PEF3208

Aula 6

12 mai

PROF. NAKAO

- **TRELIÇAS PLANAS ISOSTÁTICAS. CÁLCULO DE TRELIÇAS PELO EQUILÍBRIO DE NÓS E PELO MÉTODOS DAS SEÇÕES.**

https://edisciplinas.usp.br/course/view.php?id=106390

AULA	C o n t e ú d o	Estudo	Exercício	Projeto / Trabalho	Extra Aula	Dia da Aula
1	Planejamento: expectativas, conteúdo, estratégias. Introdução: Mecânica das Estruturas. Objetivos da Resistência dos.Materiais. Classificação das estruturas, das ações e dos esforços.			0,5h	0,5h	21/3, 23/3, 24/3
2	Esforços reativos e solicitantes. Linhas de estado em vigas retas.	0,5h	0,5h	0,5h	1,5h	28/3, 30/3, 31/3
3	Linhas de estado em vigas inclinadas e curvas.	0,5h	0,5h	0,5h	1,5h	11/4, 13/4, 14/4
4	Linhas de estado em vigas poligonais planas.	0,5h	0,5h	0,5h	1,5h	18/4, 20/4, 28/4
5	Linhas de estado de vigas poligonais espaciais. Apresentação do programa Ftool. **Entrega da proposta de T.**	0,5h	0,5h	0,5h	1,5h	25/4, 27/4; 5/5
6	Treliças Planas isostáticas. Cálculo de treliças pelo equilíbrio de nós e pelo método das seções.	1h	1h		2h	2 e 9/5, 4/5, 12/5
	Prova P1 (Anf Am: t1 e t2; Anf Ver t3 e t4)					**17/5 - 15h40**

AULA 6: 2 e 9/5; 4/5; 12/5

Treliças Planas isostáticas. Cálculo de treliças pelo equilíbrio de nós e pelo método das seções.

- Treliças - Provasi
- Anotações e exercício para entrega - Turma 1
- AULA 6 NAKAO
- Animação TRELIÇA

PROVA P1 dia 17/5 15h40

TURMAS 1 E 2: ANFITEATRO AMARELO

TURMAS 3 E 4: ANFITEATRO VERMELHO

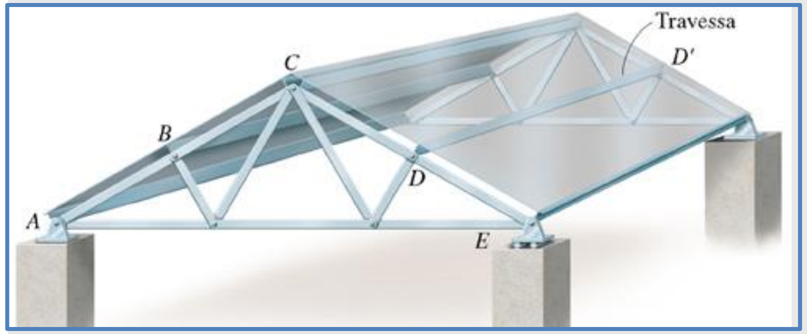
TRELIÇAS: São estruturas formadas por barras ligadas por articulações que trabalham predominantemente sob a ação de forças normais.

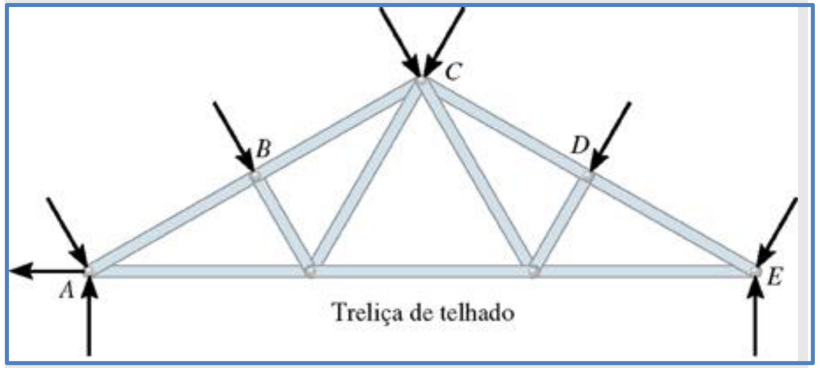
HIPÓTESES:

a) As barras se ligam aos nós por articulações perfeitas.

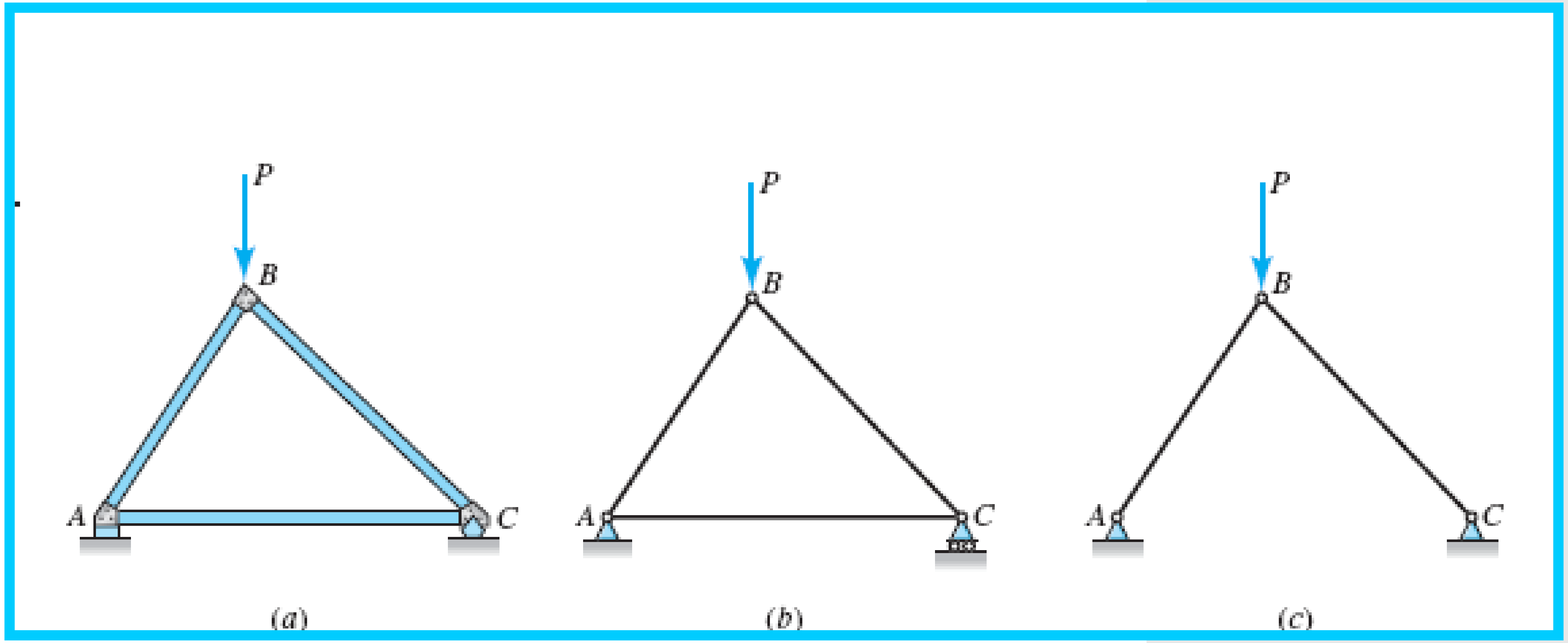
b) As cargas e as reações de vínculos aplicam-se apenas nos nós da treliça.

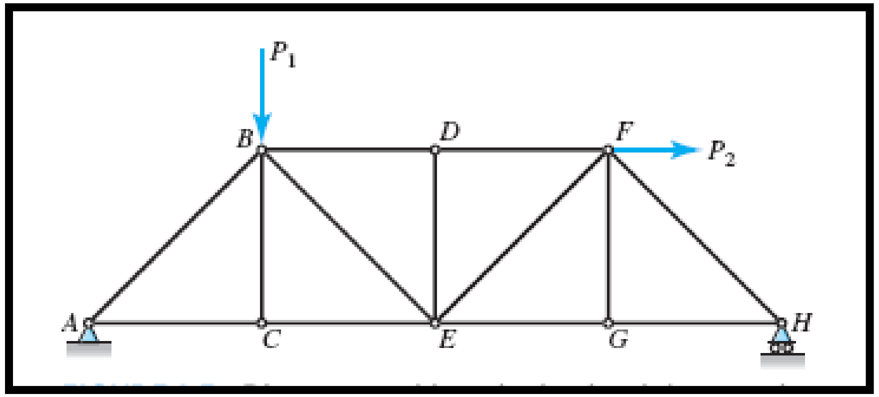
c) O eixo das barras coincide com a reta que une os nós.



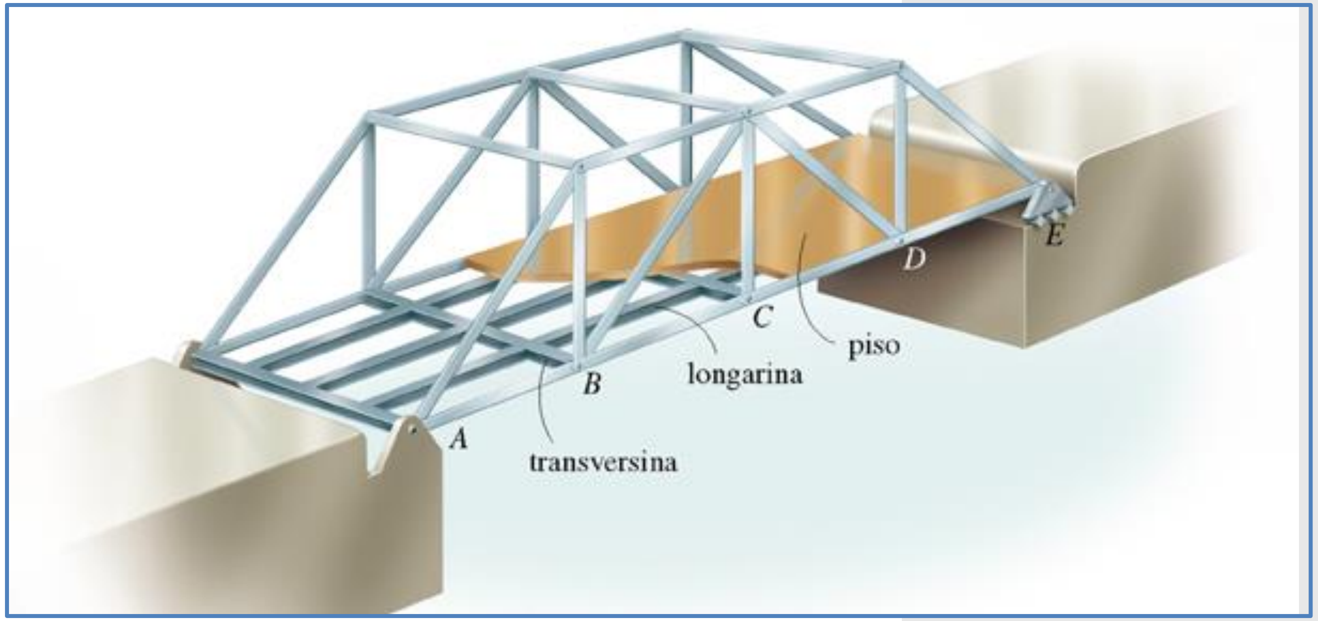


EXEMPLOS DE TRELIÇAS





TA **Philpot,** Missouri University of Science and Technology

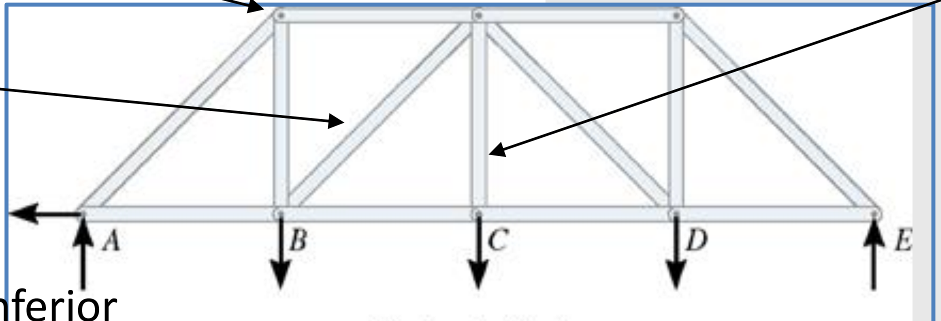


Nó

Banzo superior

Montante

Diagonal



Banzo inferior

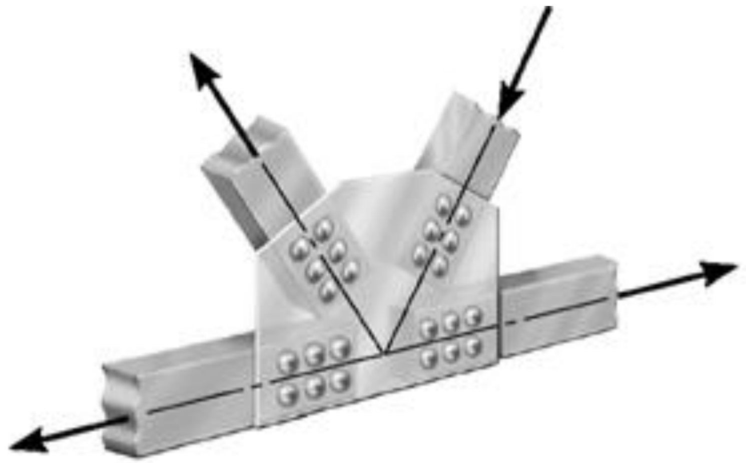
Treliça da Ponte

Na prática:

- **os nós não são articulações perfeitas;**

- **Pelo menos o peso próprio é uma carga aplicada ao longo do eixo das barras;**

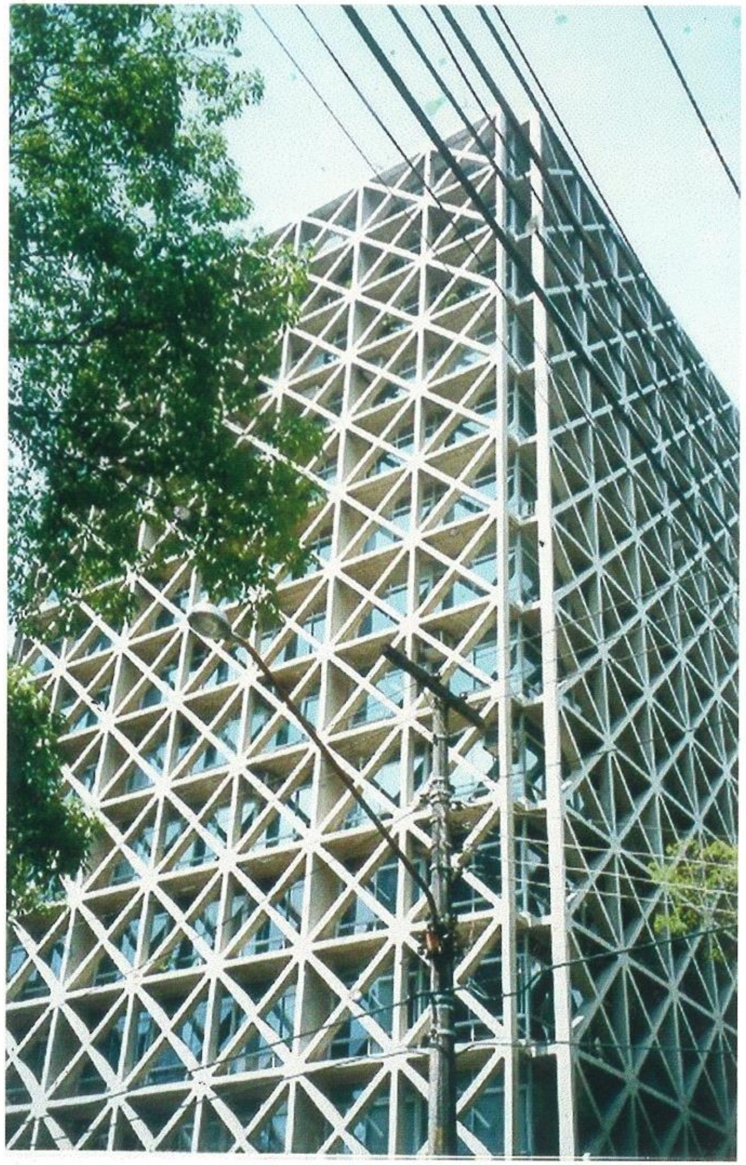
- **Os esforços secundários gerados por essas divergências não são significativos.**



Treliças planas são as que possuem os eixos de todas as suas barras em um mesmo plano, no qual também se situam todas as forças externas que as solicitam.

