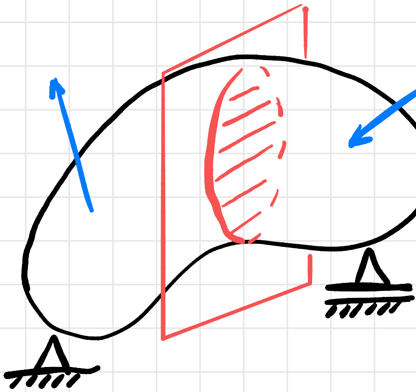
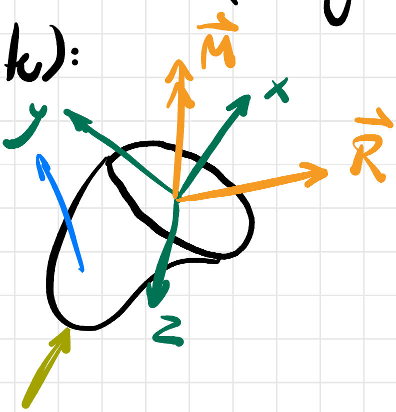
Tensões e Deformações

Relembrando do que foi visto anteriormente:



No corte, as tensões foram representadas como esforços solicitantes (carregamento mecanicamente equivalente):

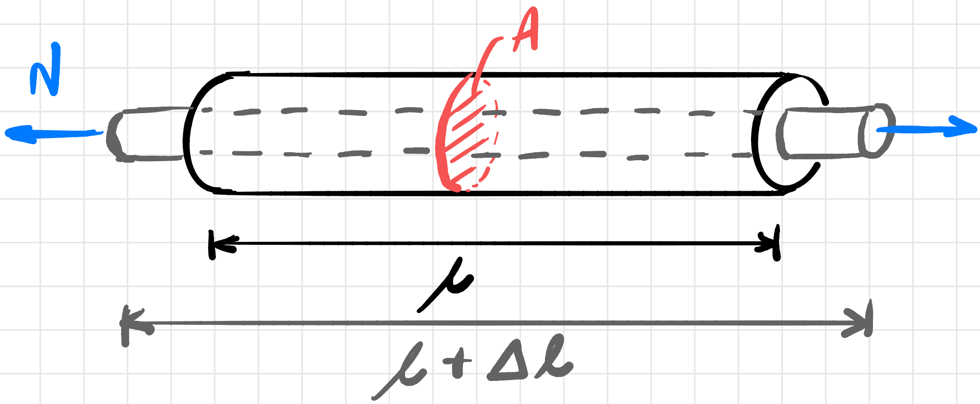


$$\begin{cases} \vec{R} = N\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k} \\ \vec{M} = T\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} \end{cases}$$

O que será visto nesse tópico é como as tensões e os esforços solicitantes se relacionam.

Lei de Hooke

Considere o cilindro de área transversal A e comprimento l sob a ação de uma força de tração N:



Existe uma relação de proporcionalidade entre $\frac{N}{A}$ e $\frac{\Delta l}{l}$, que depende do material.

Define-se tensão normal como:

$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$

$\left[\frac{N}{m^2}\right] = [Pa]$ Pascal

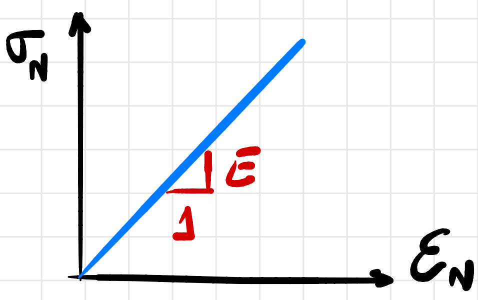
E deformação longitudinal como:

$$\varepsilon_N = \frac{\Delta \ell}{\ell}$$ [m/m] ou [-] adimensional

A relação de proporcionalidade entre essas duas grandezas pode ser expressa por:

$$\sigma_N = E \cdot \varepsilon_N$$ lei de Hooke

$$\boxed{E = \sigma_N / \varepsilon_N}$$ módulo de elasticidade



Alguns módulos de elasticidade:

Material	E [GPa]	ν [-]
Aço	210	0,30
Alumínio	70	0,25
Concreto	$\simeq$ 25	0,15
Madeira	$\simeq$ 10	?
Nylon	$\simeq$ 2	0,42

$$1\,GPa = 10^9\,Pa = 10^3\,MPa$$

ν: coeficiente de Poisson

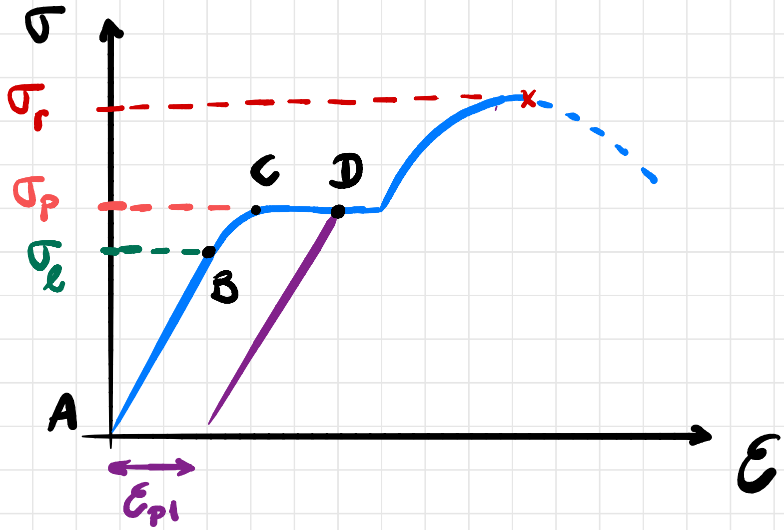
Definindo deformação transversal como:

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta\phi}{\phi} \quad , \quad \phi: \text{diâmetro}$$

Observa-se que:

$$\varepsilon_T = -\nu\,\varepsilon_N$$

A lei de Hooke vale apenas em uma certa limite de deformação / tensão. A curva de tensão-deformação possui diversas regiões:



material dúctil "aço doce"

σ_e: tensão limite de proporcionalidade

σ_p: tensão de escoamento (plastificação)

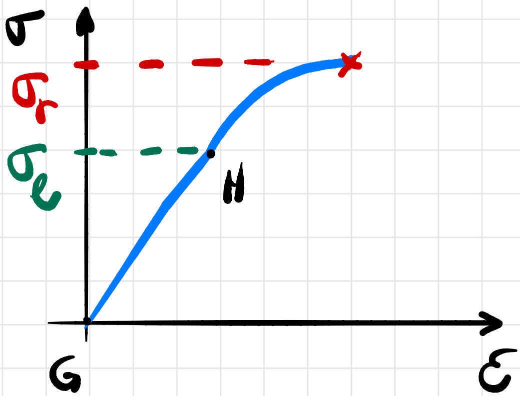
σ_r: tensão de ruptura.

- A lei de Hooke é válida até o limite de proporcionalidade (σ_e)

- A partir desse ponto, há deformações permanentes (ou seja, ocorre plastificação do material)

- Em um ensaio ABCD, após o alívio da carga, há deformações permanentes na estrutura (ε_{pl}).

Outros materiais não apresentam plastificação antes da ruptura. São materiais frágeis:



material frágil

GH: trecho linear

Uma vez compreendida a validade da lei de Hooke, pode-se retomar a formulação:

$$\sigma_N = E \cdot \varepsilon_N \longrightarrow \varepsilon_N = \frac{\sigma_N}{E}$$

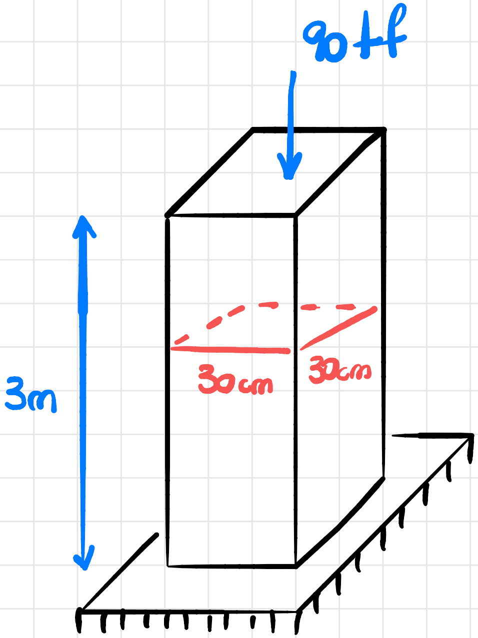
Mas $\sigma_N = N/A$ e $\varepsilon_N = \Delta\ell/\ell$, então:

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{N}{A} \cdot \frac{1}{E} \longrightarrow \boxed{\Delta\ell = \frac{N\ell}{EA}}$$

EA: módulo de rigidez axial [N]

Com a expressão anterior, é possível calcular o alongamento (ou encurtamento) de uma barra ou pilar conhecidos o carregamento, comprimento inicial, módulo de elasticidade do material e área da seção transversal.

