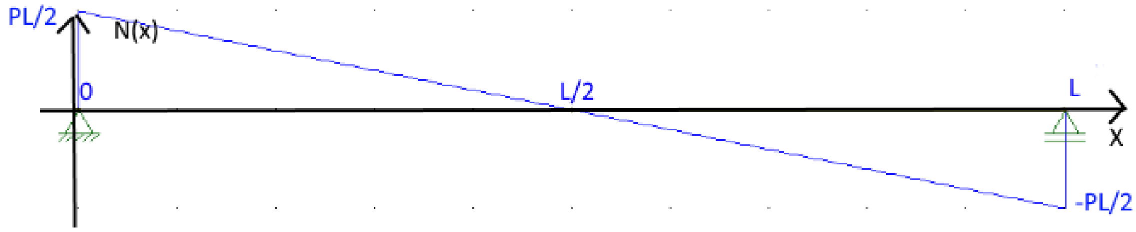


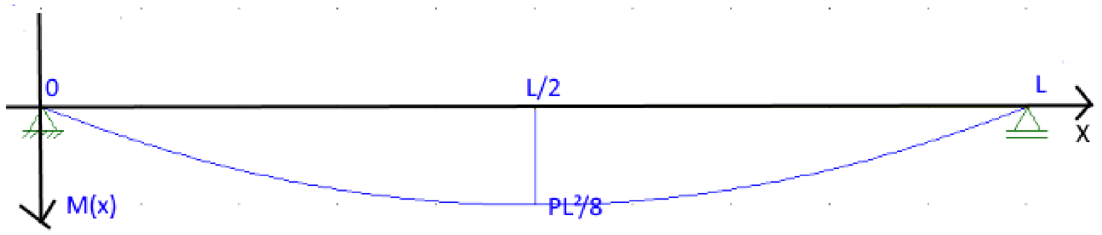
- Eixo x: $\sum F_H = 0 \Leftrightarrow N_x = 0$
- Eixo y: $\sum F_V = 0 \Leftrightarrow -V_x - Px + \frac{PL}{2} = 0 \Leftrightarrow V_x = -Px + \frac{PL}{2}$
- Momento em relação a S1: $\sum M_S = 0 \Leftrightarrow +Px.\frac{x}{2} - \frac{PL}{2}x + M_x = 0 \Leftrightarrow$

$M_x = -P.\frac{x^2}{2} + \frac{PL}{2}x$ => Equação de parábola com concavidade para baixo

Passo 6) Diagrama dos Esforços Solicitantes

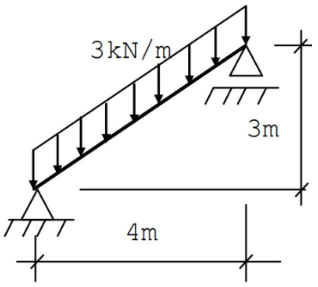




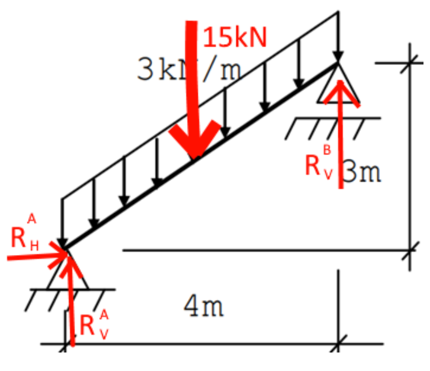


LISTA P1b)

Ex1)



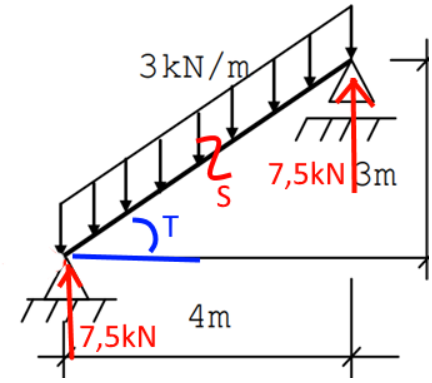
Passo 1) Nomear os pontos de interesse e marcar as reações nos apoios.



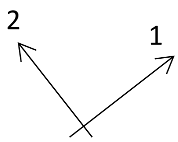
Passo 2) Equações de Equilíbrio

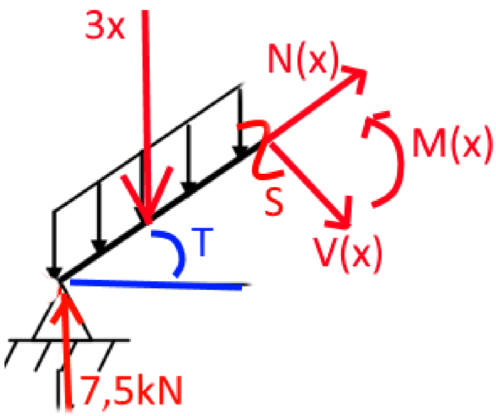
- Eixo x: $\sum F_H = 0 \Leftrightarrow R_H^A = 0$
- Momento em relação ao eixo que passa pelo ponto A:
$$\sum M_A = 0 \Leftrightarrow -15 * 2 + R_V^B.4 = 0 \Leftrightarrow R_V^B = +7{,}5kN$$
- Momento em relação ao eixo que passa pelo ponto B:
$$\sum M_B = 0 \Leftrightarrow -R_V^A.4 + 15 * \ 2 = 0 \Leftrightarrow R_V^A = +7{,}5kN$$