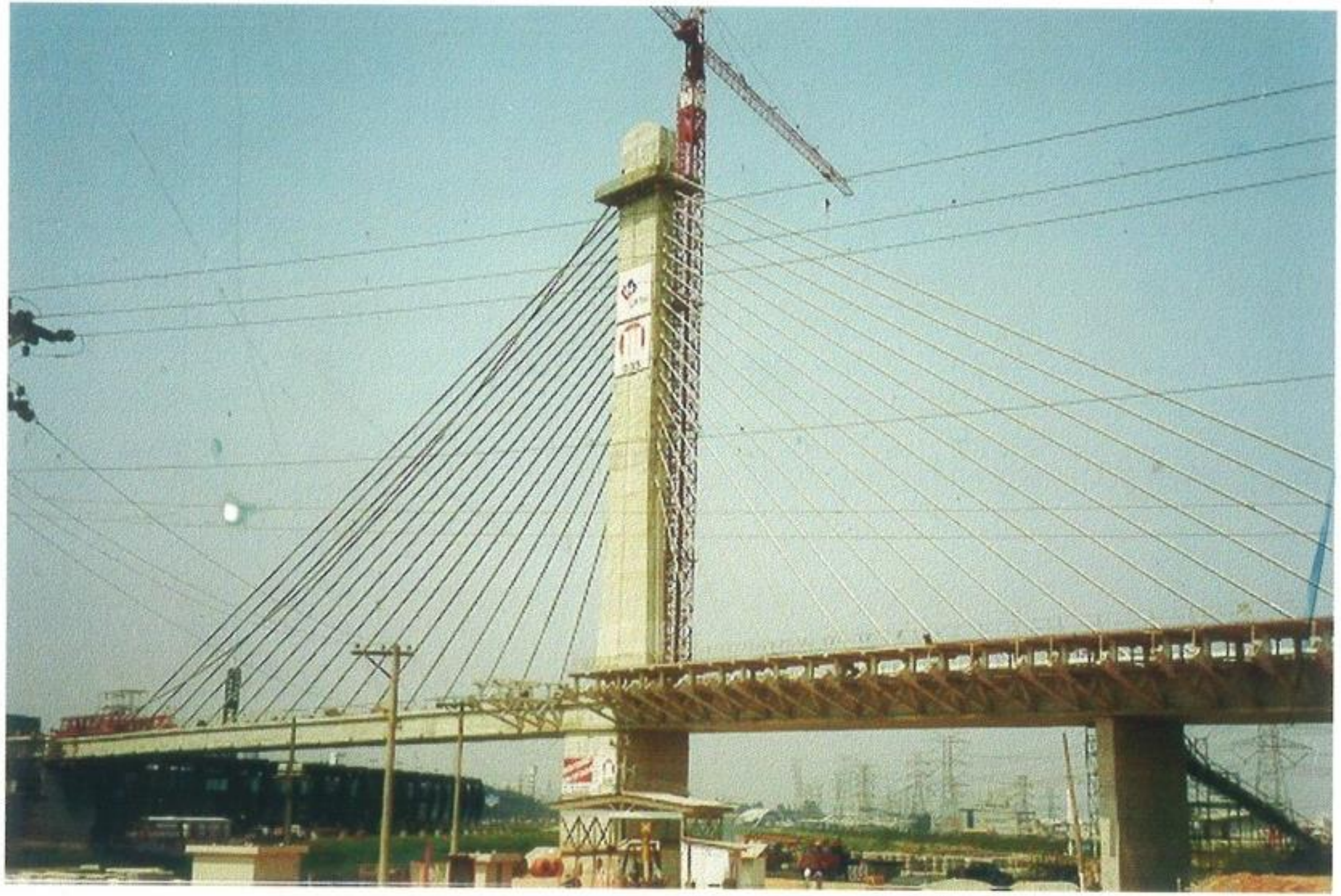
Treliças espaciais são as que não possuem os eixos de todas as suas barras situados em um mesmo plano.

Treliça de escoramento dos segmentos do tabuleiro da ponte
(fotografia de Anderson Glauco Benite)



Edifício Acal
(fotografia de Daniella Pinholi Cardoso)

Firth of Forth Bridge, 1889



Ponte estaiada sobre o rio Pinheiros
(fotografia de Anderson Glauco Benite)

Passarela sobre a Rodovia Raposo Tavares

Vista interior da passarela

Vista inferior da passarela

(fotografias de Anderson Glauco Benite)

Terminal Rodoviário Amador Aguiar

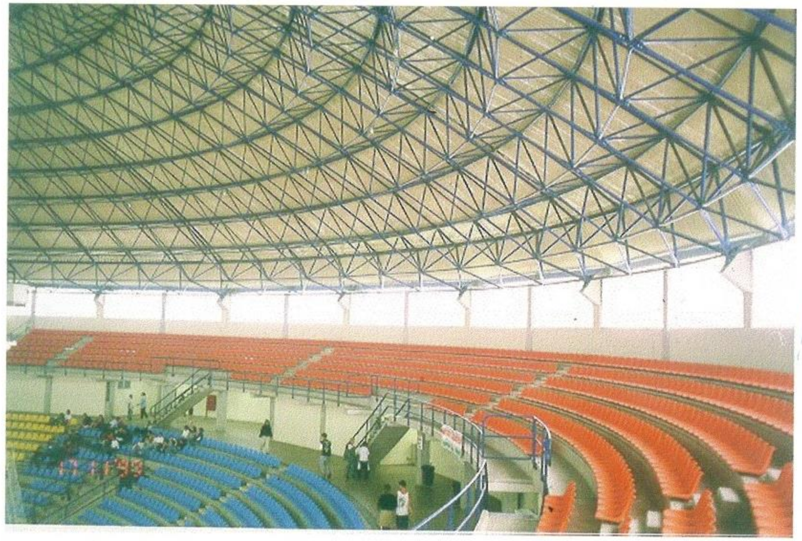
Cobertura
(fotografia de Anderson Glauco Benite)

Detalhe de um nó da treliça
(fotografia de Anderson Glauco Benite)

Cobertura da Estação Terminal Barra Funda do Metrô
(fotografia de André Hiroshi de Oliveira Nishina)

Detalhe de um nó da treliça
(fotografia de André Hiroshi de Oliveira Nishina)

Cobertura do Ginásio Poliesportivo de São Bernardo do Campo



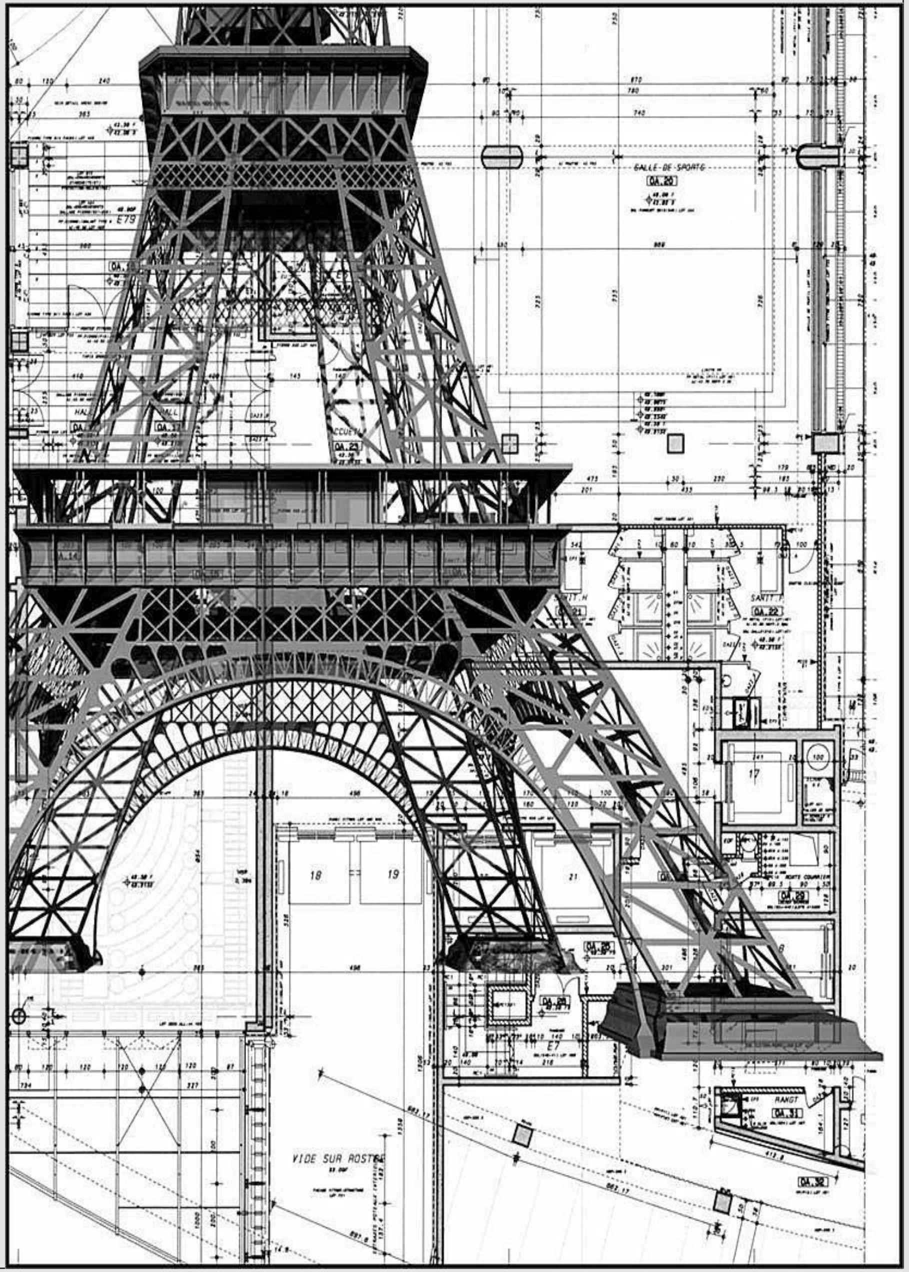
Detalhe dos apoios da cobertura
(fotografia de Nayra Tais Savordelli)

Detalhe de um dos apoios da cobertura
(fotografia de Nayra Tais Savordelli)

TRELIÇAS

- **São estruturas reticuladas (formadas por barras)**
- **Todas as barras são articuladas nas duas extremidades**
- **Os carregamentos são aplicados apenas nos nós da estrutura**
- **As barras são solicitadas apenas por força normal, constante ao longo do seu eixo**
- **Principais classificações:**
  - **Disposição: Planas/espaciais**
  - **Estaticidade: hipostáticas/isostáticas/hiperestáticas**
  - **Formação: Simples/compostas/complexas**
  - **Métodos de resolução:**

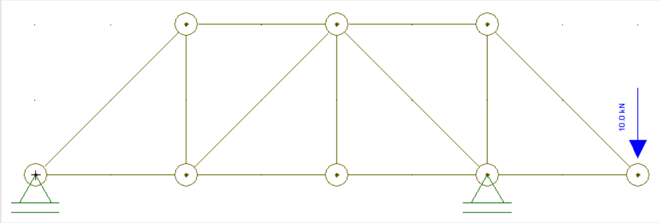
    Equilíbrio dos Nós e Método de Ritter



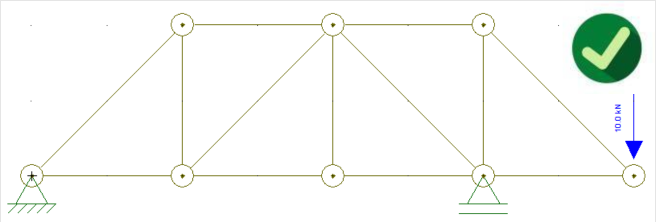
ESTATICIDADE

- r + b < 2n hipostática
  Pode apresentar movimento
- r + b = 2n isostática (condição necessária mas não suficiente, podendo ser hipostática)
  Não pode apresentar movimento, mas se torna hipostática com a liberação de qualquer vínculo
- r + b > 2n hiperestática (condição necessária mas não suficiente, podendo ser hipostática)
  Não pode apresentar movimento, e pode ter vinculações suprimidas sem se tornar hipostática

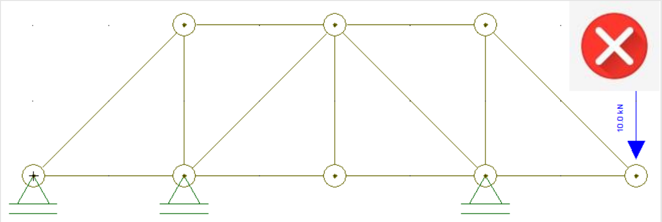
- r – número de reações externas
- b – número de barras
- n – número de nós