Exemplo: calcular o encurtamento do pilar de concreto da figura:



Considere uma força compressiva de 90tf e que o módulo de elasticidade do concreto é 25GPa.

Solução:

$$N = -90\,tf = -90.10^3\,kgf \simeq -90.10^4\,N$$

$$E = 25\,GPa = 25.10^9\,Pa$$

$$A = 30\,cm \cdot 30\,cm = 0{,}3\,m \cdot 0{,}3\,m = 0{,}09\,m^2$$

$$\ell = 3\,m$$

Logo:

$$\Delta\ell = \frac{N\ell}{EA} \longrightarrow \Delta\ell = -\frac{90.10^4 \cdot 3}{25.10^9 \cdot 0{,}03} \qquad \frac{N \cdot m}{N/m^2 \cdot m^2}$$

encurtamento

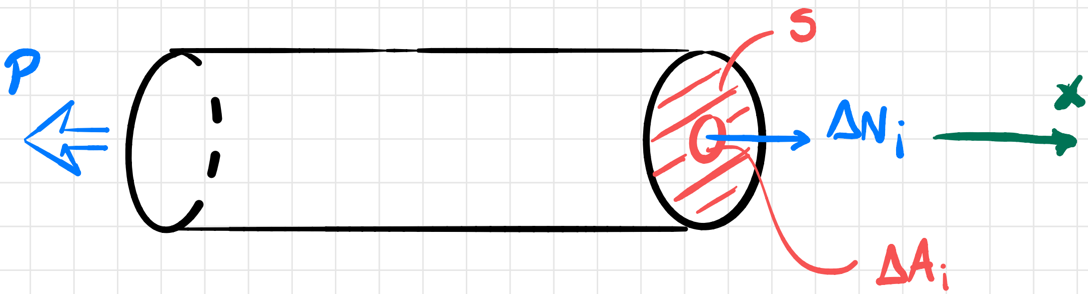
(sinal)

$$\Delta\ell = -0{,}12.10^{-2}\,m$$

$$\therefore \boxed{\Delta\ell = -1{,}2\,mm}$$

Importante: a tensão σ_N é uma tensão média!

Considere o seguinte exemplo:



$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \longrightarrow A = \int_S dA$$

Analogamente:

$$P = \int_S dN$$

Considerando a área infinitesimal dA:

$$\sigma_x = \frac{dN}{dA} \longrightarrow dN = \sigma_x \, dA$$

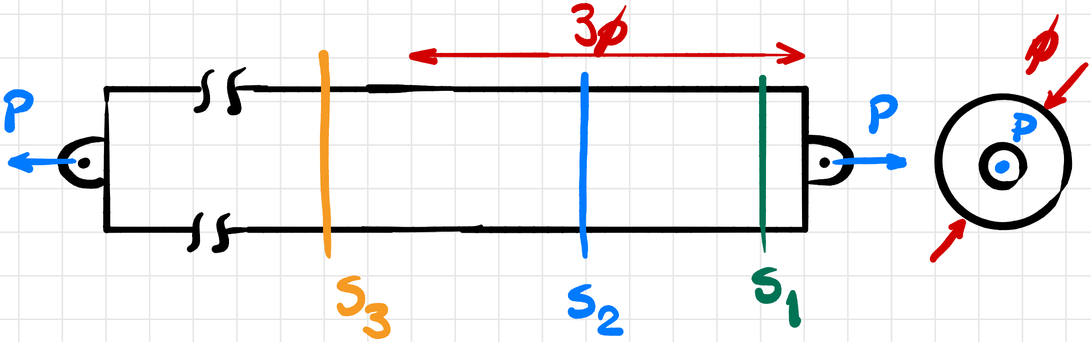
Assim:

$$N = \int_S \sigma_x \, dA$$

Se, por hipótese, $\sigma_x = \sigma_N$, $\forall P \in S$, então:

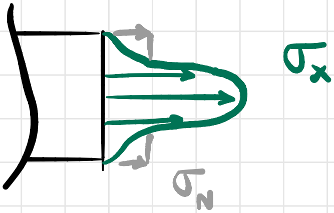
$$N = \int_S \sigma_N \, dA \longrightarrow N = \sigma_N \int_S dA \longrightarrow \boxed{N = \sigma_N A}$$

Para ficar mais claro, considere o exemplo:



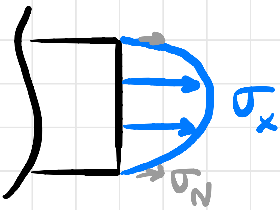
A distribuição de tensões em cada seção fica:

Seção S1:



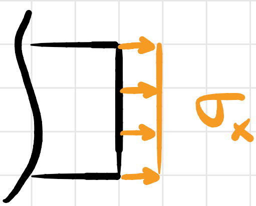
$$\sigma_x \gg \sigma_N$$

Seção S2:



$$\sigma_x > \sigma_N$$

Seção S3:



$$\sigma_x \simeq \sigma_N$$

* Princípio de Saint-Venant.

Coeficiente de Segurança

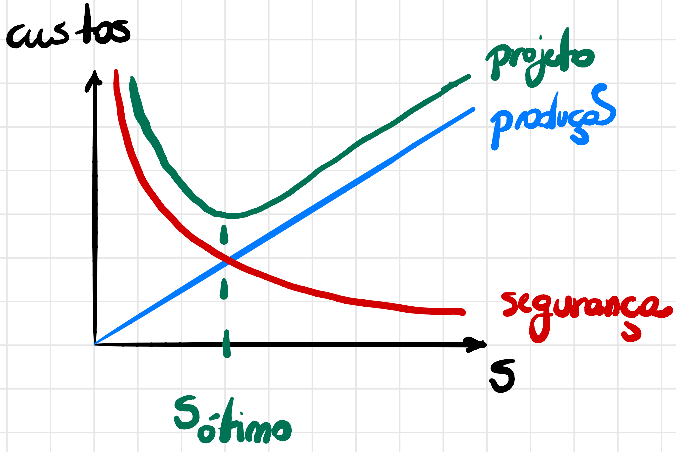
Para garantir que a estrutura em análise não falhe, deve-se ter certeza que os limites de tensão não são atingidos. Por exemplo:

$$\sigma_{lim} = \begin{cases} \sigma_e \text{ (tensão de escoamento, materiais dúcteis)} \\ \sigma_r \text{ (tensão de ruptura, materiais frágeis)} \end{cases}$$

Porém, qualquer coisa não prevista no projeto ocorre, pode ser que a tensão na estrutura seja maior que a tensão limite e falhar. Por isso, utiliza-se um coeficiente de segurança. Dessa forma, a estrutura tem como novo limite uma tensão admissível:

$$\underbrace{\bar{\sigma}}_{\text{tensão admissível}} = \frac{\sigma_{lim}}{\underbrace{S}_{\text{coeficiente de segurança}}}$$

Qual coeficiente de segurança utilizar?



- Depende da experiência!

Alguns coeficientes de segurança usuais:

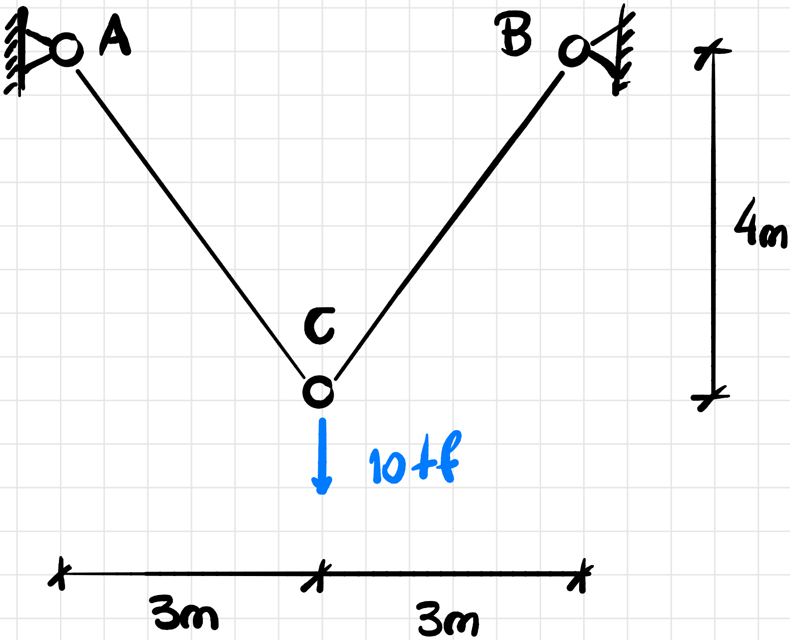
aço: $S = 1{,}5 - 2$

concreto: $S = 2 - 3$

madeira: $S = 3 - 4$

- Depende do conhecimento do problema
- Depende das hipóteses utilizadas.

Exemplo: Determinar o diâmetro do fio para que o coeficiente de segurança seja igual a 2. Considere que a tensão de escoamento (σ_e) é 600MPa e o módulo de elasticidade (E) dos fios é 210GPa.

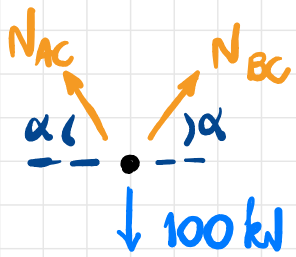


$$10\,tf = 10 \cdot 10^3\,kgf = 100 \cdot 10^3\,N = 100\,kN$$

$1\,kgf \cong 10\,N \quad (g\,N)$

Observando o nó C:

$$\operatorname{sen}\alpha = 4/5$$
$$\cos\alpha = 3/5$$



$$\sum F_H = 0: \quad -N_{AC}\cos\alpha + N_{BC}\cos\alpha = 0$$

$$N_{AC} = N_{BC} = N$$

$$\sum F_V = 0: \quad -100 + N_{AC}\operatorname{sen}\alpha + N_{BC}\operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$2N\operatorname{sen}\alpha = 100 \longrightarrow N = 50/\operatorname{sen}\alpha$$

$$\therefore \boxed{N = 62{,}5\ \text{kN}}$$

Calculando a tensão admissível:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{lim}}{s} = \frac{\sigma_e}{s} = \frac{600}{2} = 300\ \text{MPa}$$

Assim, a tensão na estrutura deve ser menor, ou no máximo a tensão admissível:

$$\sigma \leq \bar{\sigma} \longrightarrow \frac{N}{A} \leq \bar{\sigma}$$

Logo:

$$A \geq \frac{N}{\bar{\sigma}}$$

Sabendo que a área do fio é dada por:

$$A_{fio} = \frac{\pi \phi^2}{4}$$

Então:

$$\frac{\pi \phi^2}{4} \geq \frac{N}{\bar{\sigma}} \longrightarrow \phi \geq \sqrt{\frac{4N}{\pi \bar{\sigma}}}$$

Substituindo:

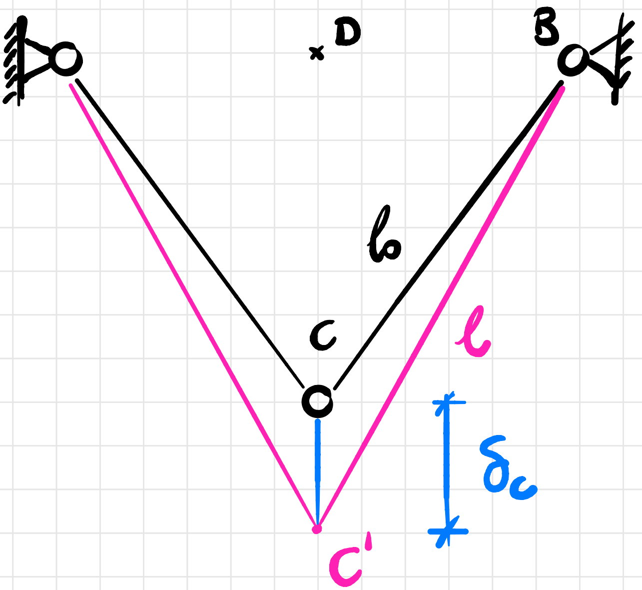
atento às unidades:

$$\phi \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 62{,}5 \cdot 10^3}{\pi \cdot 300 \cdot 10^6}} \begin{matrix} \leftarrow N \\ \leftarrow Pa\ (N/m^2) \end{matrix} \Bigg\} m$$

$$\phi \geq 0{,}0163\, m = 1{,}63 cm.$$

Assim, o menor diâmetro que atende às condições é 1,63 cm.