Passo 3) Diagrama do corpo livre



Passo 4) Aplicar o Teorema do corte

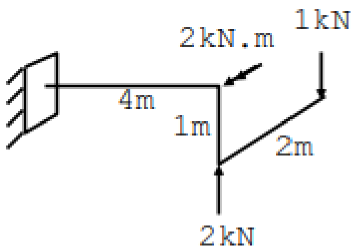




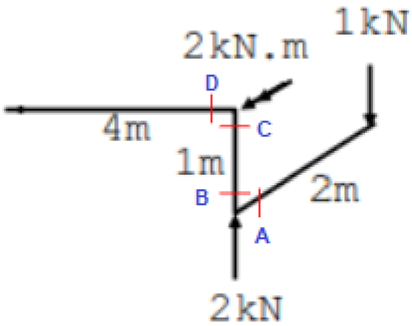
Passo 5) Diagrama dos Esforços Solicitantes (cosT=0,8 e senT=0,6)

- Eixo 1: $\sum F_1 = 0 \Leftrightarrow N_X \ + 7{,}5senT - 3xsenT = 0 <=> \ N_X \ = 1{,}8x - 4{,}5$
- Eixo 2: $\sum F_2 = 0 \Leftrightarrow -V_x \ + 7{,}5cosT - 3xcosT = 0 \Leftrightarrow V_x \ = -2{,}4x + 6$
- Momento em relação a S1: $\sum M_S = 0 \Leftrightarrow 7{,}5.x.cosT + 3.x.cosT.\frac{x}{2} + M_x \ = 0 \Leftrightarrow$
$M_x \ = -1{,}2x^2 + 6x$ => Equação de parábola com concavidade para baixo

Ex9)



Passo 1) Cortar a estrutura em secções no início e no fim de cada segmento da barra.

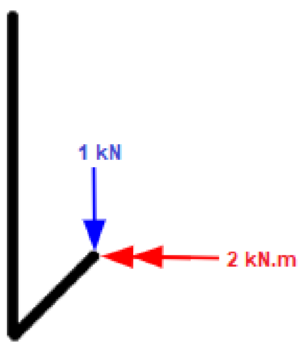


Passo 2) Analisar cada corte.

CORTE A:

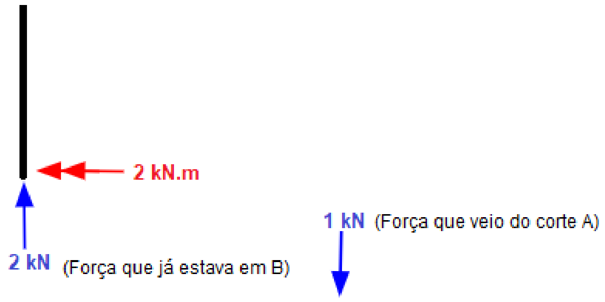
Aplicando o teorema do corte e eliminando o tramo da extremidade livre, para que o sistema se mantenha em equilíbrio e seja mecanicamente equivalente, a força aplicada na extremidade livre (na figura, à direita) da barra é transferida para a secção A, junto com o momento que é acrescentado devido a esse deslocamento da força.

Força x Deslocamento = 1kN x 2m = 2 kN.m.



CORTE B:

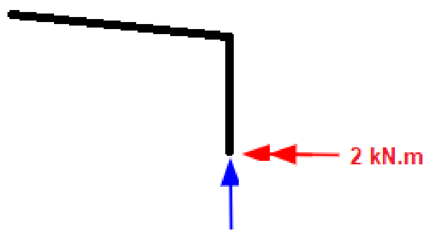
A força de 1 kN e o momento de 2 kN.m aplicados em A são transferidos para B sem nenhum acréscimo pois as distâncias são infinitésimas. Em B ainda tem uma força de 2kN aplicada no sentido positivo da vertical.



que equivale a:

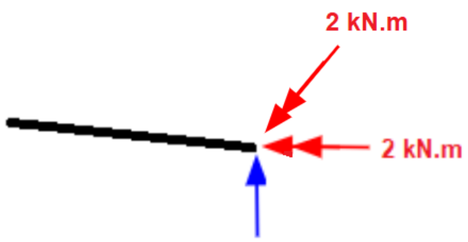
CORTE C:

Como o deslocamento da força de 1 kN para C é na vertical, não é criado nenhum momento, e o momento de B também é transferido para C. Lembre-se que forças normais e momentos se transferem sem nenhum acréscimo.



CORTE D:

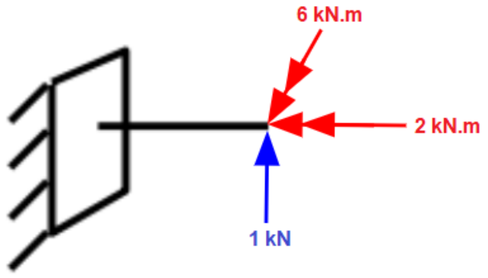
Na seção D há a força de 1 kN e o momento de 2 kN.m que estava em C, além do momento de 2 kN.m que estava aplicado entre C e D.



1 kN

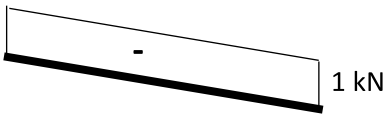
ENGASTAMENTO:

Na seção D há os momentos de 2 kN.m que se transferem de C sem nenhum acréscimo. A força de 1 kN quando transferido de C para D dá origem a um momento de 1kN.4m = 4 kN.m. Portanto, há um momento de torção de 2 kN.m, um momento fletor de 6kN.m e uma força cortante de 1 kN em D.

