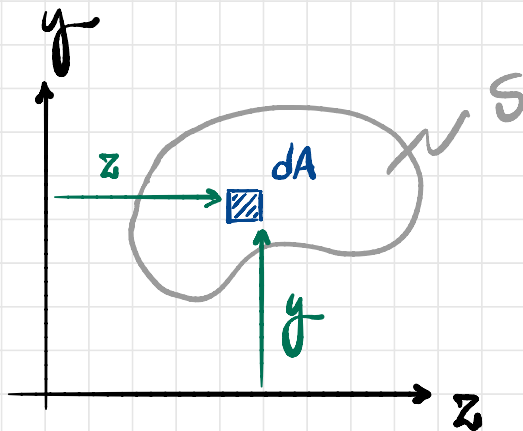


Propriedades das Figuras Planas

Para o cálculo das tensões vistas anteriormente, foram necessárias algumas propriedades da seção transversal como a área e o momento polar de inércia.

Nesse tópico serão exploradas em mais detalhes algumas propriedades das seções transversais.

Considere a figura (e o sistema de eixos) a seguir:



Define-se, para a área, momentos estáticos e de inércia como:

o Momento estático de S (M_S):

$$M_{Sy} = \int_S z dA, \text{ em relação ao eixo } y$$

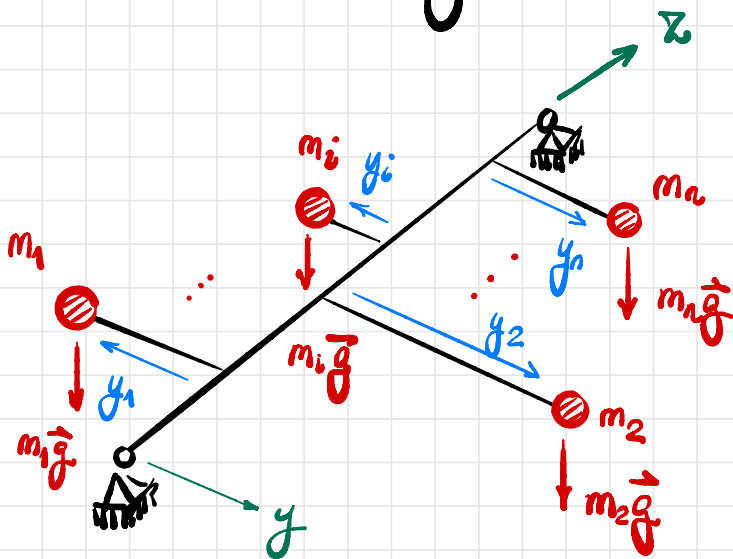
$$M_{Sz} = \int_S y dA, \text{ em relação ao eixo } z$$

o Momento de inércia de S (I):

$$I_y = \int_S z^2 dA, \text{ em relação ao eixo } y$$

$$I_z = \int_S y^2 dA, \text{ em relação ao eixo } z$$

O momento estático apresenta algumas propriedades interessantes. Considere, por exemplo a barra com hastes e pesos da figura:



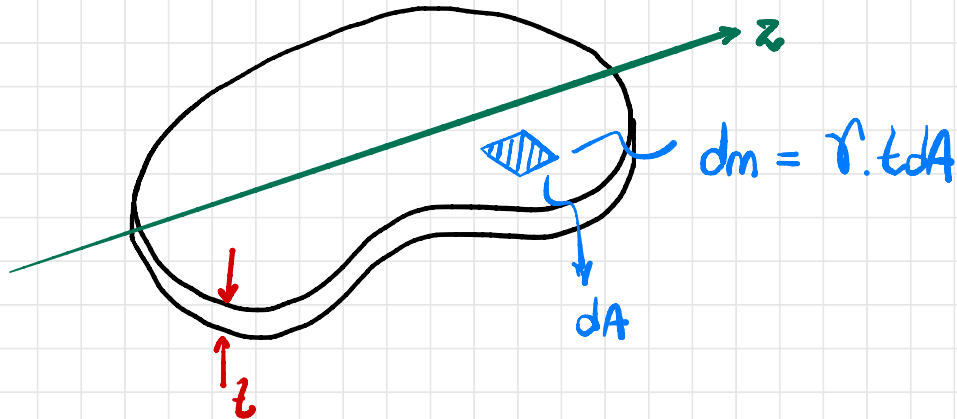
Para haver equilíbrio ao redor do eixo z :

$$\sum_{i=1}^n m_i y_i \vec{g} = \vec{0}$$

Ou seja:

$$\sum_{i=1}^n m_i y_i = 0$$

Estendendo o raciocínio para uma chapa com espessura (t) e densidade (ρ) constantes:



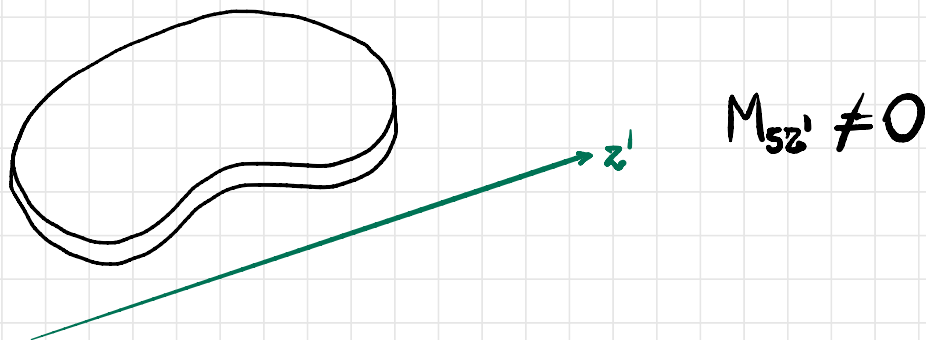
Para haver equilíbrio ao redor de z :

$$\int y dm = \int y \rho t dA = t \rho \underbrace{\int y dA}_{M_{sz}} = 0$$

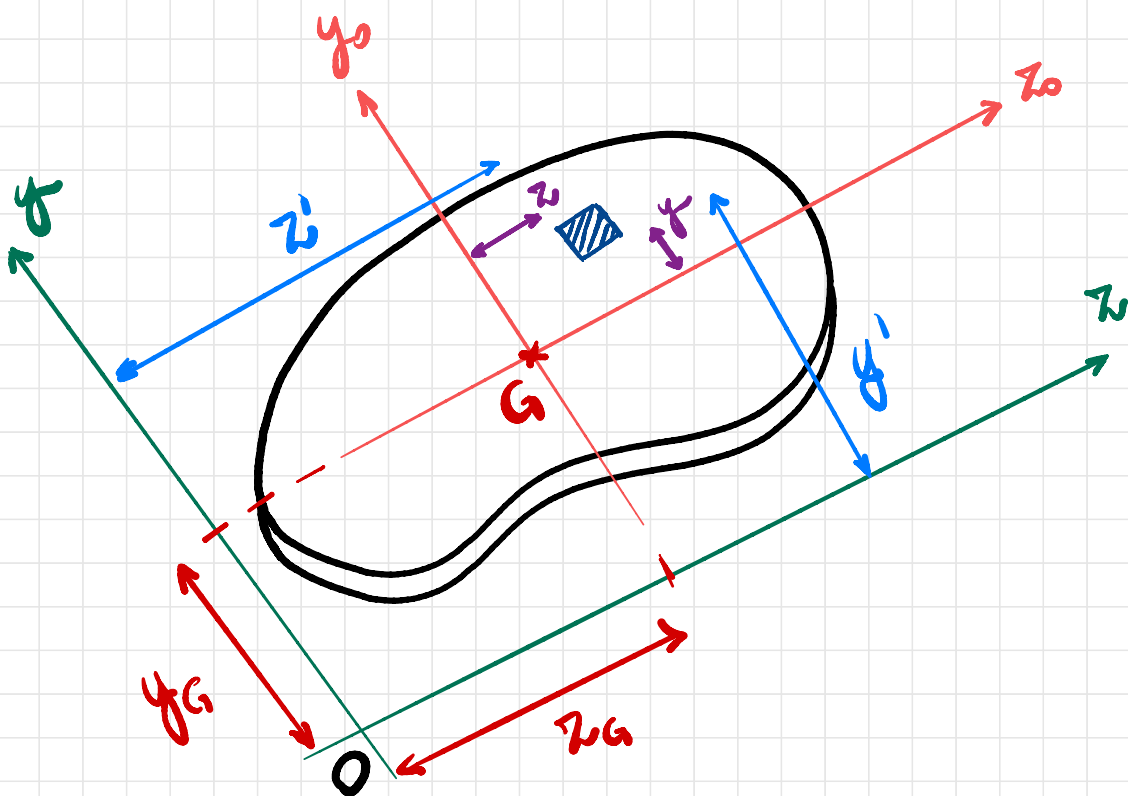
Logo, para haver equilíbrio:

$$M_{sz} = 0$$

Porém, é fácil observar que existem meios para o qual não se garante o equilíbrio:



Baricentro (G) de uma figura plana



Considero que os eixos y_0 e z_0 são tais que:

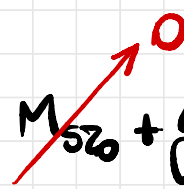
$$M_{sy_0} = \int_S z_0 dA = 0 \quad \text{e} \quad M_{sz_0} = \int_S y_0 dA = 0$$

Observando a figura:

$$y' = y + y_G$$

E assim:

$$M_{sz} = \int_S y' dA = \int_S (y + y_G) dA = \int_S y dA + \int_S y_G dA$$

$$M_{sz} = \underbrace{\int_S y dA}_{M_{sz_0}} + y_G \underbrace{\int_S dA}_A = \cancel{M_{sz_0}} + y_G A$$


$$M_{sz} = y_G A \rightarrow$$

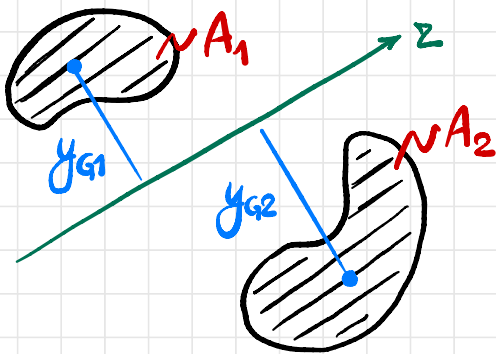
$$y_G = \frac{M_{sz}}{A}$$

Analogamente:

$$z_G = \frac{M_{sy}}{A}$$

Da seja, é possível determinar a posição do baricentro conhecendo os momentos estáticos da figura para um eixo qualquer.

Se a figura for composta por várias figuras:



O momento estático da composição fica:

$$M_{sz} = \sum_{i=1}^n y_{Gi} A_i = y_G A \quad (\text{com } A = \sum_{i=1}^n A_i)$$

Logo:

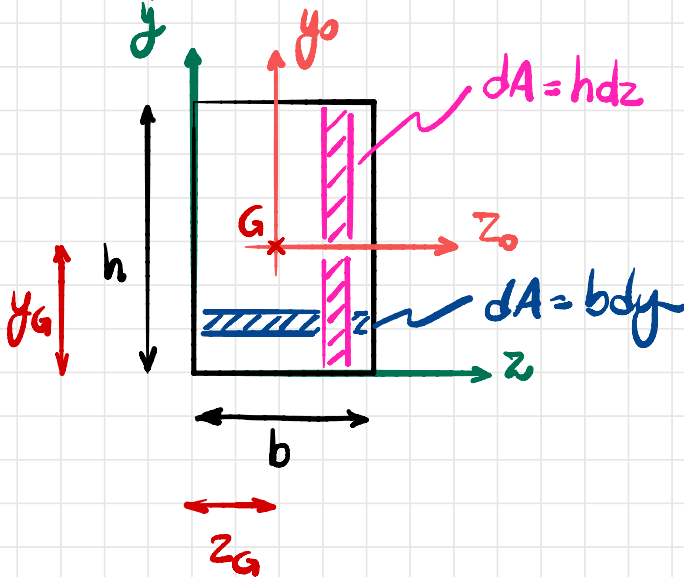
$$y_G = \frac{M_{sz}}{A}$$

Ou:

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_{Gi} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

média ponderada das distâncias dos centros de massa de cada figura ponderada pelas áreas.