Para o problema exibido, pode-se determinar o deslocamento vertical do ponto C:



$$l = l_0 + \Delta l$$

Como $\varepsilon = \Delta l / l_0$, então $\Delta l = \varepsilon l_0$ e assim:

$$l = (1 + \varepsilon)\, l_0 .$$

A deformação pode ser obtida através da lei de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \longrightarrow \varepsilon = \sigma / E$$

Considerando que a área terá o raio mínimo, então $\sigma = \bar{\sigma}$. Assim:

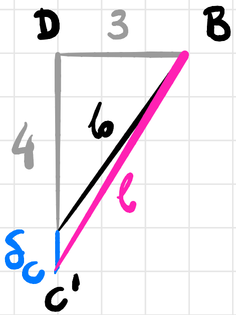
$$\varepsilon = \frac{300 . 10^{6}}{210 . 10^{9}} \longrightarrow \varepsilon = 1{,}43 . 10^{-3} \ m/m \ [-]$$

Assim, o comprimento final é:

$$l = (1+\varepsilon) l_0 = (1{,}00143) . 5$$

$$l = 5{,}0071 m$$

Considerando o triângulo BDC':



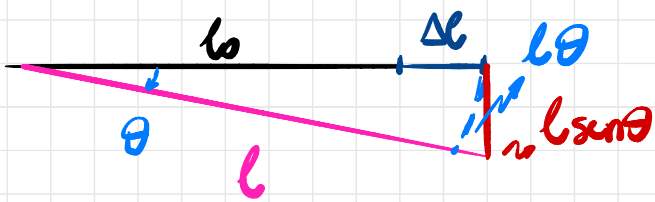
$$3^2 + (4+\delta_c)^2 = l^2$$

$$(4+\delta_c)^2 = l^2 - 3^2$$

$$\delta_c = \sqrt{l^2 - 3^2} - 4$$

$$\therefore \boxed{\delta_c = 0{,}0089 m}$$

Uma maneira mais simples para calcular δ_c é usar uma solução aproximada, haja visto que deslocamentos e deformações na estrutura são pequenos:

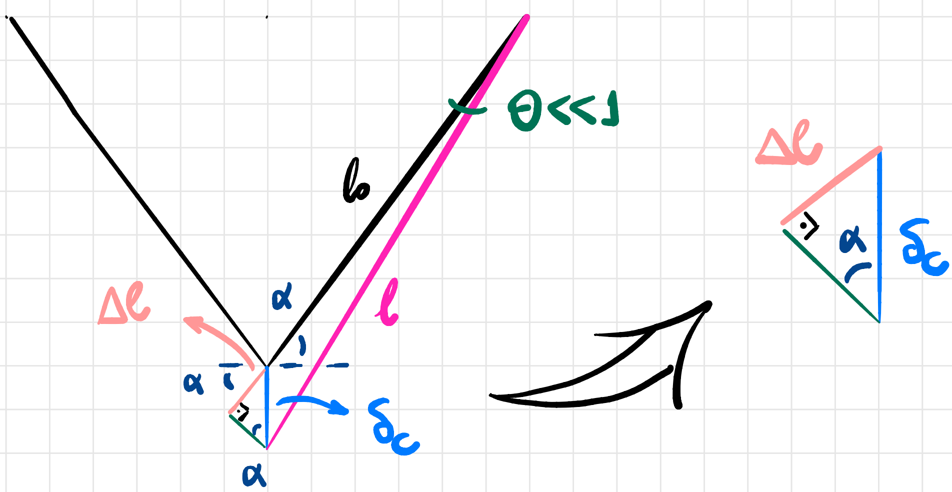


Se θ é pequeno $(\theta \ll 1)$, então $\theta \simeq \operatorname{sen}\theta$ e assim:

$$l\theta \simeq l \operatorname{sen}\theta.$$

Diagrama de Williot

O diagrama de Williot é válido para pequenas variações de ângulo. Utiliza-se a estrutura deformada para os cálculos:



Assim:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\Delta l}{\delta_c} \longrightarrow \delta_c = \frac{\Delta l}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{0{,}0071}{4/5}$$

$$\therefore \boxed{\delta_c = 0{,}0089\,m}$$