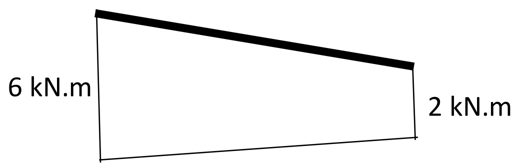


Os diagramas dos esforços solicitantes no trecho horizontal são

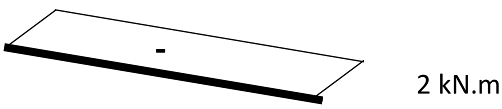
CORTANTE: (negativo, pois tende a girar o tramo no sentido anti-horário)



MOMENTO FLETOR: (sem sinal, tracionando as fibras de baixo)



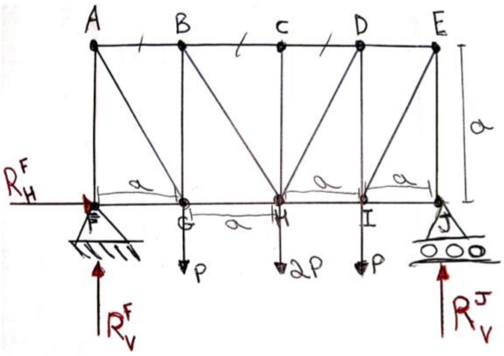
MOMENTO TORÇOR: (negativo porque “entra” na seção)



Treliças

Lista P2a)

Ex2)



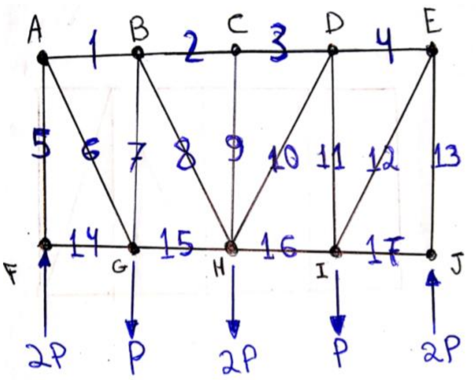
1) Reações nos apoios

$$\sum F_H = 0 = R_H^F$$

$$\sum M_F = -Pa - 2P2a - P3a + R_v^J 4a \quad \Leftrightarrow \quad R_v^J = 2P$$

$$\sum M_J = 0 = -R_v^F 4a + P3a + 2P2a + Pa \Leftrightarrow R_v^F = 2P$$

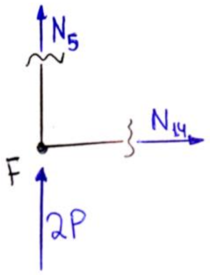
2) Diagrama do corpo livre



Compressão < 0

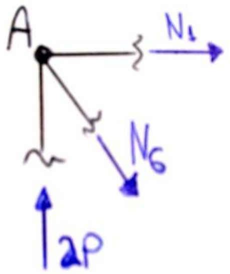
Tração > 0

3) Nó F



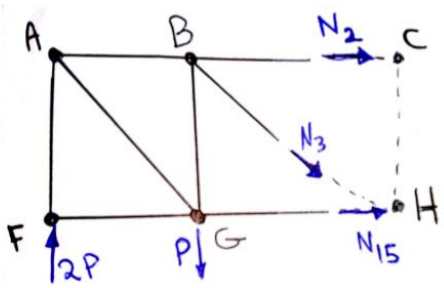
$$\sum F_v = 0 = 2P + N_5 \Leftrightarrow N_5 = -2P \ (compressão)$$
$$\sum F_H = 0 = N_{14}$$

4) Nó A



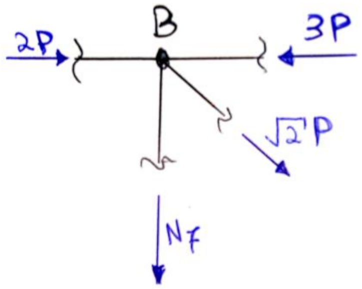
$$\sum F_v = 0 = 2P - N_6 \cos 45° \Rightarrow \ N_6 = 2\sqrt{2}P$$
$$\sum F_H = 0 = N_1 + N_6 \sin 45° \Rightarrow \ N_1 = -2P$$

5) <u>Ritter →</u> cortar até 3 barras



$$\sum F_v = 0 = 2P - P - N_8 \cos 45° \Leftrightarrow \ N_8 = \sqrt{2}P$$
$$\sum M_B = 0 = -2Pa + N_{15}a \Leftrightarrow \ N_{15} = 2P$$
$$\sum M_H = o = -2P2a + Pa - N_2 a \Leftrightarrow \ N_2 = -3P$$

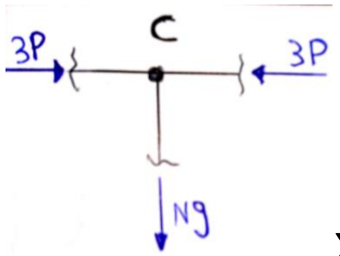
6) Nó B



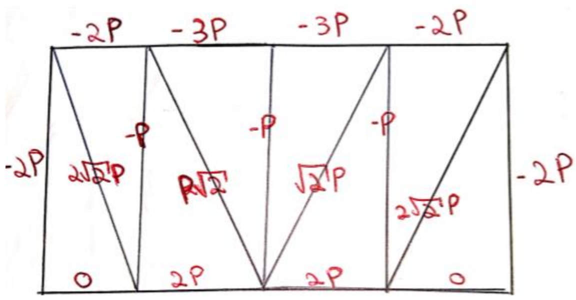
$$\sum F_v = 0 = -N_7 - \sqrt{2}P\cos 45° \Leftrightarrow \; N_7 = -P$$