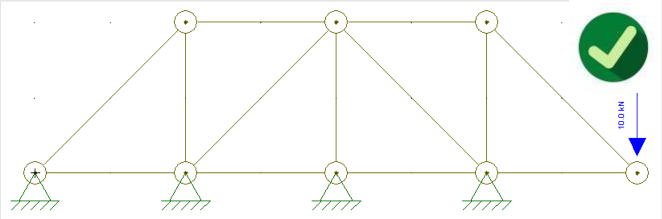
r = 2 b = 13 n = 8



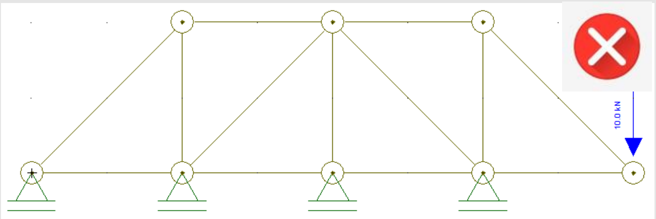
r = 3 b = 13 n = 8



r = 3 b = 13 n = 8



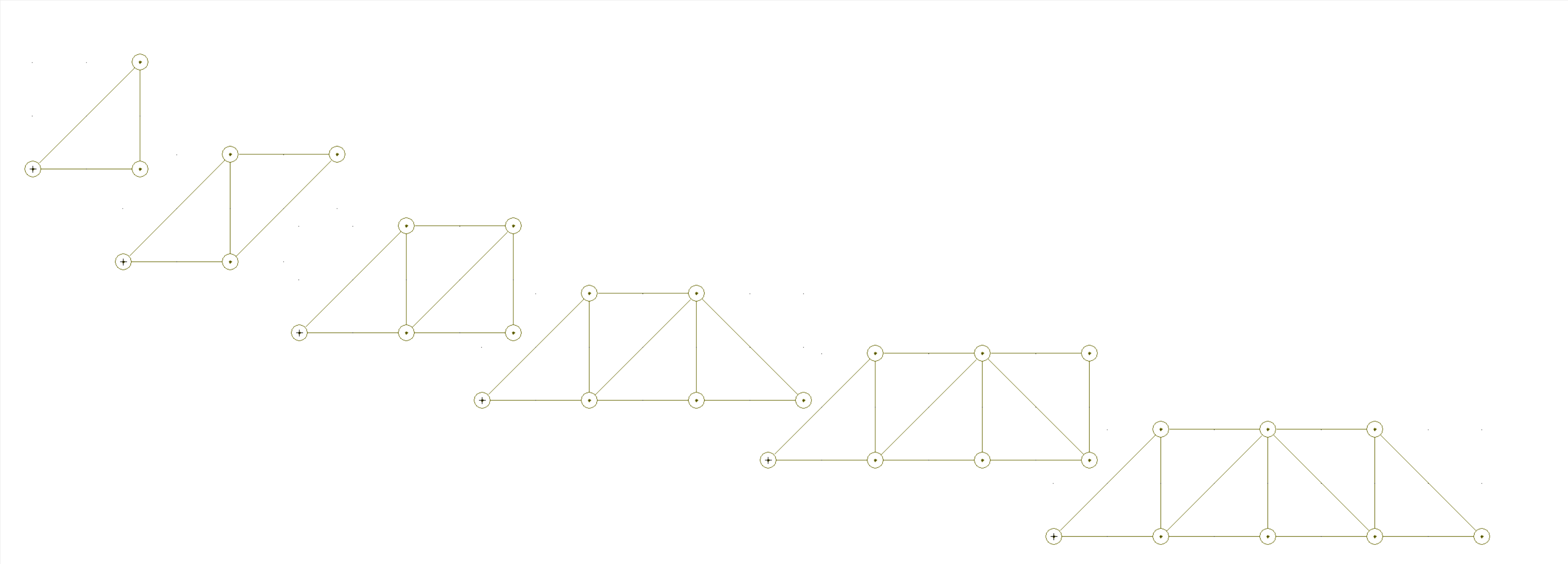
r = 8 b = 13 n = 8



r = 4 b = 13 n = 8

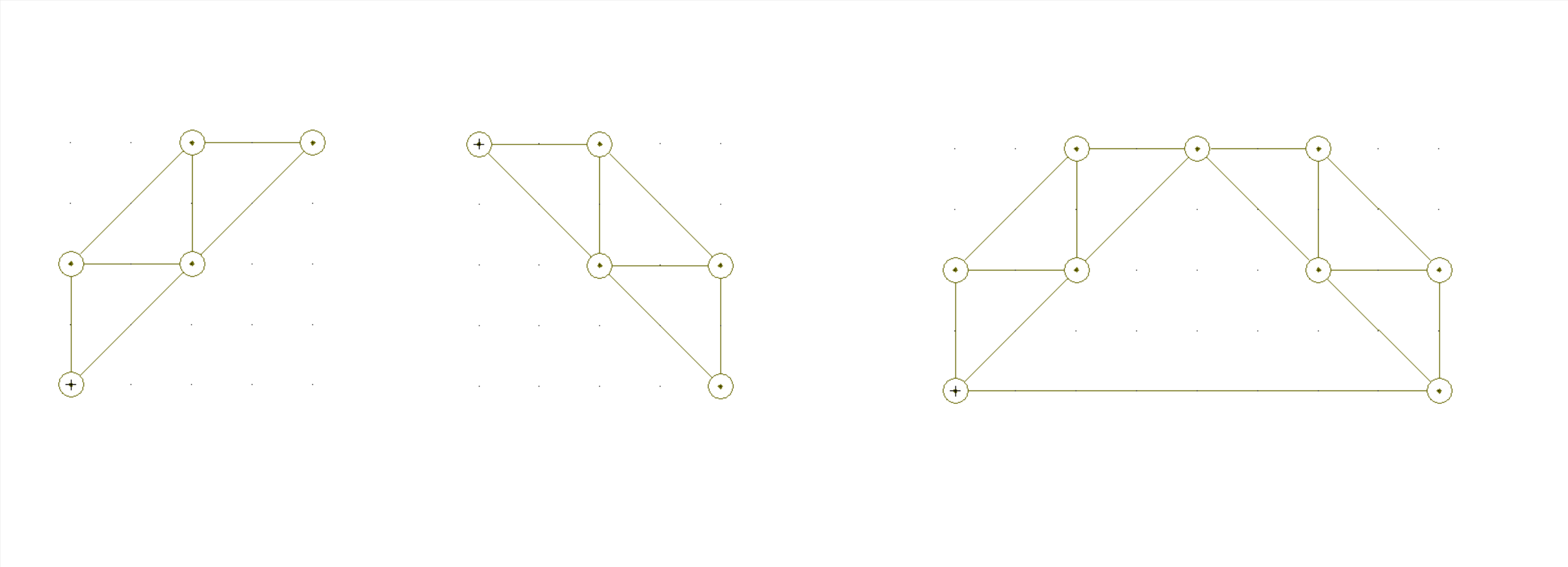
TRELIÇAS SIMPLES

- **São formadas a partir de um triângulo de barras, adicionando sucessivamente duas barras e um nó**



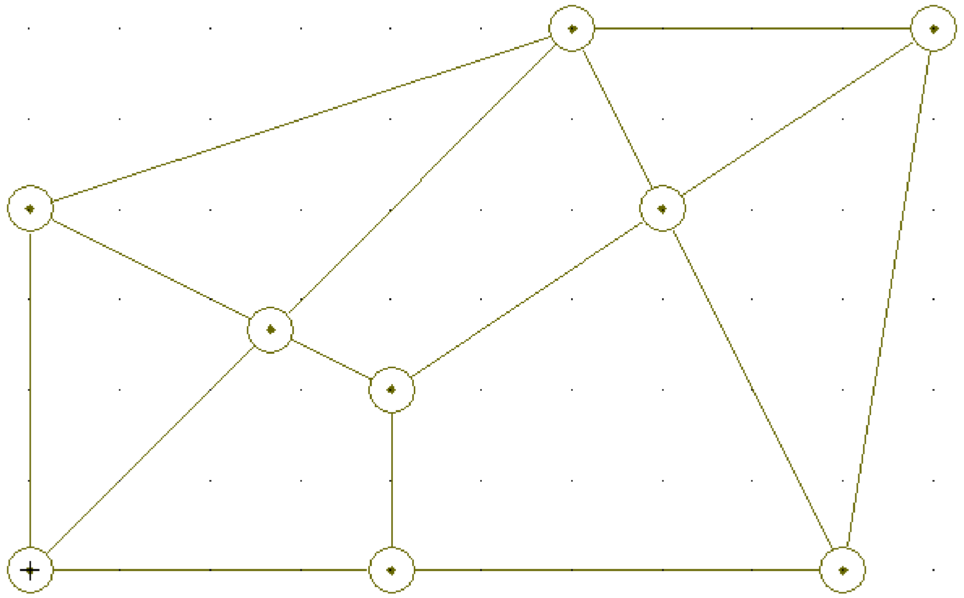
TRELIÇAS COMPOSTAS

- São compostas por treliças simples, ligadas entre si por nós ou barras



TRELIÇAS COMPLEXAS

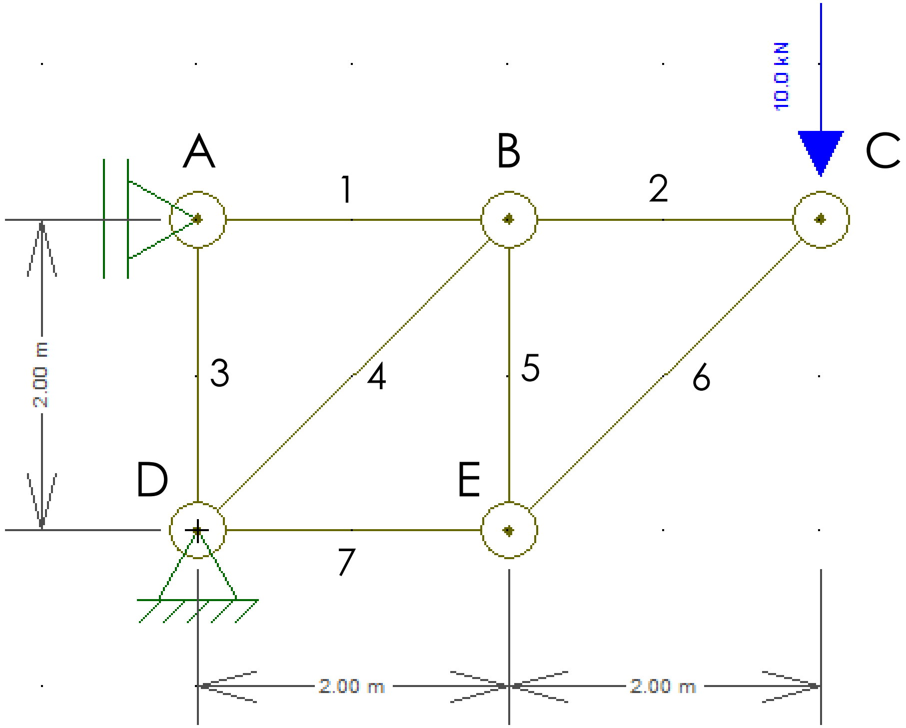
- Por exclusão



MÉTODO DO EQUILÍBRIO DOS NÓS

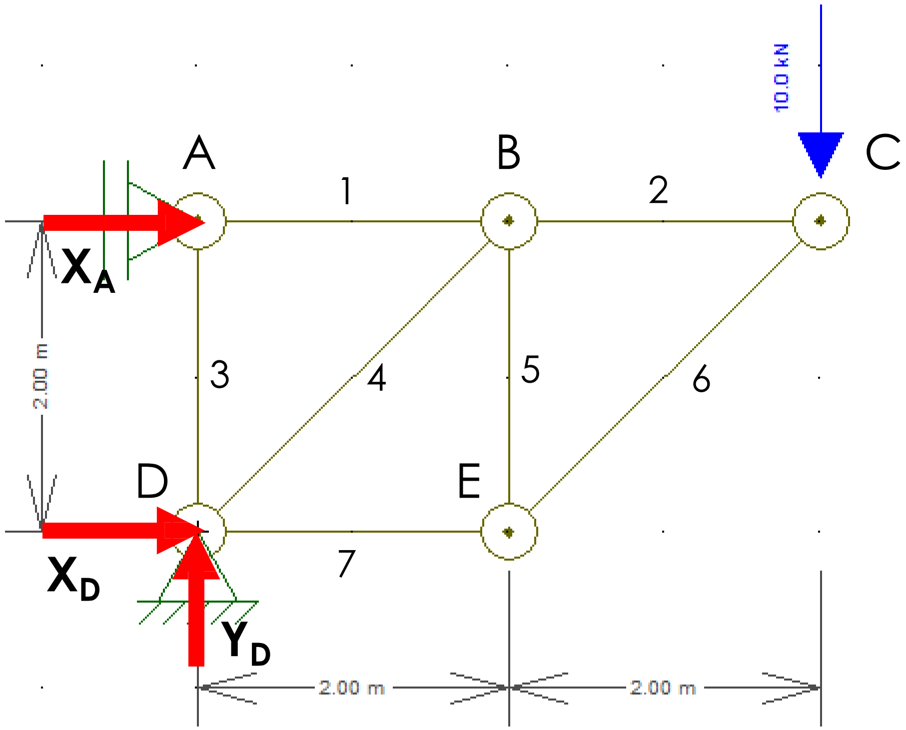
- Considerar como incógnitas os esforços normais nas barras
- Se a estrutura está em equilíbrio, então seus nós também estão em equilíbrio
- Apenas duas equações de equilíbrio podem ser aplicadas para cada nó, por ser articulado nas barras
- Em treliças simples isostáticas, é possível explicitar as incógnitas uma a uma pelo equilíbrio dos nós
- Procedimento:
  - Cálculo das reações de apoio, utilizando as três equações de equilíbrio, considerando a treliça como corpo rígido
  - Cálculo sucessivo dos esforços nas barras, através do equilíbrio dos nós em que houver apenas duas incógnitas
  - No final da resolução, surgem três equações de verificação

Para os nós:
$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$



Exemplo 1

Calcule os esforços nas barras da treliça ilustrada.