Exemplo:



Será verificado que $y_G = h/2$ e $z_G = b/2$

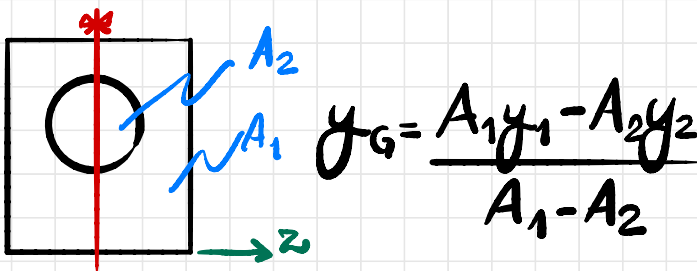
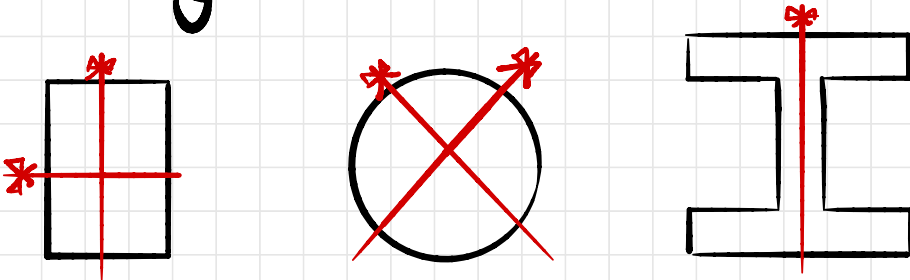
$$M_{sz} = \int y dA = \int_0^h by dy = b \int_0^h y dy = b \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{bh^2}{2}$$

$$y_G = \frac{M_{sz}}{A} = \frac{bh^2/2}{bh} \rightarrow y_G = \frac{h}{2}$$

$$M_{sy} = \int z dA = \int_0^b hz dz = h \int_0^b z dz = h \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^b = \frac{hb^2}{2}$$

$$z_G = \frac{M_{sy}}{A} = \frac{bh^2/2}{bh} \rightarrow z_G = \frac{b}{2}$$

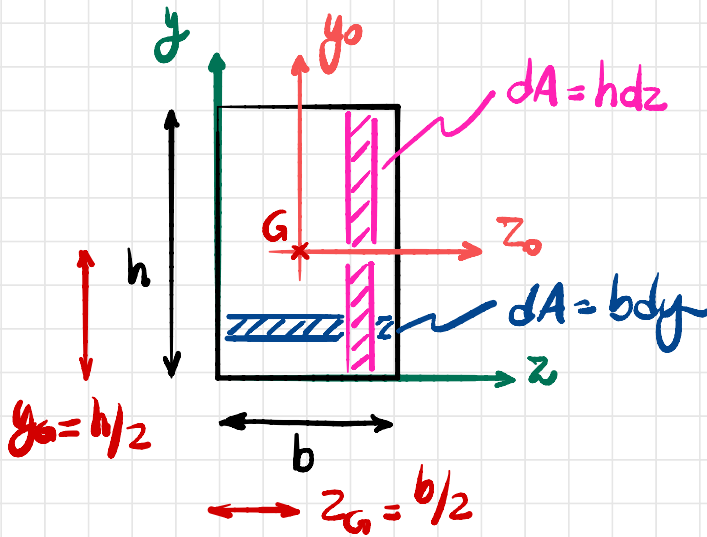
O baricentro está **sempre** sobre os eixos de simetria de uma figura (caso existam):



Momentos de Inércia

O mesmo processo que foi utilizado para o cálculo dos momentos estáticos será usado para os momentos de inércia.

Para este processo, considere novamente o retângulo:



$$I_z = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = b \int_0^h y^2 dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \int z^2 dA = \int_0^b z^2 h dz = h \int_0^b z^2 dz = h \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^b = \frac{hb^3}{3}$$

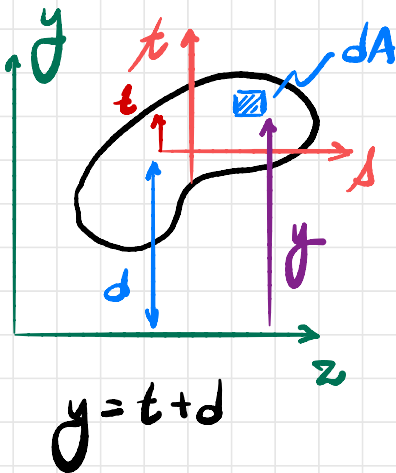
É em relação aos eixos y_0 e z_0 :

$$I_{z_0} = \int y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

atenção aos extremos de integração!