$$\sum F_H = 2P - 3P + \sqrt{2}P\sin 45° = 0$$

7) Nó C

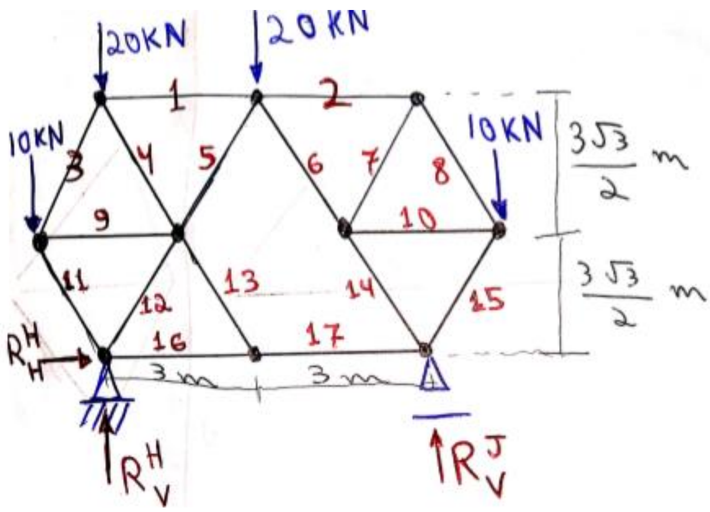


$$\sum F_v = 0 = N_9$$



$$tração > 0$$
$$compressão < 0$$

Ex4)



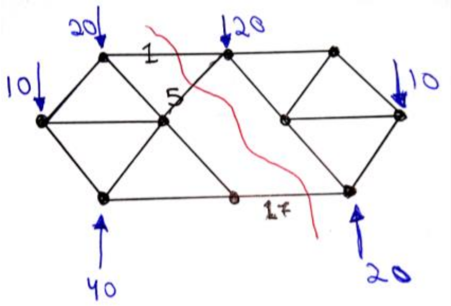
1) Reações nos apoios

$$\sum F_H = 0 = R_H^H$$

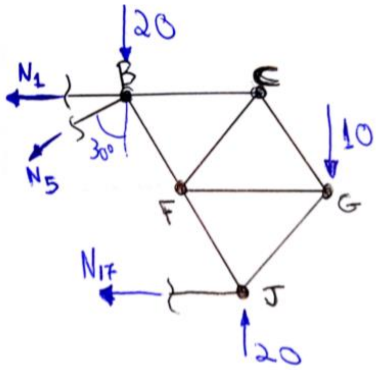
$$\sum M_H = 0 = 10.1{,}5 - 20.3 + R_v^J 6 - 10.7{,}5$$
$$R_v^J = 20kN$$

$$\sum M_J = 0 = 10.7{,}5 + 20.6 - R_v^H 6 + 20.3 - 10.1{,}5$$
$$R_v^H = 40kN$$

2) Diagrama do corpo livre



3) <u>Ritter</u>

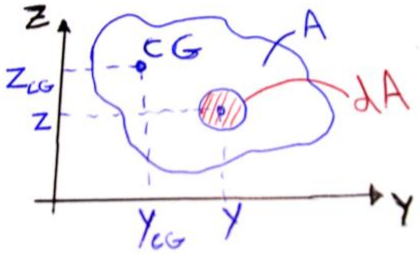


$$\sum F_v = 0 = -20 - N_5 \cos 30° - 10 + 20$$
$$N_5 = \frac{-20\sqrt{3}}{3} kN$$

$$\sum M_B = 0 = -10.4{,}6 + 20.3 - N_{17} 2\frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$N_{17} = \frac{5\sqrt{3}}{3} kN$$

$$\sum M_H = 0 = N_1 2\frac{3\sqrt{3}}{3} - 20.3 + 20.6 - 10.7{,}5 \Leftrightarrow N_1 = \frac{5\sqrt{3}}{3} kN$$

Momento estático em torno de eixo

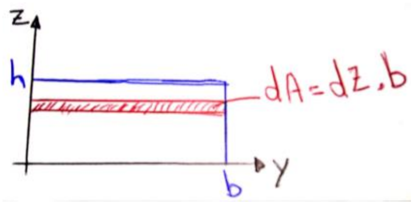


$$S_Y = \int_A ZdA = Z_{CG}A$$

$$S_Z = \int_A YdA = Y_{CG}A$$

*CG = Centro de Gravidade (/massa)

Ex1:



$$S_Y = \int_A ZdA \Leftrightarrow S_Y = \int_A Zbdz \Leftrightarrow S_Y = b\left(\frac{Z^2}{2}\right)|_0^h = \frac{bh^2}{2}$$

Analogamente:

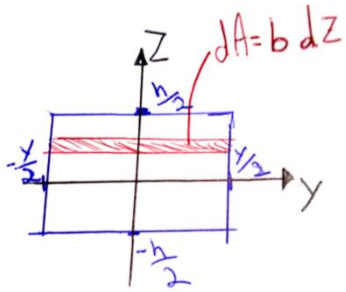
$$S_Z = \frac{b^2h}{2}$$

Assim:

$$S_Y = Z_{CG}A \Leftrightarrow Z_{CG} = \frac{S_Y}{A} = \frac{\frac{bh^2}{2}}{bh} = \frac{h}{2}$$

$$S_Z = Y_{CG}A \Leftrightarrow Y_{CG} = \frac{S_Z}{A} = \frac{\frac{b^2h}{2}}{bh} = \frac{b}{2}$$

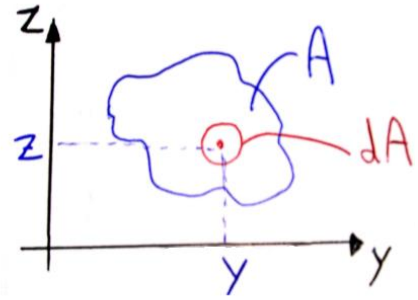
Ex2:



$$S_y = \int_A ZdA = \int_A ZbdZ = b\left(\frac{Z^2}{2}\right)\Big|_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b\left(\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(-\frac{h}{2}\right)^2}{2}\right) \Leftrightarrow S_y = 0$$