Reações de apoio

$\Sigma F_y = 0$

$Y_D - 10 = 0$

$Y_D = 10 \text{ kN}$

$\Sigma M_D = 0$

$- X_A * 2 - 10 * 4 = 0$

$X_A = - 20 \text{ kN}$

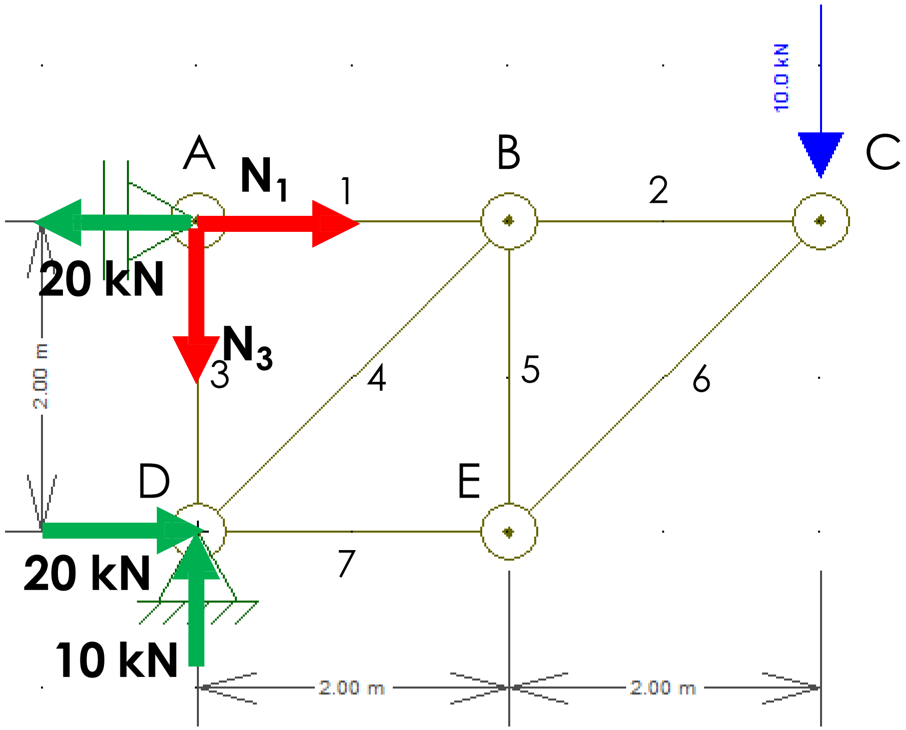
$\Sigma F_x = 0$

$X_A + X_D = 0$

$- 20 + X_D = 0$

$X_D = 20 \text{ kN}$

GRINTER



Equilíbrio do nó A

$\Sigma F_x = 0$

$N_1 - 20 = 0$

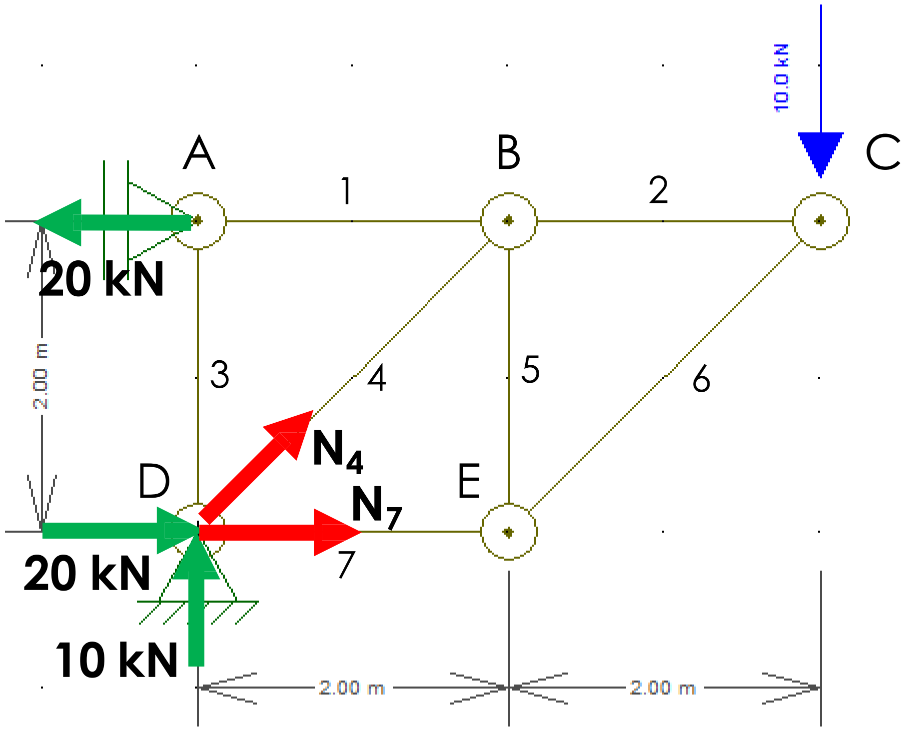
$N_1 = 20\text{ kN}$

$\Sigma F_y = 0$

$-N_3 = 0$

$N_3 = 0$

GRINTER



Equilíbrio do nó D

$\Sigma F_y = 0$

$N_4 * sen45 + 10 = 0$

$N_4 = - 14,1 \text{ kN}$

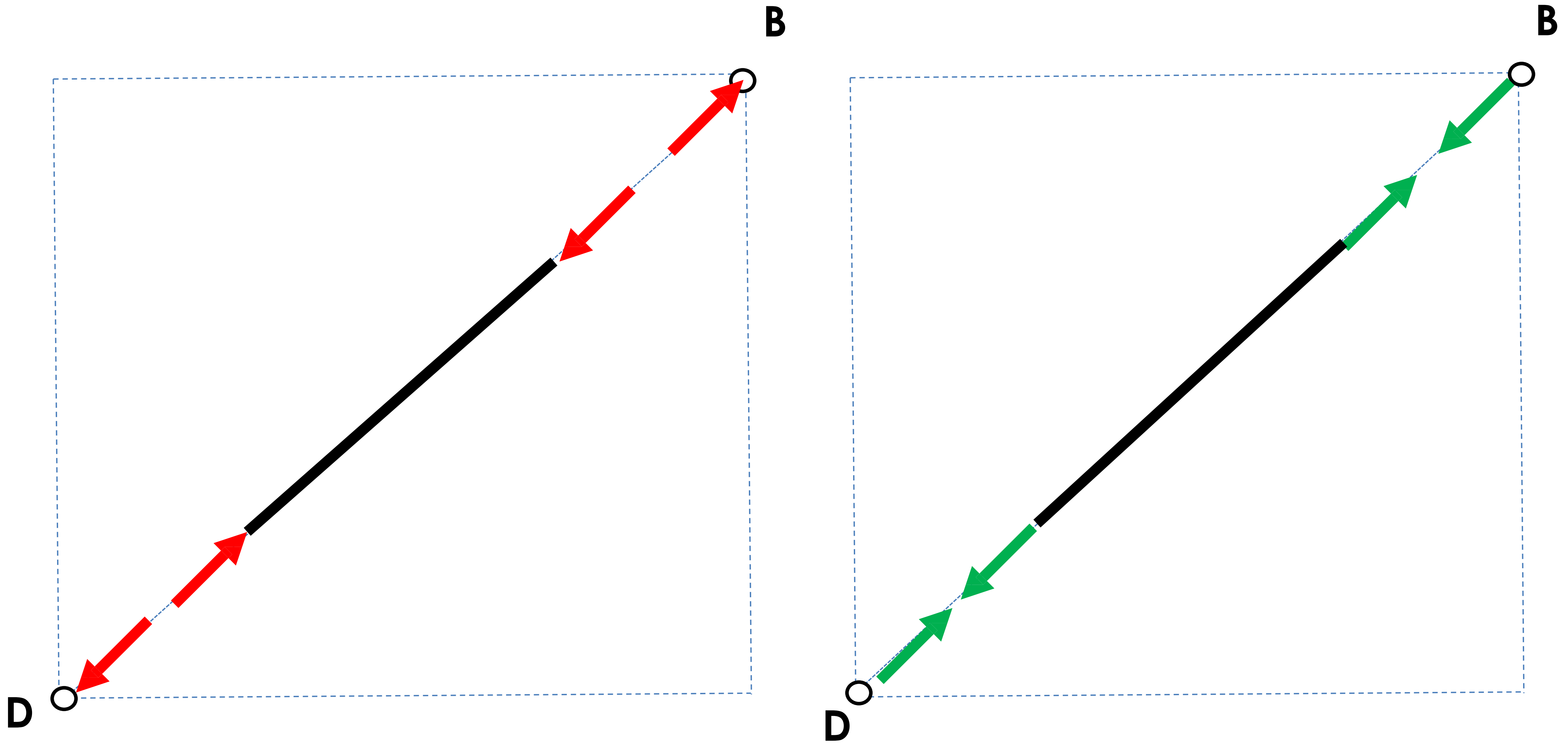
$\Sigma F_x = 0$

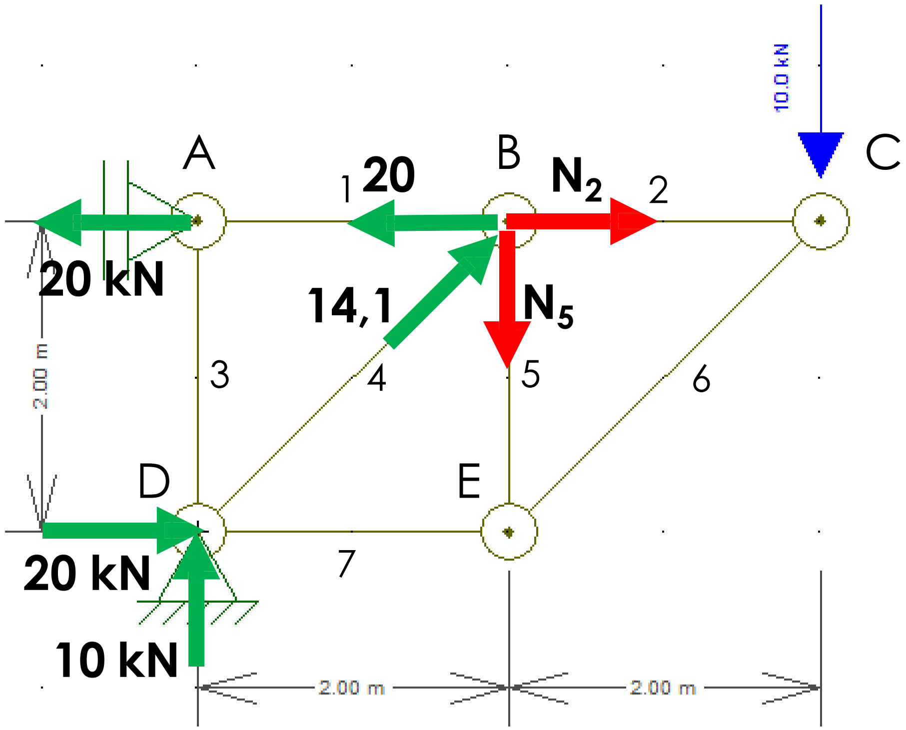
$N_7 + 20 + N_4 * cos45 = 0$

$N_7 + 20 - 10 = 0$

$N_7 = - 10 \text{ kN}$

GRINTER


B
D
B
D



Equilíbrio do nó B

$\Sigma F_y = 0$

$- N_5 + 14{,}1 * sen45 = 0$

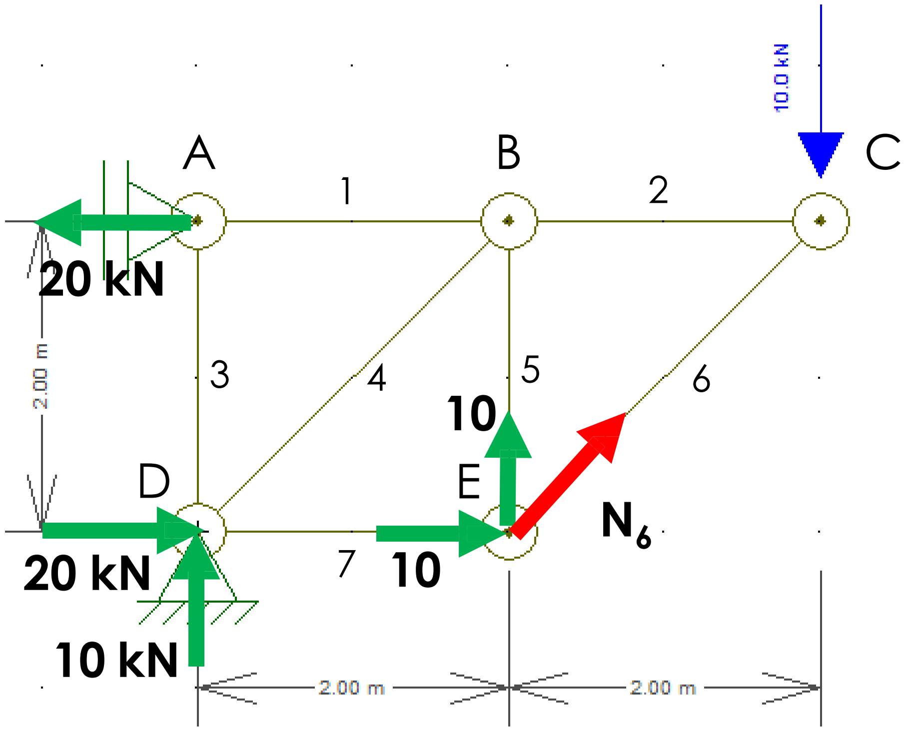
$N_5 = 10\ kN$

$\Sigma F_x = 0$

$N_2 - 20 + 14{,}1 * cos45 = 0$

$N_2 - 10 = 0$

$N_2 = 10\ kN$



Equilíbrio do nó E

$\Sigma F_y = 0$

$N_6 * sen45 + 10 = 0$

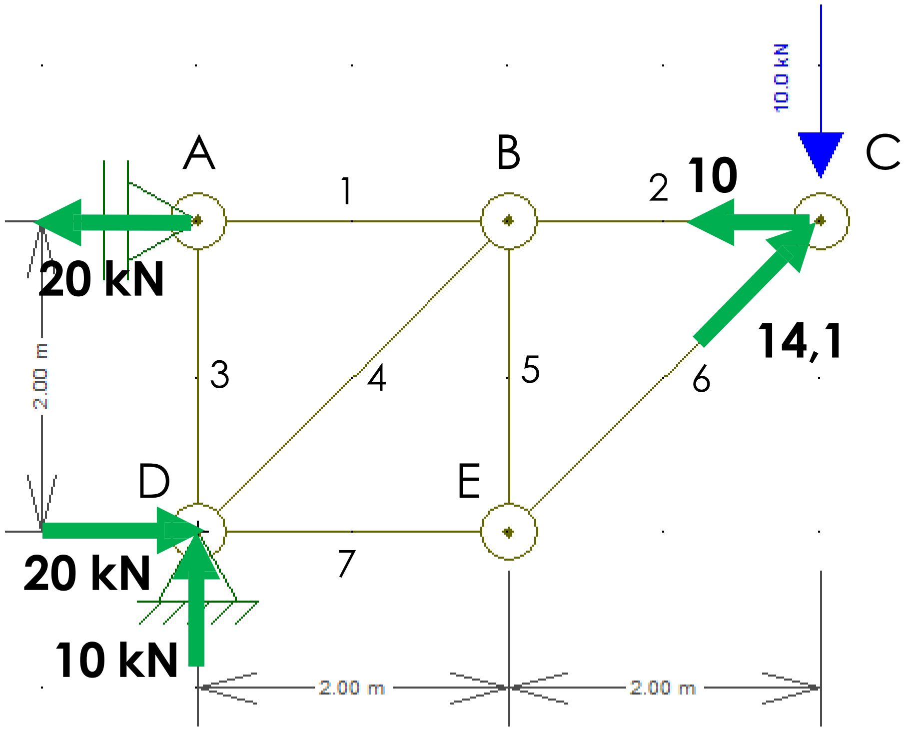
$N_6 = -14{,}1\ kN$

Verificação 1

$\Sigma F_x = 0$

$N_6 * cos45 + 10 = 0$

$-10 + 10 = 0$ OK



Equilíbrio do nó C

Verificação 2

$\Sigma F_y = 0$

14,1 * sen45 - 10 = 0

10 – 10 = 0 OK

Verificação 3

$\Sigma F_x = 0$

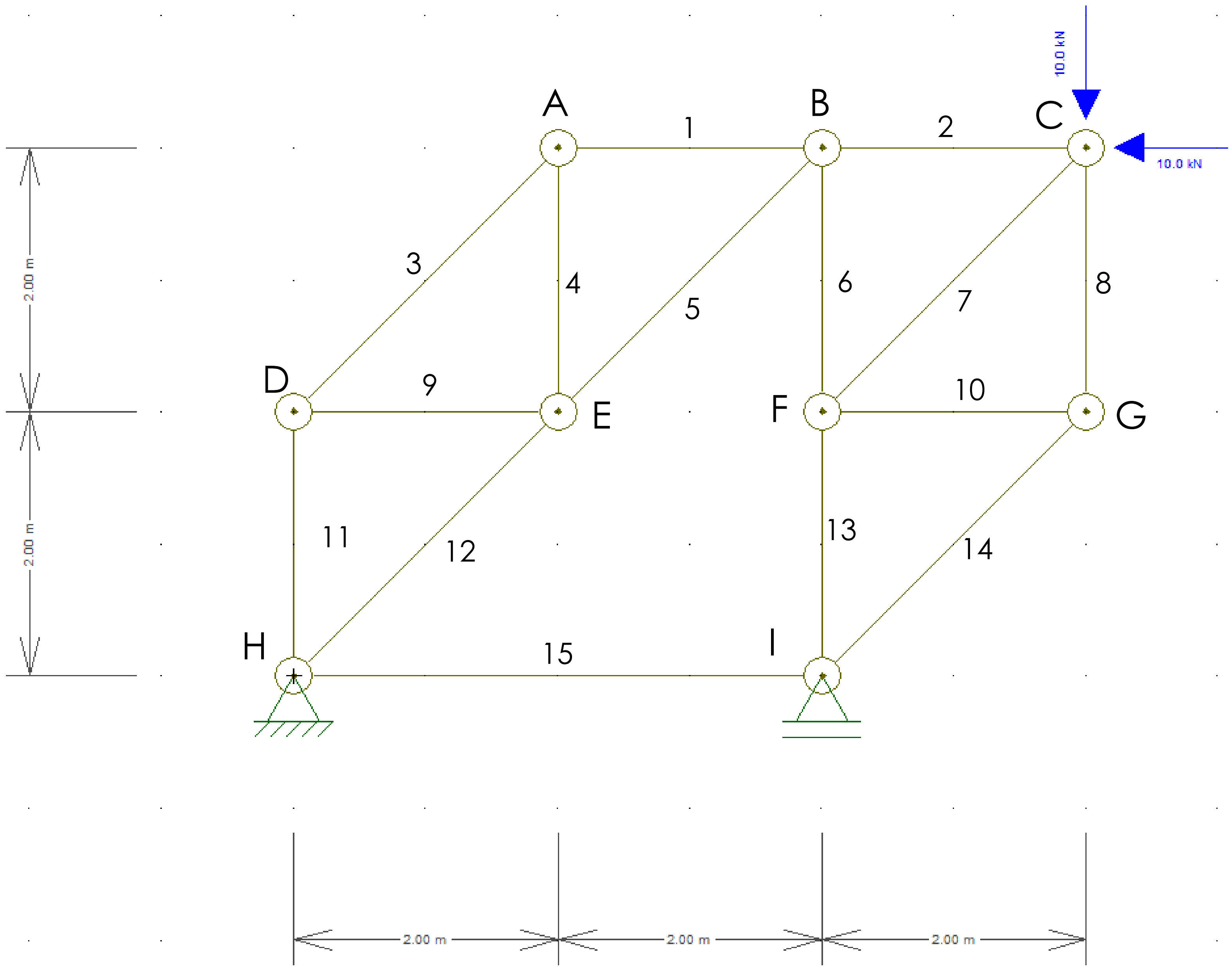
14,1 * cos45 - 10 = 0

10 - 10 = 0 OK

MÉTODO DE RITTER

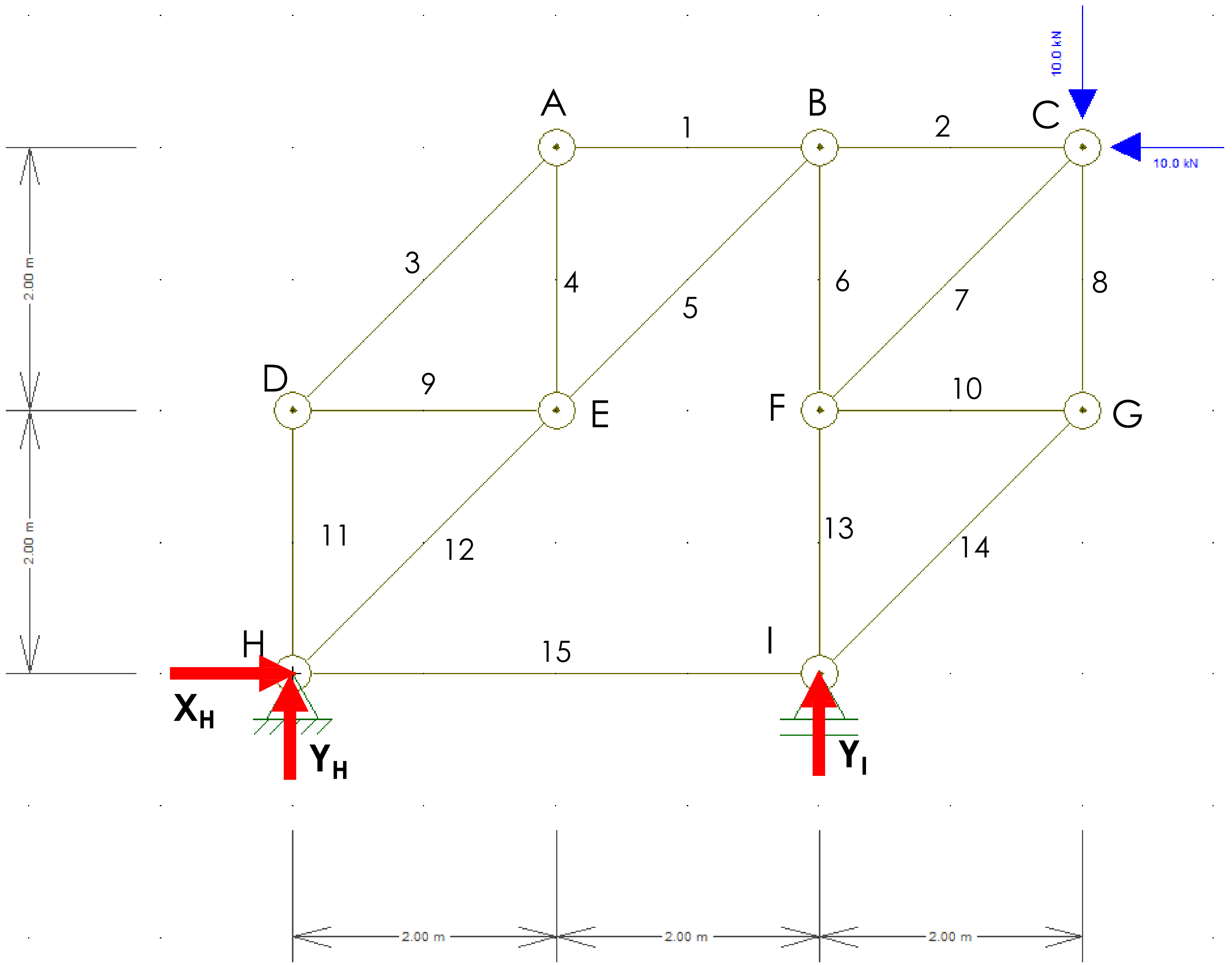
Para partes da estrutura: $\Sigma\ F_x = 0$ $\Sigma\ F_y = 0$ $\Sigma\ M_O = 0$

- Considerar como incógnitas os esforços normais nas barras