$$I_{y_0} = \int z^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} z^2 h dz = h \int_{-b/2}^{b/2} z^2 dz = h \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{hb^3}{12}$$

Teorema de Steiner



$$I_z = \int y^2 dA = \int (t + d)^2 dA$$

$$I_z = \int t^2 dA + \int 2td dA + \int d^2 dA$$

$$I_z = \underbrace{\int t^2 dA}_{I_s} + 2d \underbrace{\int t dA}_{M_{st}} + d^2 \underbrace{\int dA}_A$$

$$\therefore \boxed{I_z = I_s + 2dM_{st} + d^2A}$$

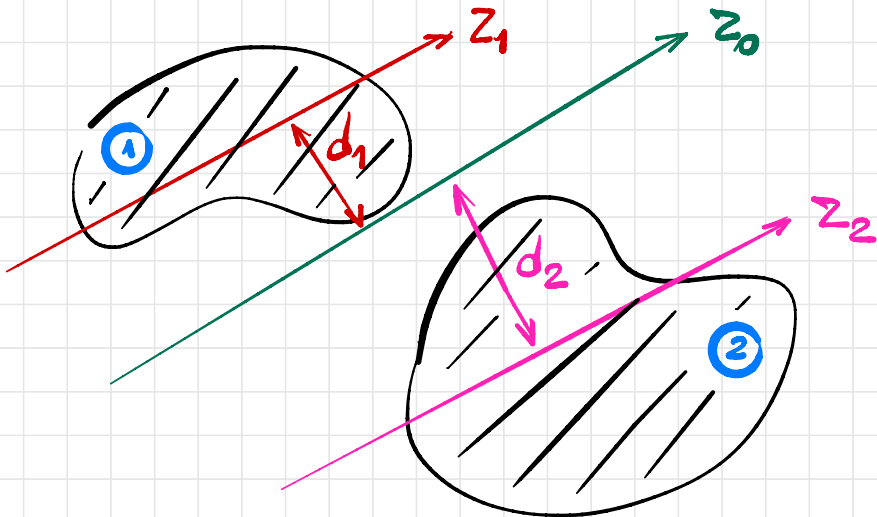
Para o caso particular em que o eixo β coincide com o baricentro z_0 , então $M_{z_0} = 0$ e assim, o teorema de Steiner se reduz a:

$$I_z = I_{z_0} + d^2 A$$

onde d é a distância entre os eixos z e z_0 .

Para uma figura composta:

$$I_{z_0} = \sum_{i=1}^n I_{z_i} = \sum_{i=1}^n (I_{z_0}^i + d_i^2 A_i)$$



$$I_{z_0} = (I_{z_0}^1 + d_1^2 A_1) + (I_{z_0}^2 + d_2^2 A_2)$$


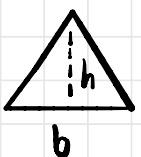

↑ calculado no baricentro da figura!

Verificando o teorema para o retângulo:

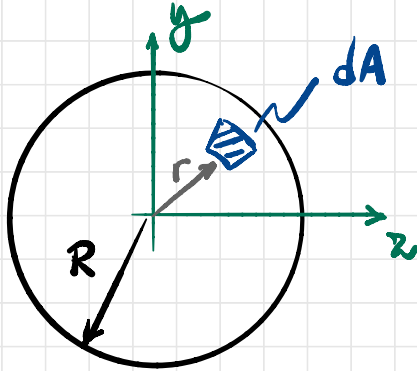
$$I_z = \frac{bh^3}{3}; I_{z_0} = \frac{bh^3}{12}; d = y_G = h/2$$

$$I_z = I_{z_0} + d^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot bh = \frac{bh^3}{3}$$

Momentos de Inércia (eixo z horizontal / y-vertical)

figuras	I_{z_0}	I_{y_0}
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$
	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{48}$
	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$

Momento Polar de Inércia



O momento polar de inércia é definido por:

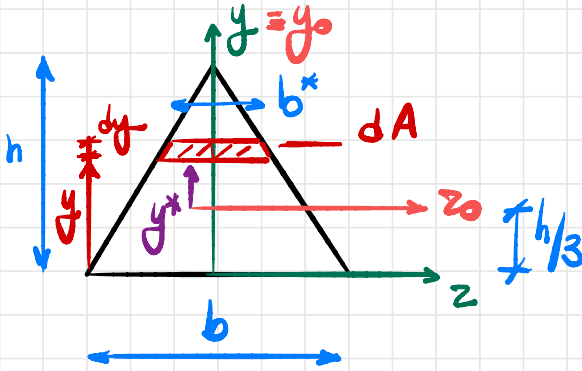
$$J_o = \int r^2 dA$$

Assim:

$$J_o = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 (r dr d\theta) = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

$$\therefore J_o = \frac{\pi R^4}{2}$$

Exemplo: Calcular o momento de inércia do triângulo:



$$dA = b^* dy$$

Para I_z , por semelhança de triângulos:

$$\frac{b^*}{b} = \frac{h-y}{h} \rightarrow b^* = \frac{b}{h} (h-y)$$

E assim:

$$I_z = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 \frac{b}{h} (h-y) dy = \frac{b}{h} \left[\int_0^h (hy^2 - y^3) dy \right]$$

$$I_z = \frac{b}{h} \left[\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^h = \frac{b}{h} \left[\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4} \right] = \frac{bh^3}{12}$$

Para I_{z0} , deve-se obter b^* em função de y^* :

$$\frac{b^*}{b} = \frac{h - (y^* + h/3)}{h} \rightarrow b^* = \frac{b}{h} \left(\frac{2h}{3} - y^* \right)$$

Assim (e usando y ao invés de y^* para simplificar):

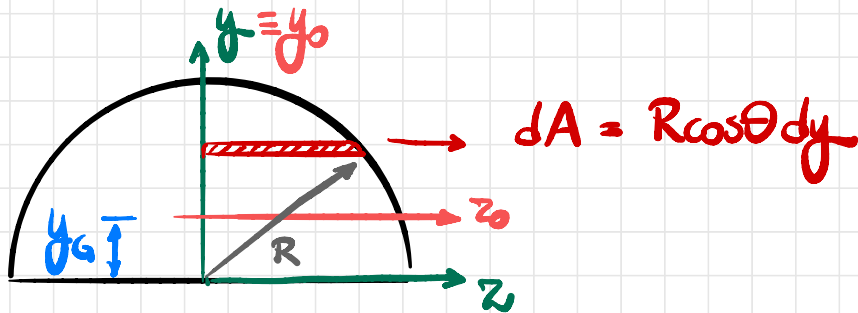
$$I_{z0} = \int y^2 dA = \int_{-h/3}^{2h/3} y^2 \frac{b}{h} \left(\frac{2h}{3} - y \right) dy$$

$$I_{z0} = \frac{b}{h} \int_{-h/3}^{2h/3} \left(\frac{2hy^2}{3} - y^3 \right) dy = \frac{b}{h} \left[\frac{2h}{3} \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_{-h/3}^{2h/3}$$

$$I_{z0} = \frac{b}{h} \left[\left(\frac{16h^4}{243} - \frac{4h^4}{81} \right) - \left(-\frac{2h^4}{243} - \frac{h^4}{324} \right) \right]$$

$$I_{z0} = bh^3 \left(\frac{4}{243} + \frac{11}{972} \right) \rightarrow \boxed{I_{z0} = \frac{bh^3}{36}}$$

Exemplo: Calcular o momento de inércia do semi-círculo abaixo (no baricentro):



$$y = R \sin \theta \rightarrow dy = R \cos \theta d\theta$$

$$e \quad dA = R^2 \cos^2 \theta d\theta$$

Calculando z_G :

$$y_G = \frac{M_{sz}}{A} = \frac{2}{\pi R^2} \int y dA = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} (R \sin \theta) R^2 \cos^2 \theta d\theta$$

$$y_G = \frac{2R}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{2R}{\pi} \cdot \frac{2}{3}$$

$$y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

Como $I_2 = \frac{1}{2} I_{\text{circ}} = \frac{\pi R^4}{8}$, então:

$$I_{\text{circ}} = I_2 - d^2 A = \frac{\pi R^4}{8} - \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi R^2}{2}$$

$$I_{\text{circ}} = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{4R^4}{9\pi} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) R^4$$

$$I_{\text{circ}} \approx 0,11 R^4$$