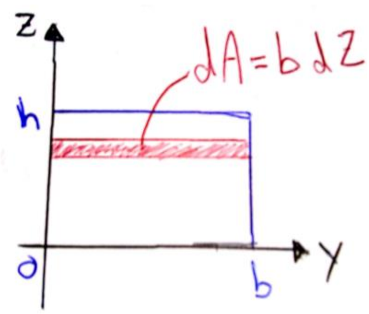
$$S_y = Z_{CB}A \Leftrightarrow Z_{CG} = 0$$

Momento de inércia em torno de um eixo



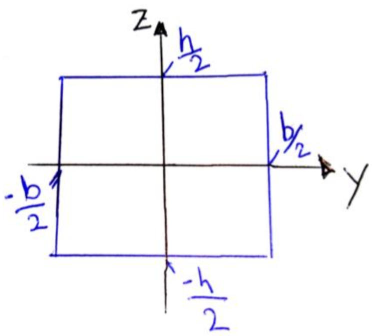
$$I_Y = \int Z^2 dA \qquad\qquad I_Z = \int Y^2 dA$$

Ex3:



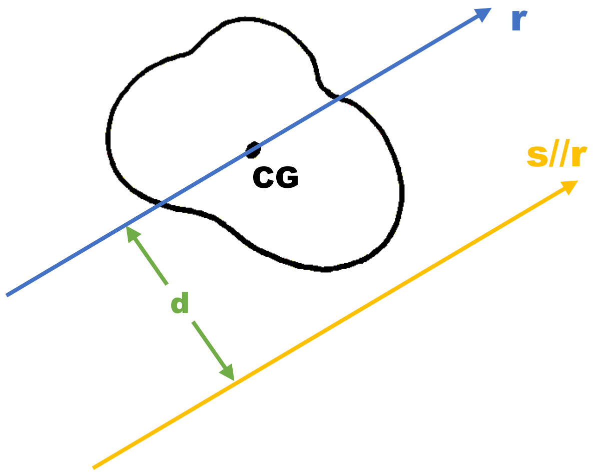
$$I_Y = \int_A Z^2 dA = \int_Z Z^2 bdZ \Leftrightarrow I_Y = b\int_0^h Z^2 dZ = b\left(\frac{Z^3}{3}\right)\Big|_0^h \Leftrightarrow I_Y = \frac{bh^3}{3}$$

Ex4:



$$I_Y = \int_A Z^2 dA \Leftrightarrow I_Y = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z^2 h dZ \Leftrightarrow I_Y = b\left(\frac{z^3}{3}\right)\Big|_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

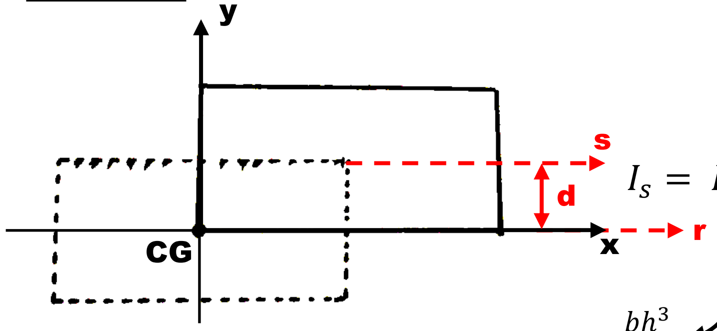
▪ Teorema de Steiner



$$\boxed{I_s = I_r + d^2 \times A}$$

Teorema dos eixos paralelos

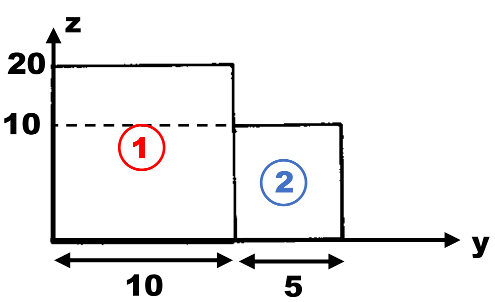
Exs 3 e 4)



$$I_s = I_r + d^2 \times A = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4} bh = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_r = \frac{bh^3}{12} \qquad d = \frac{h}{2} \qquad A = b \times h$$

Exs 5) Determinar o CG



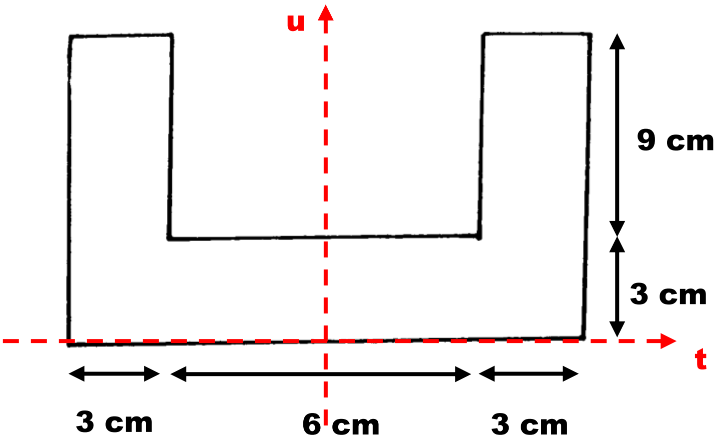
$$Z_{CG} = \frac{S_y}{A} = \frac{\overbrace{\overbrace{10 \times 20}^{A_1} \times \overset{Z_{CG_1}}{10}}^{S_{y_1}} + \overbrace{\overbrace{5 \times 10}^{A_2} \times \overset{Y_{CG_2}}{5}}^{S_{y_2}}}{10 \times 20 + 5 \times 10} = 9$$

$$Y_{CG} = \frac{S_z}{A} = \frac{\overbrace{20 \times 10}^{A_1} \times \overset{Y_{CG_1}}{5} + \overbrace{10 \times 5}^{A_2} \times \overset{Y_{CG_2}}{12{,}5}}{20 \times 10 + 10 \times 5} = 6{,}5$$

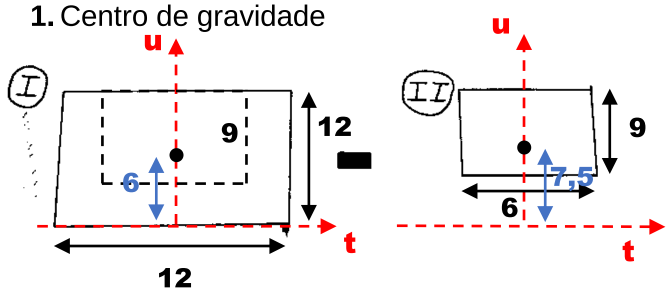
Exercícios

4) Lista P2a

Calcular os momentos de inercia $\mathbf{I_y}$, $\mathbf{I_z}$.



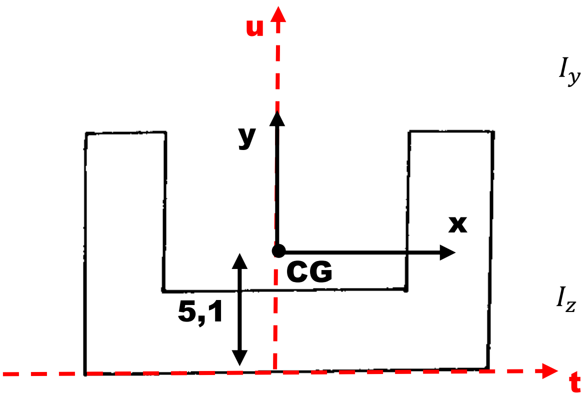
1. Centro de gravidade



$$t_{CG_I} = t_{CG_{II}} = 0 \qquad u_{CG_I} = 6 \qquad u_{CG_{II}} = 7{,}5$$

$$\begin{cases} t_{CG} = \dfrac{S_u}{A} = \dfrac{\cancelto{0}{t_{CG_I}} \times A_I + \cancelto{0}{t_{CG_{II}}} \times A_{II}}{A_I + A_{II}} = 0 \\ u_{CG} = \dfrac{S_t}{A} = \dfrac{12 \times 12 \times 6 + 6 \times 9 \times 7{,}5}{12 \times 12 + 6 \times 9} = 5{,}1\ cm \end{cases}$$

2. Momentos centrais

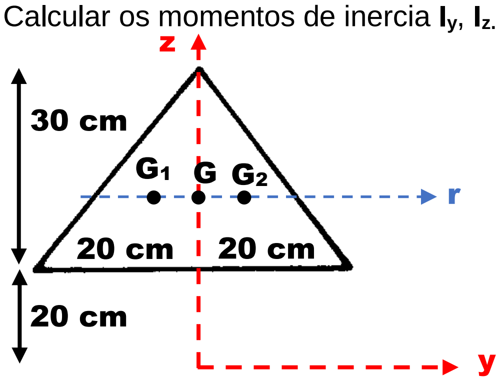


$$I_y = I_y^I - I_y^{II} = \left(\frac{12 \times 12^3}{12} + 12 \times 12 \times (6 - 5{,}1)^2\right) - \left(\frac{6 \times 9^3}{12} + 6 \times 9 \times (7.5 - 5.1)^2\right) = 1169\ cm^4$$

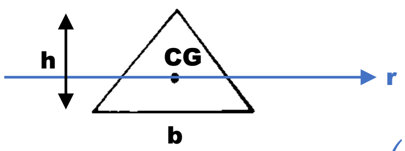
$$I_z = I_z^I - I_z^{II} = \left(\frac{12 \times 12^3}{12}\right) - \left(\frac{6 \times 9^3}{12}\right) = 1566\ cm^4$$

1) Lista P2a

Calcular os momentos de inercia $\mathbf{I_y}$, $\mathbf{I_z}$.



Formulário:



$$I_r = \left(\frac{b \times h^3}{36}\right)$$

$$I_y = \left(\frac{40 \times 30^3}{36}\right) + \left(\frac{40 \times 30}{2} \times 30^2\right) = 570.000\ cm^4$$

$$I_z = 2 \times \left(\frac{30 \times 20^3}{36}\right) + \left(\frac{30 \times 20}{2} \times \left(\frac{20}{3}\right)^2\right) = 93333\ cm^4$$

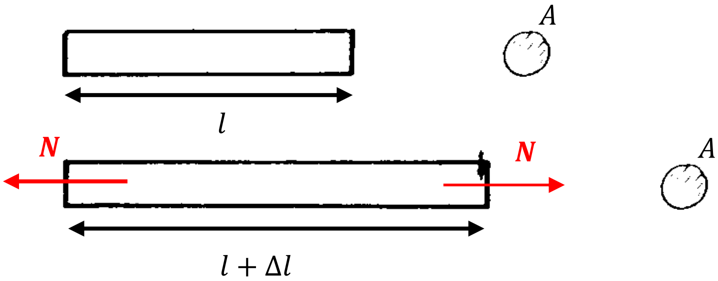
$\downarrow$

Divide em 2
(Precisamos pegar um eixo paralelo a z e transferir o momento de inércia)

▪ Tensões e Deformações

1) Deformação Longitudinal

Tensão $\boxed{\boldsymbol{\sigma = \frac{N}{A}}}$



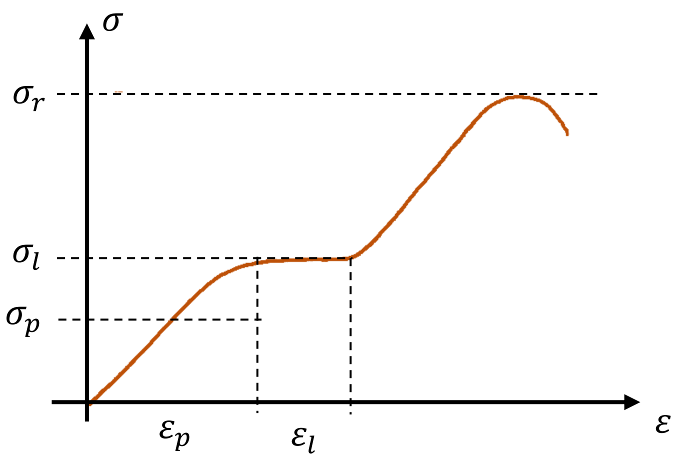
Tração: N>0

Compressão: N<0

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \textit{ (deformação linear)}$$

2) Relação entre tensões (σ) e deformações (ε)

a) Barra de aço em uma máquina de ensaio (materiais dúcteis)

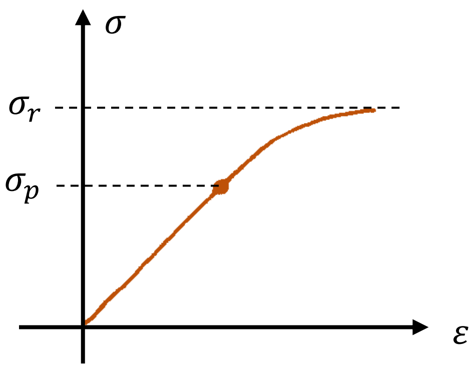


$\sigma_r: Ruptura$

$\sigma_l: Escoamento$

$\sigma_p: Tensão\ limite$
$de\ proporcionalidade$

b) Materiais frágeis



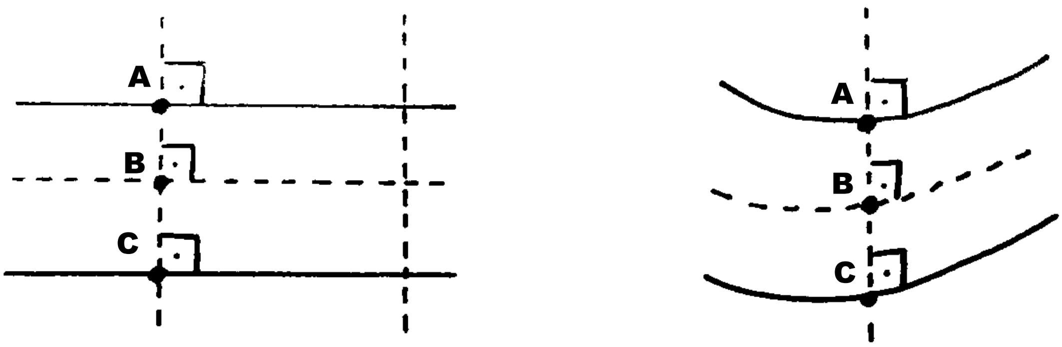
3) Lei de Hooke

$$\boxed{\sigma = E \times \varepsilon}$$

E = módulo de elasticidade (ou de Young)

E$_{aço}$ = 210.000 MPa
E$_{concreto}$ = 21.000MPa

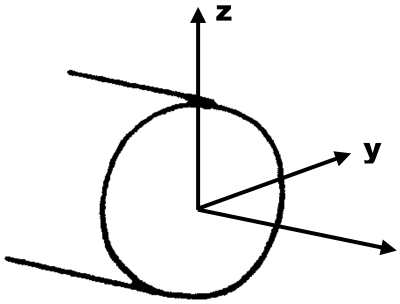
4) Hipótese de Novier

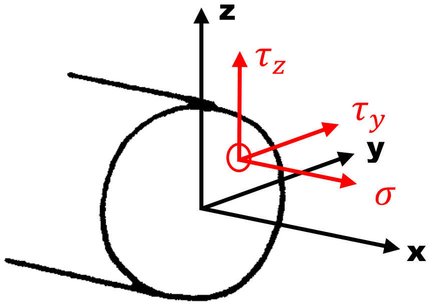


a) Secções transversais permanecem planas

b) Secções transversais permanecem perpendiculares ao eixo deformado

5) Relação entre esforços solicitantes e tensões





$$N = \int_A \sigma\, dA\,;\, V_y = \int_A \tau_y\, dA\,;\, Vz = \int_A \tau_z\, dA\,;$$

$$M_y = \int_A (\overbrace{\sigma\, dA}^{N})z\,;\; M_z = -\int_A (\overbrace{\sigma\, dA}^{N})y\,;$$

$$\mathrm{T} = \int_A (-\tau_y\, dA)z + \int_A (\tau_z\, dA)y$$

Torção

6) Conceito de segurança

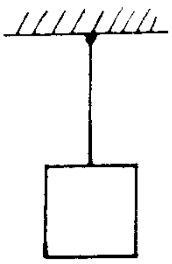
Medida do afastamento da situação de ruptura em relação às condições de utilização

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_r \;\; ou \;\; \sigma_l}{\gamma}$$

coeficiente de segurança

EXEMPLOS:

1) Dimensionar um fio de aço para suportar 80kN com um coeficiente de segurança $\gamma = 2$ e tensão de escoamento $\sigma_l = 25\ kN/cm^2$.

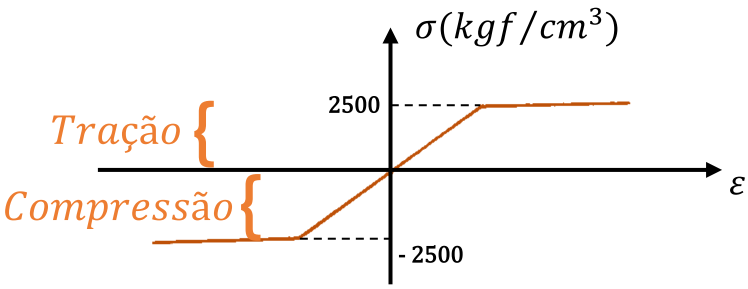


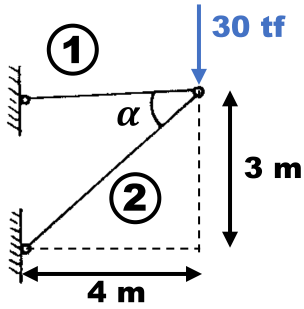
80 kN

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_l}{\gamma} = \frac{25}{2} = 12{,}5\, {}^{kN}\!/_{cm^2}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{N}{A} <=> A = \frac{N}{\bar{\sigma}} = \frac{80\ kN}{12{,}5\ {}^{kN}\!/_{cm^2}} = 6{,}4\ cm^2$$

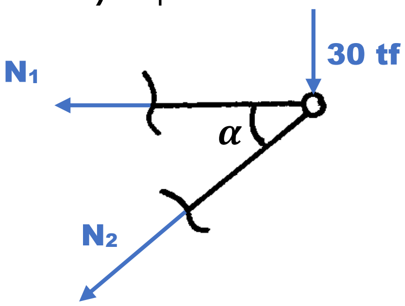
2) Dimensionar as barras de treliça metálicas cujo aço tem o seguinte diagrama $\sigma \times \varepsilon$. Adote $\gamma = 2$.





$$\sin \propto = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad \cos \propto = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

a) Equilíbrio do nó



$$+\uparrow \sum F_V = 0 = -30 - N_2 \underbrace{\sin \propto}_{0{,}6} => N_2 = -50tf$$

$$\xrightarrow{+} \sum F_H = 0 = -N_1 - N_2 \underbrace{\cos \propto}_{0{,}8} => N_1 = +40tf$$

$$\bar{\sigma_c} = \frac{\sigma_r}{\gamma} = -\frac{2500}{2} = -1250 \, {}^{kgf}/_{cm^2}$$

$$|\sigma_2| = \left|\frac{N_2}{A_2}\right| = \left|\frac{-50.000\ kgf}{A_2}\right| \leq |\bar{\sigma_c}| = 1250$$

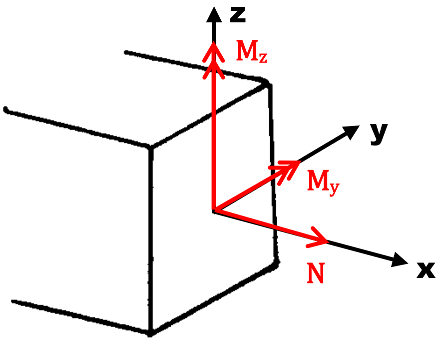
$$=> A_2 \geq \frac{50.000}{1250} = 40\ cm^2$$

$$\bar{\sigma_t} = \frac{\sigma_r}{\gamma} = \frac{2500}{2} = 1250 \, {}^{kgf}/_{cm^2}$$

$$|\sigma_1| = \left|\frac{N_1}{A_1}\right| = \left|\frac{40.000\ kgf}{A_1}\right| \leq |\bar{\sigma_t}| = 1250$$

$$=> A_1 \geq \frac{40.000}{1250} = 32\ cm^2$$

▪ Tensões Normais

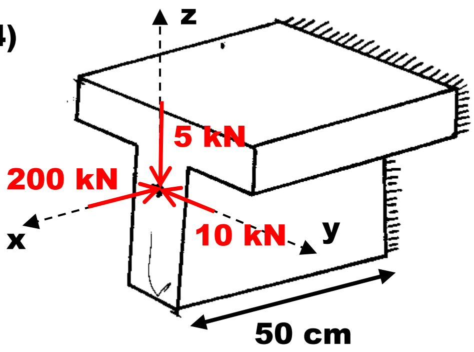


$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

Momento de Inércia

Lista P2a

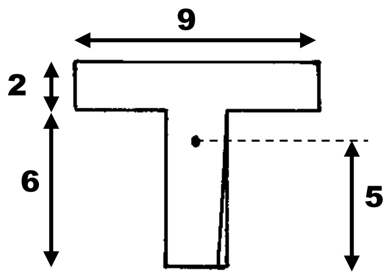
4)



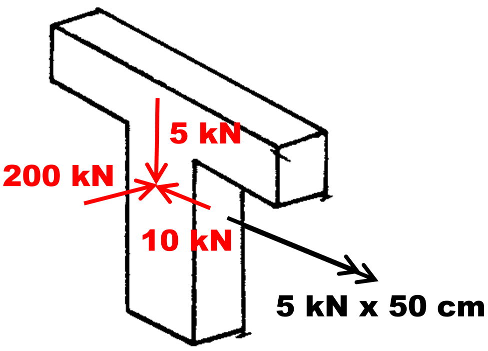
$A = 36\ cm^2$

$I_y = 204\ cm^4$

$I_z = 135\ cm^4$



a)



$N = -200\ kN$ $\qquad T = 0$

$|V_y| = 10\ kN$ $\qquad M_y = +200\ kNcm$

$|V_z| = 5\ kN$ $\qquad M_z = -500\ kNcm$

b) Expressão das tensões normais

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\sigma = \frac{-200}{36} - \frac{-500}{135} y + \frac{+250}{204} z \ {}^{kN}/_{cm^2}$$

$$\sigma = -5{,}56 + 3{,}7y + 1{,}2z$$

***Na prova tem formulário**

c) Posição da linha neutra: $\sigma = 0$

$$\sigma = 0 <=> \ -5{,}56 + 3{,}7y + 1{,}2z = 0$$

$$<=> \ z = -\frac{3{,}7}{1{,}2} y + \frac{5{,}56}{1{,}2}$$