- Se a estrutura está em equilíbrio, então qualquer parte desta estrutura, separada por um corte imaginário, também está em equilíbrio
- Para uma parte da estrutura que contenha pelo menos dois nós, as três equações de equilíbrio no plano podem ser aplicadas
- Em treliças simples ou compostas, é comum encontrar uma linha de corte ("corte de Ritter") que explicite três incógnitas, que podem ser obtidas através do equacionamento do equilíbrio de uma das partes da treliça, destacada pelo corte
- É comum mesclar o Método de Ritter com o Método do Equilíbrio dos Nós, explicitando as incógnitas de forma conveniente
- Procedimento:
  - Cálculo das reações de apoio, utilizando as três equações de equilíbrio, considerando a treliça como corpo rígido
  - Corte da treliça em duas partes contendo pelo menos dois nós cada uma, com uma linha de corte que atravesse três barras
  - Cálculo dos esforços nas três barras onde houve o corte, através do equacionamento do equilíbrio de uma das partes cortadas
  - Em seguida, pelo Método dos Nós, cálculo sucessivo dos esforços das barras, através do equilíbrio dos nós em que houver apenas duas incógnitas



Exemplo 2

Calcule os esforços nas barras 1, 5 e 15 da treliça ilustrada.



Reações de apoio

$\Sigma F_x = 0$

$X_H - 10 = 0$

$X_H = 10\ kN$

$\Sigma M_H = 0$

$Y_I * 4 + 10 * 4 - 10 * 6 = 0$

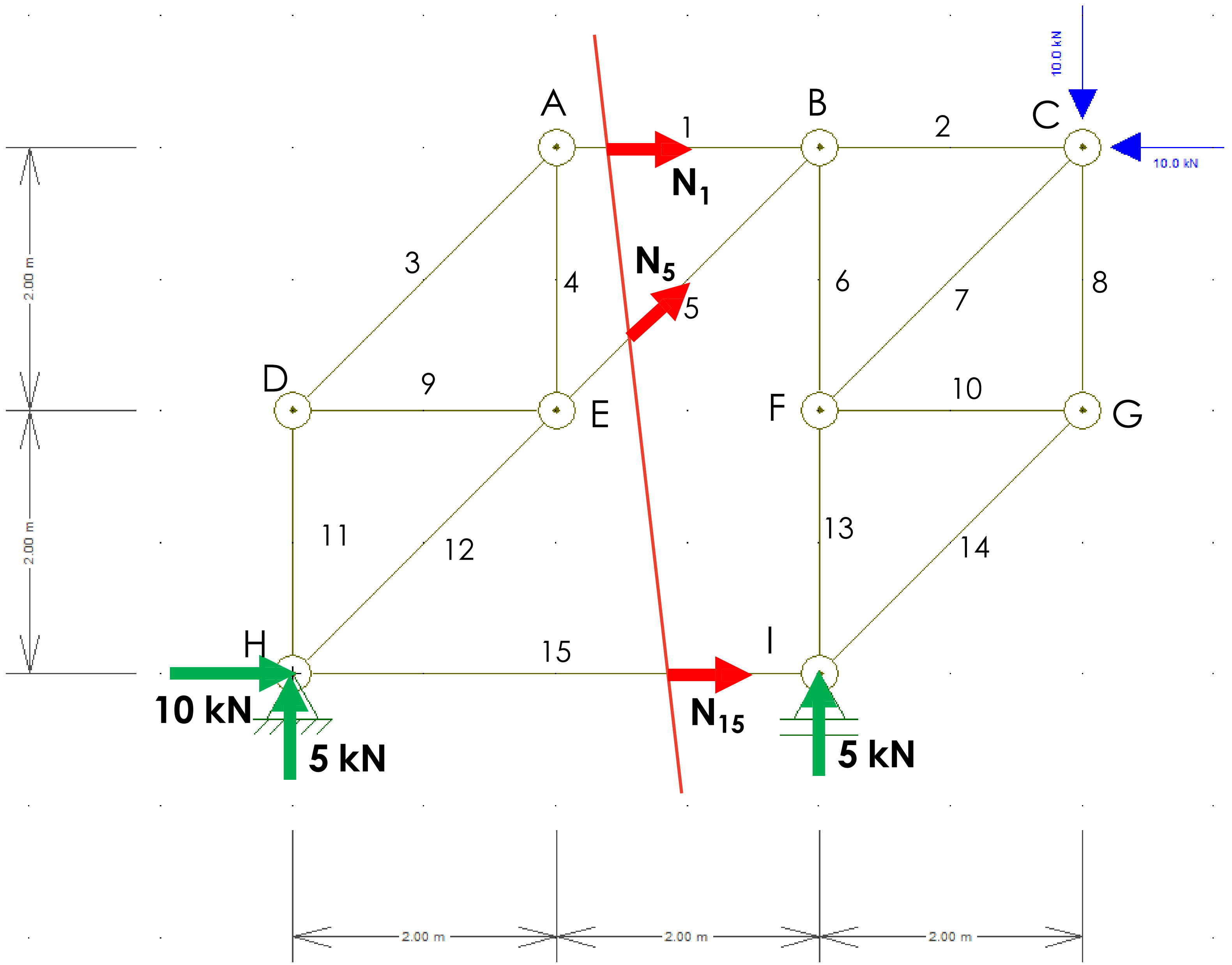
$Y_I = 5\ kN$

$\Sigma F_y = 0$

$Y_H - 10 + Y_I =$

$0 \quad Y_H - 10 + 5$

$= 0 \quad Y_H = 5\ kN$



Corte de Ritter

Equilíbrio da parte esquerda da treliça:

$\Sigma F_y = 0$

$N_5 * sen45 + 5 = 0$

$N_5 = -7{,}1 \text{ kN}$

$\Sigma M_H = 0$

GRINTER +

$-N_1 * 4 = 0$

$N_1 = 0$

$\Sigma F_x = 0$

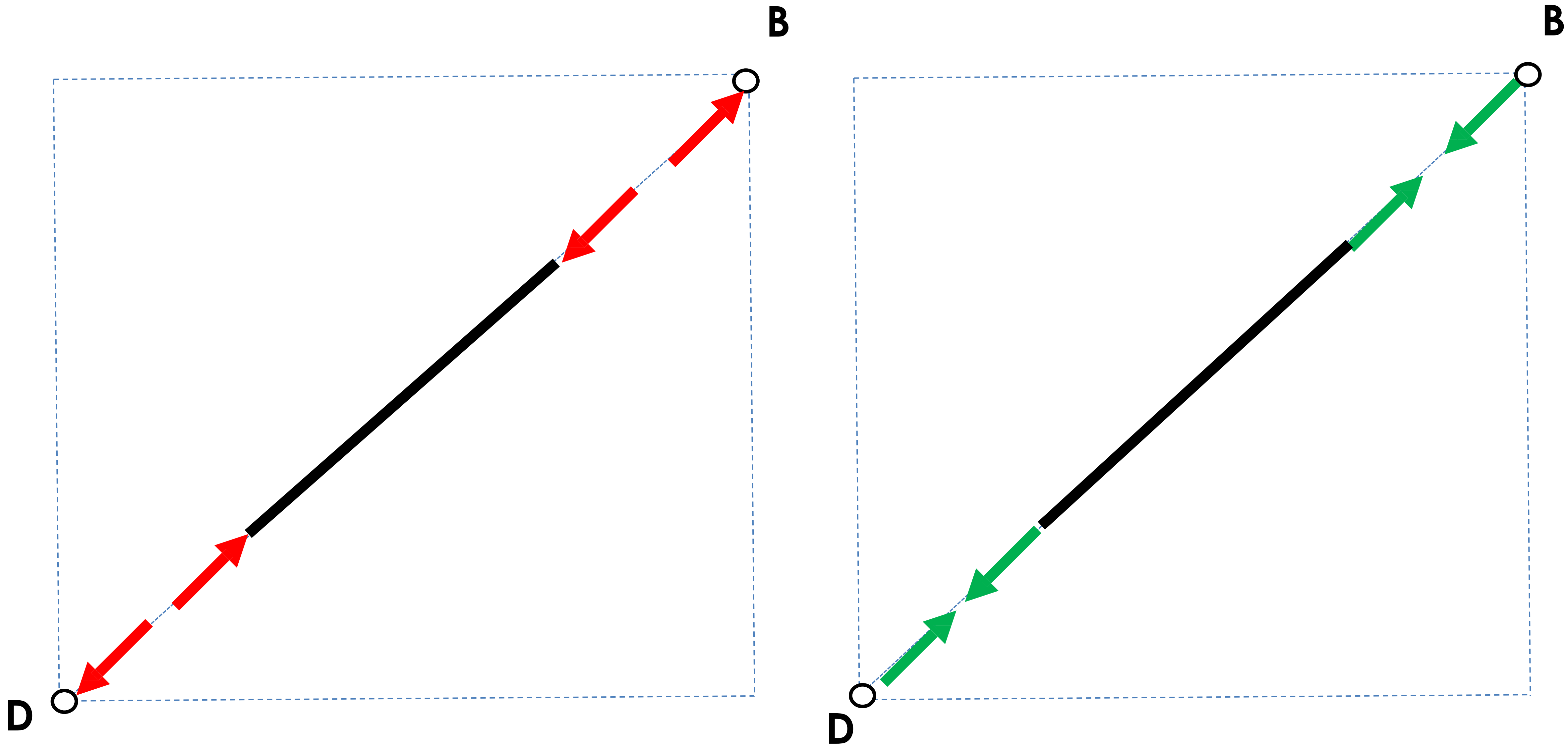
$N_1 + N_5 * \cos 45 + N_{15} + 10 = 0$

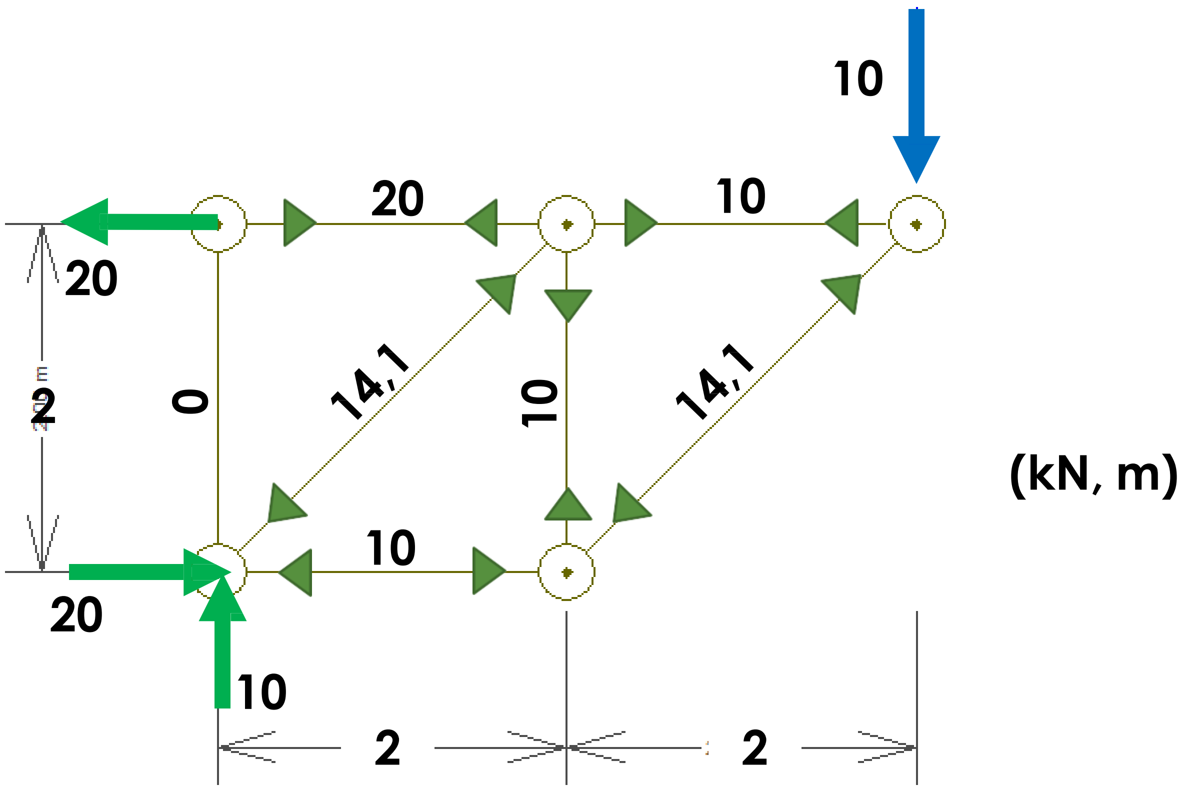
$0 - 7{,}1 * \cos 45 + N_{15} + 10 = 0$

$N_{15} = -5 \text{ kN}$

REPRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

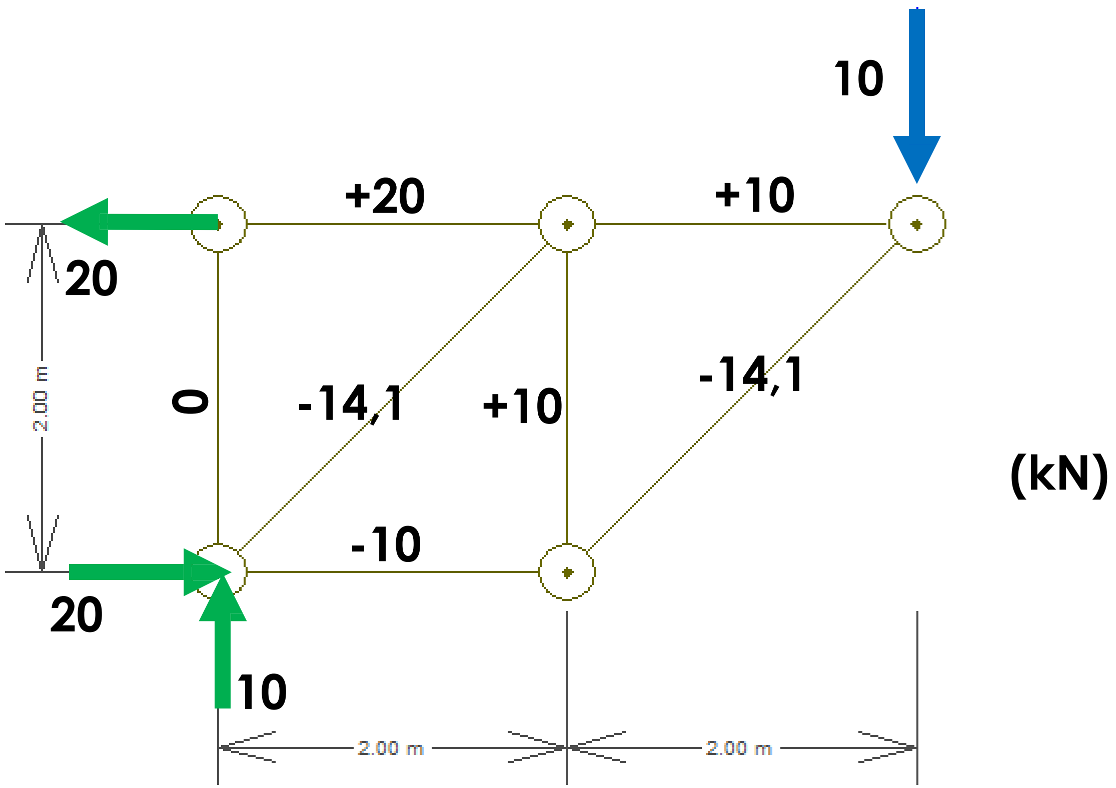
- Existem diversas formas de representar os resultados da resolução de treliças, gráficas ou tabeladas
- Quando tabeladas, deve-se respeitar a convenção de sinal (N positivo = tração)
- Uma forma de representação que auxilia no entendimento intuitivo, na verificação visual e até na resolução, é a que segue:
  - Desenhe a treliça respeitando as proporções, como corpo livre, indicando apenas seus nós, barras e cotas
  - Indique ao lado da figura a unidade de força que será utilizada
  - Indique as forças externas ativas e reativas nos nós onde ocorrerem, com seu sentido físico e valor
  - Nas duas extremidades de cada barra, junto aos nós, indique pontas de setas que mostrem o sentido físico da força aplicada no nó (atenção: é comum ocorrer confusão neste ponto, pois o esforço no nó é inverso ao esforço na barra)
  - Junto à barra, indique o valor que corresponde à força normal com que está solicitada
  - Desta forma, é rápido e intuitivo ver e verificar o equilíbrio nó por nó
- Em casos simples, é possível acelerar a resolução do equilíbrio dos nós de forma segura por desta representação gráfica, com contas rápidas, apoiadas pelo entendimento físico dos sentidos e projeções das forças


B
D
B
D



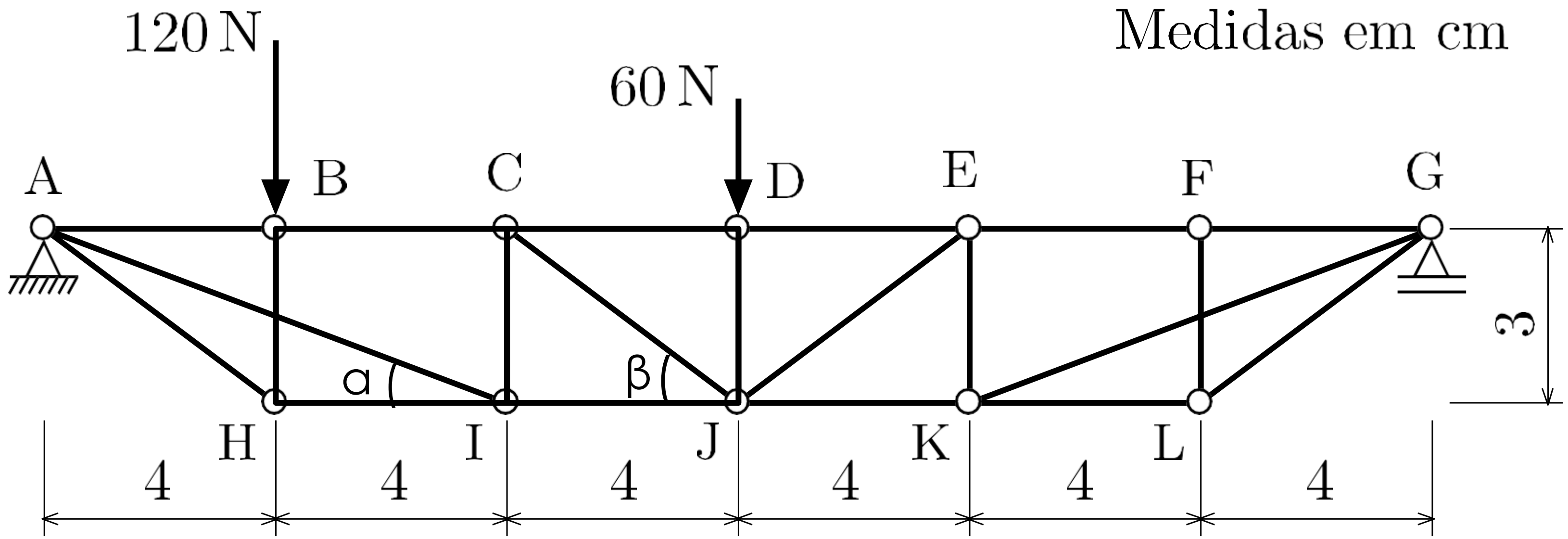
Exemplo

Representação dos resultados do exemplo do Método do Equilíbrio dos Nós.



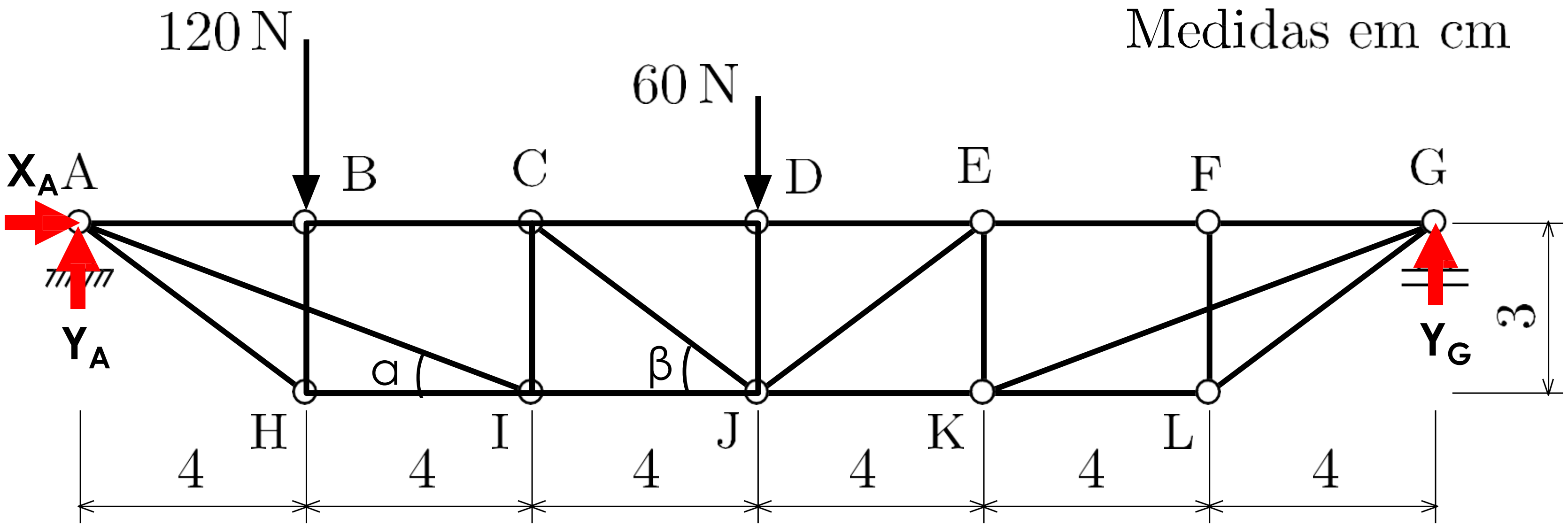
Exemplo

Representação dos resultados do exemplo do Método do Equilíbrio dos Nós.



Exemplo 3

Na treliça plana da figura, o carregamento é formado por duas forças verticais aplicadas em B e D. Adotando sena = 0,4; cosa = 0,9; senβ = 0,6; cosβ = 0,8, determine a reação no apoio A e as forças normais nas barras AI e HI.



Reações em A

$\Sigma F_x = 0$

$X_A = 0$

$\Sigma M_G = 0$

$- Y_A * 24 + 120 * 20 + 60 * 12 = 0$

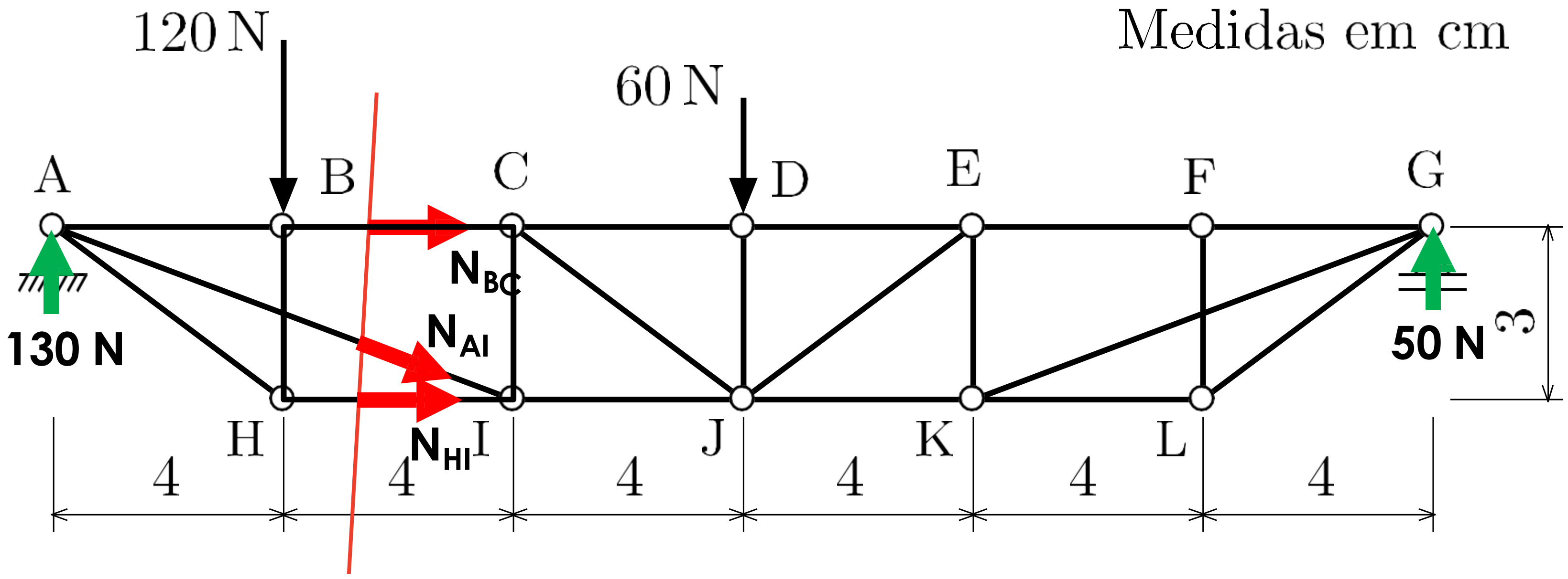
$Y_A = 130\ N$

$\Sigma F_Y = 0$

$Y_G + Y_A - 120 - 60 = 0$

$Y_G + 130 - 120 - 60 = 0$

$Y_G = 50\ N$



Corte de Ritter

Equilíbrio da parte esquerda da treliça:

$\Sigma F_y = 0$

$130 - 120 - N_{AI} * \text{sen}a = 0$

$10 - N_{AI} * 0{,}4 = 0$

$N_{AI} = 25\ N$

$\Sigma M_A = 0$

$N_{HI} * 3 - 120 * 4 = 0$

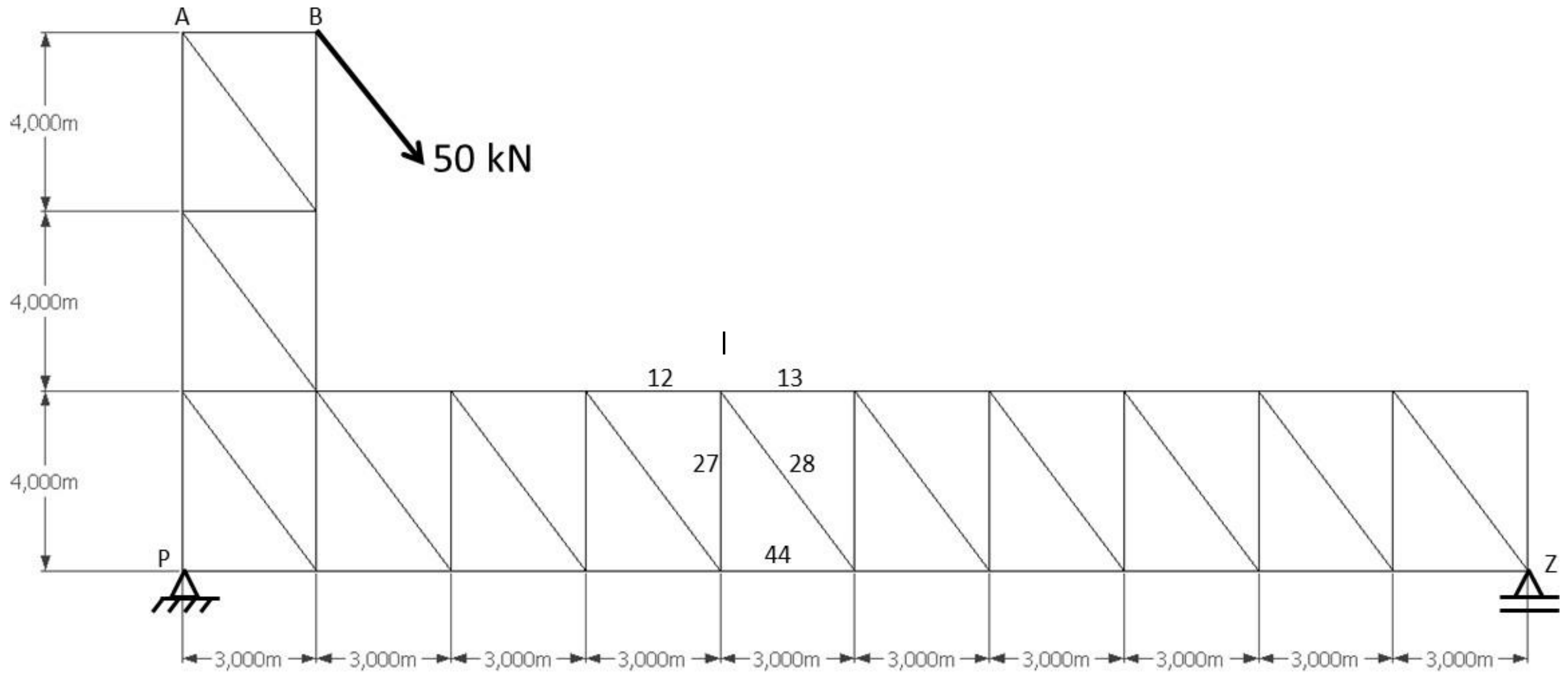
$N_{HI} = 160\ N$

$\Sigma F_x = 0$

$N_{BC} + N_{AI} * \cos a + N_{HI} = 0$

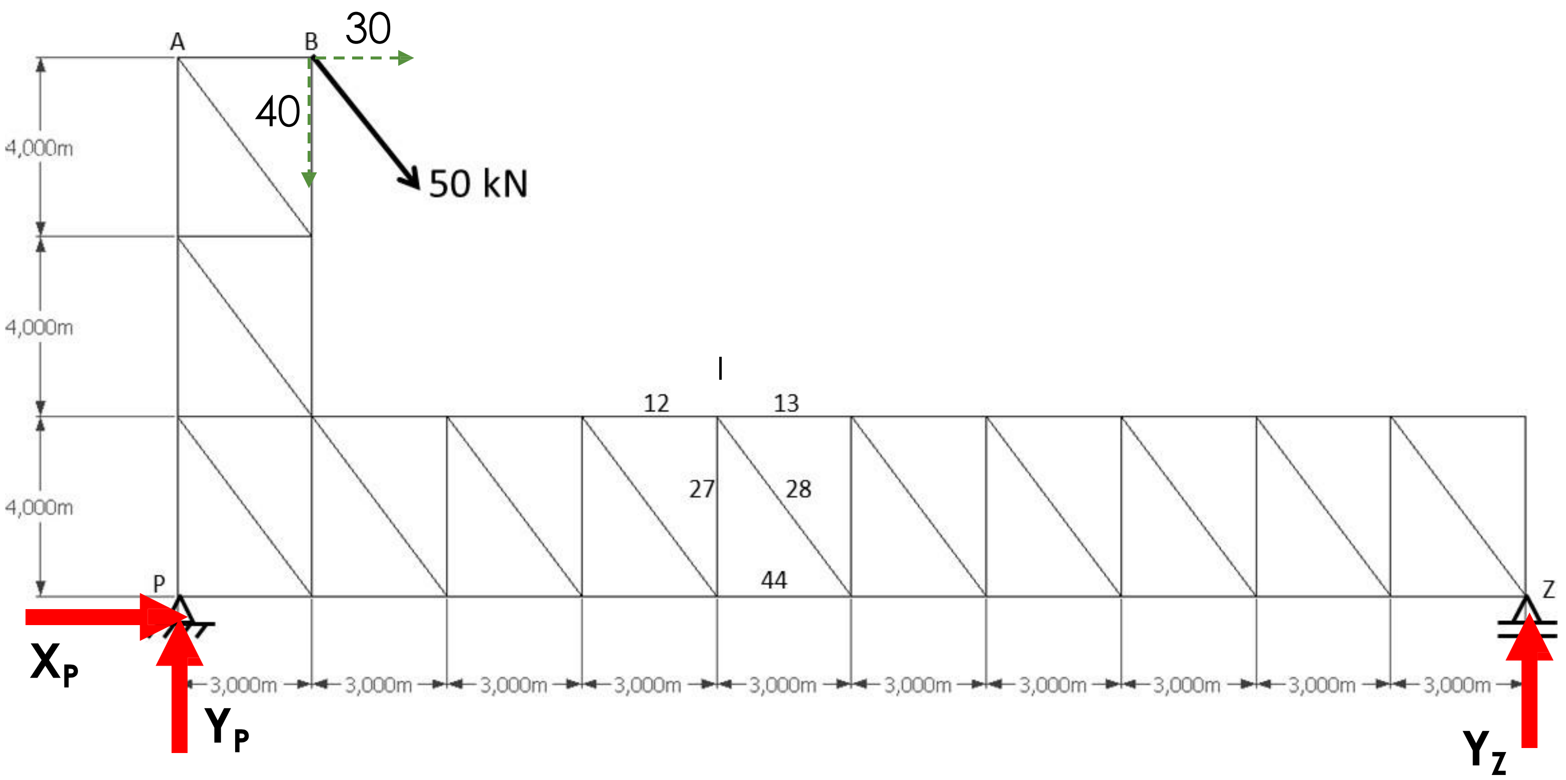
$N_{BC} + 25 * 0{,}9 + 160 = 0$

$N_{BC} = -\ 182{,}5\ kN$



Exemplo 4

Para a treliça da figura, calcule as forças normais nas barras 12, 13, 27, 28 e 44. A força de 50kN ilustrada está aplicada no ponto B e é paralela à barra 28.



Reações de apoio

$\Sigma M_P = 0$

$Y_Z * 30 - 30 * 12 - 40 * 3 = 0$

$Y_Z = 16 \text{ kN}$

$\Sigma F_y = 0$

$Y_P - 40 + Y_Z = 0$

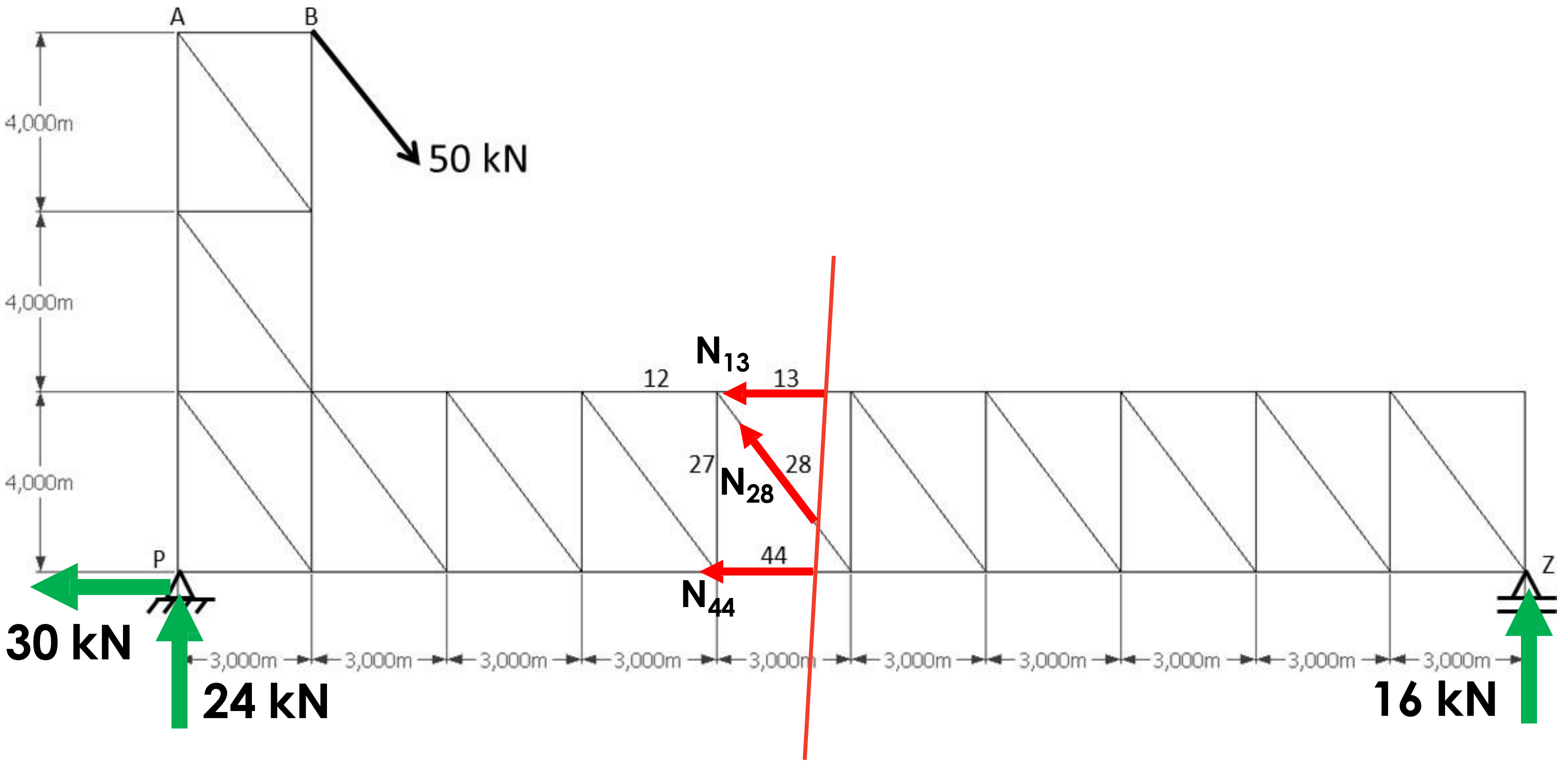
$Y_P - 40 + 16 = 0$

$Y_P = 24 \text{ kN}$

$\Sigma F_x = 0$

$X_P + 30 = 0$

$X_P = - 30 \text{ kN}$



Corte de Ritter

Equilíbrio da parte direita da treliça:

$\Sigma F_y = 0$

$N_{28} * \text{sen}a + 16 = 0$

$N_{28} * 4/5 + 16 = 0$

$N_{28} = -20 \text{ kN}$

$\Sigma M_I = 0$

$-N_{44} * 4 + 16 * 18 = 0$

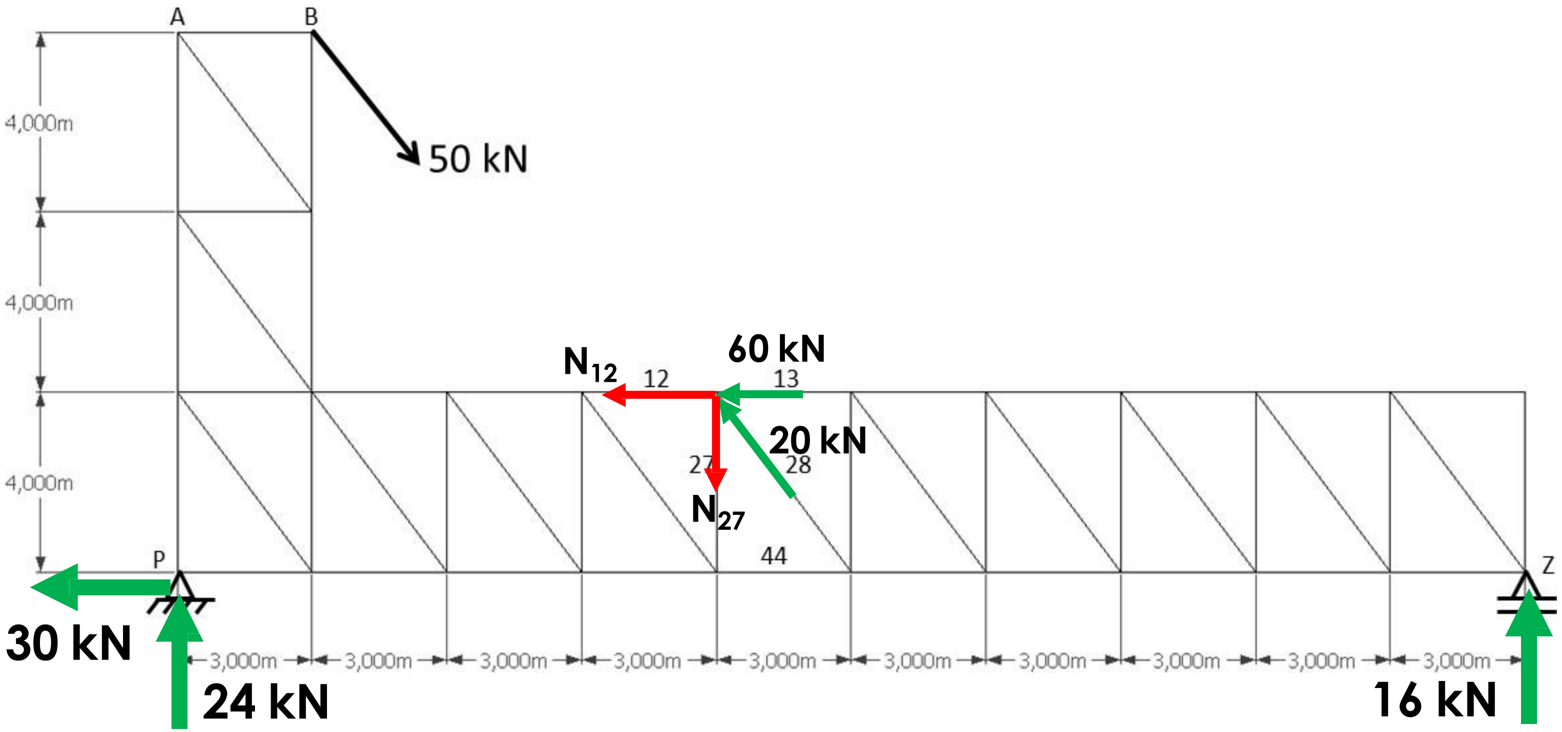
$N_{44} = 72 \text{ kN}$

$\Sigma F_x = 0$

$-N_{13} - N_{28} * \cos a - N_{44} = 0$

$-N_{13} + 20 * 3/5 - 72 = 0$

$N_{13} = -60 \text{ kN}$



Equilíbrio do nó I

$\Sigma F_y = 0$

$- N_{27} + 20 * \text{sena} = 0$

$- N_{27} + 20 * 4/5 = 0$

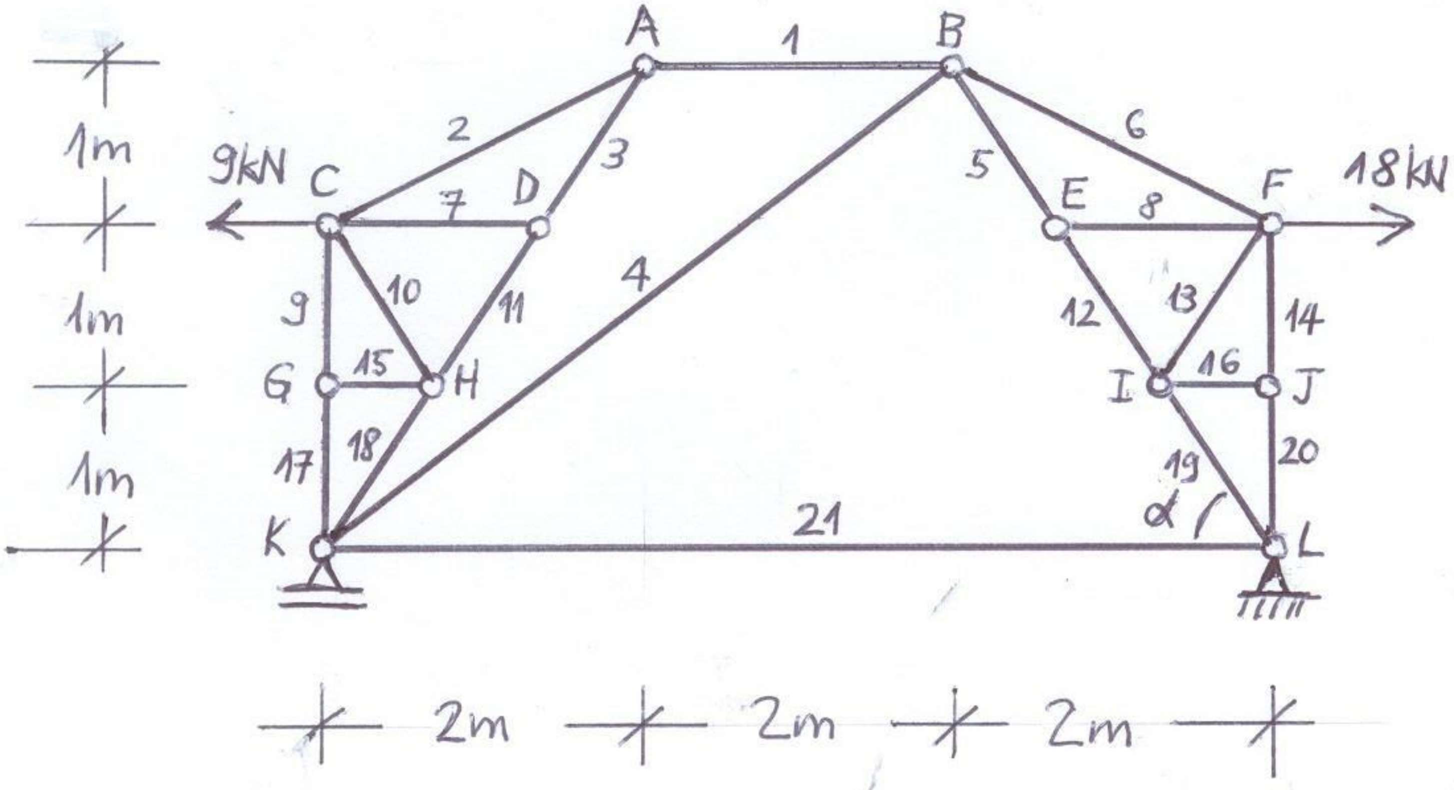
$N_{27} = 16 \text{ kN}$

$\Sigma F_x = 0$

$- N_{12} - 20 * \text{cosa} - 60 = 0$

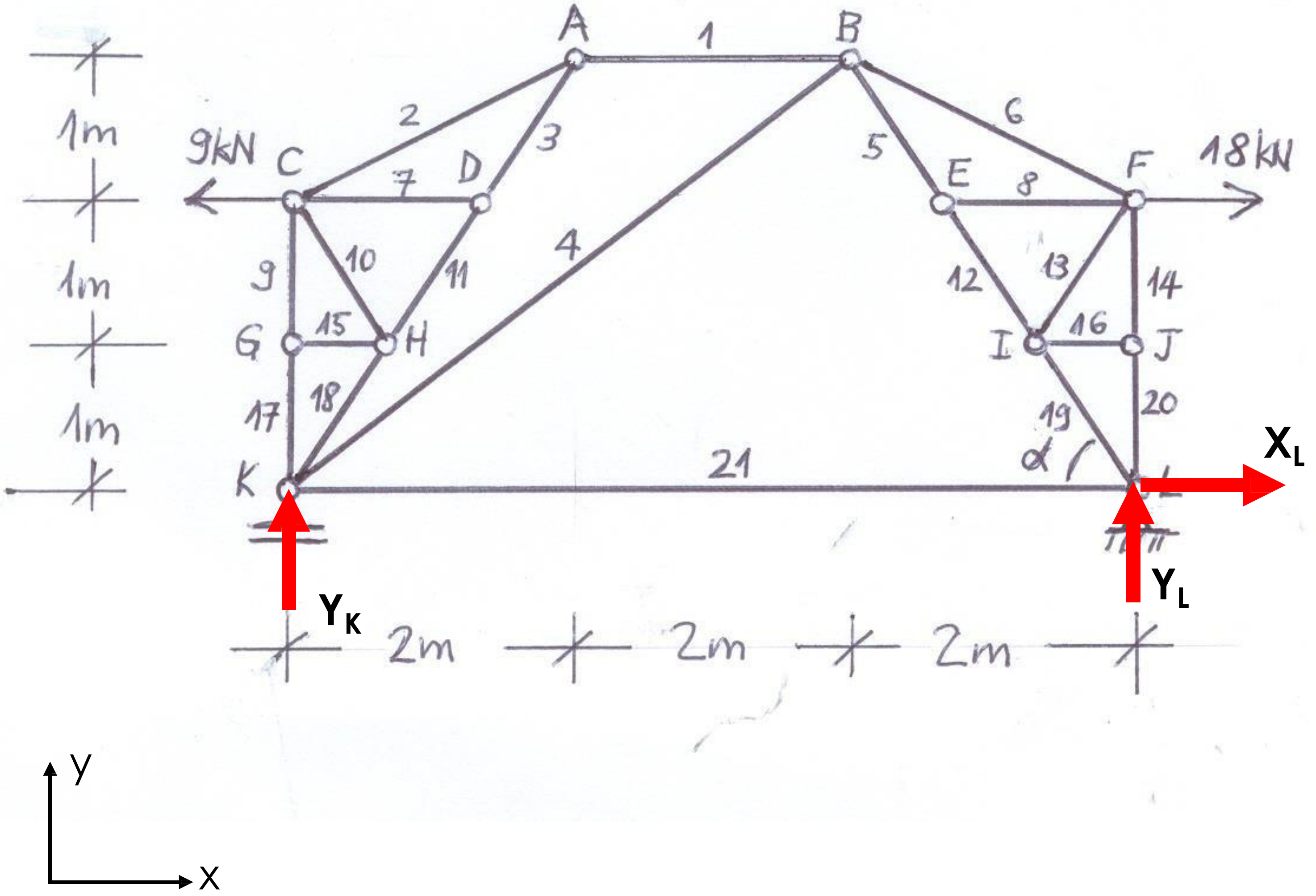
$- N_{12} - 20 * 3/5 - 60 = 0$

$N_{12} = - 72 \text{ kN}$



Exemplo 5

Calcule os esforços nas barras 1, 19, 20 e 21 da treliça ilustrada. Dados: a=56,31˚, cosa=0,555; sena=0,832



Reações de apoio

$\Sigma F_x = 0$

$X_L + 18 - 9 = 0$

$X_L = - 9\ kN$

$\Sigma M_K = 0$

$Y_L * 6 + 9 * 2 - 18 * 2 = 0$

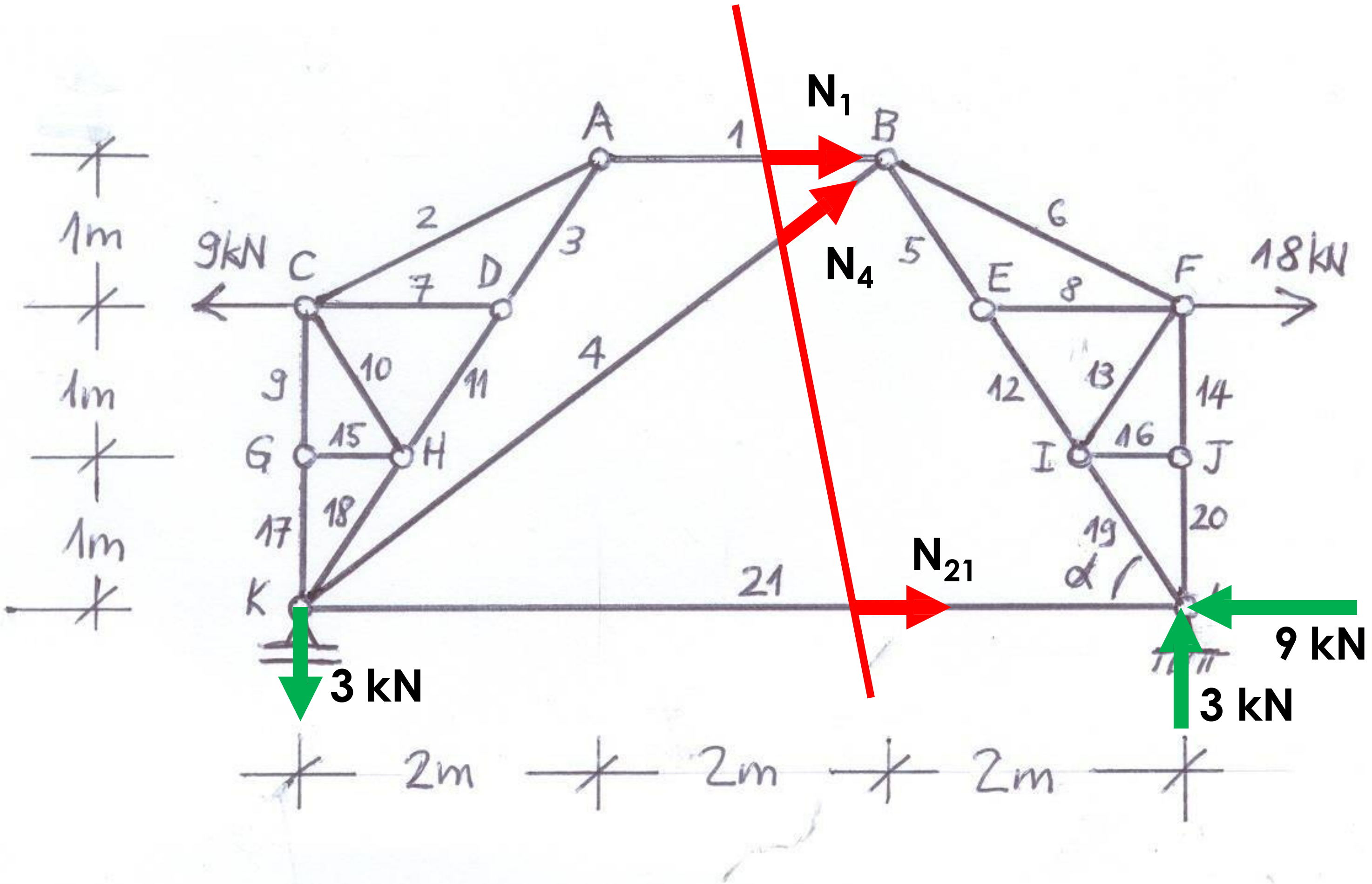
$Y_L = 3\ kN$

$\Sigma F_y = 0$

$Y_K + Y_L = 0$

$Y_K + 3 = 0$

$Y_K = - 3\ kN$



Corte de Ritter

Equilíbrio da parte esquerda da treliça:

$\Sigma F_y = 0$

$N_4 * 3/5 - 3 = 0$

$N_4 = 5\ kN$

$\Sigma M_K = 0$

$-N_1 * 3 + 9 * 2 = 0$

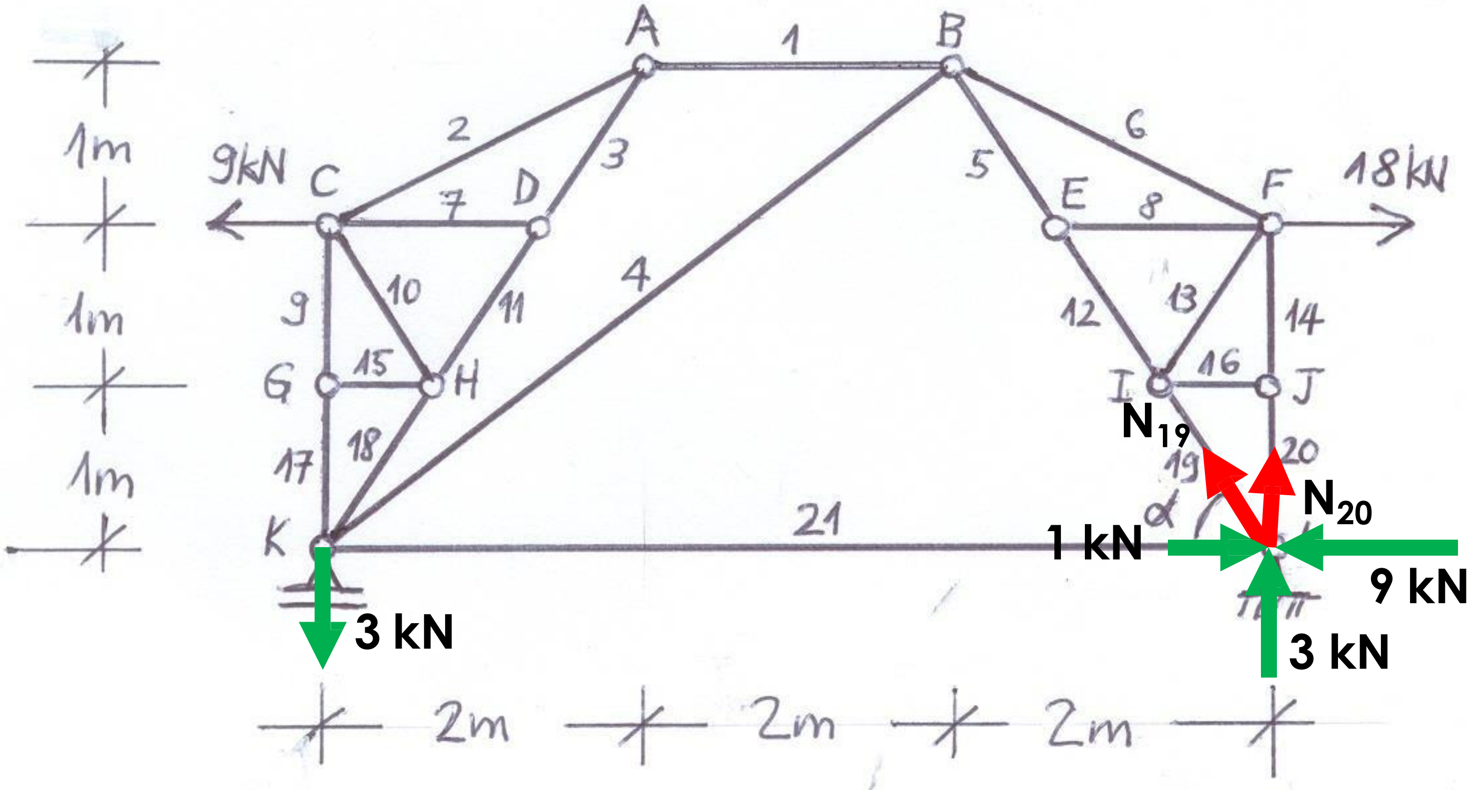
$N_1 = 6\ kN$

$\Sigma F_X = 0$

$-9 + N_1 + N_4 * 4/5 + N_{21} = 0$

$-9 + 6 + 5 * 4/5 + N_{21} = 0$

$N_{21} = -1\ kN$



Equilíbrio do nó L

$\Sigma F_x = 0$

$- N_{19} * \cos\alpha + 1 - 9 = 0$

$- N_{19} * 0{,}555 - 8 = 0$

$N_{19} = - 14{,}4 \text{ kN}$

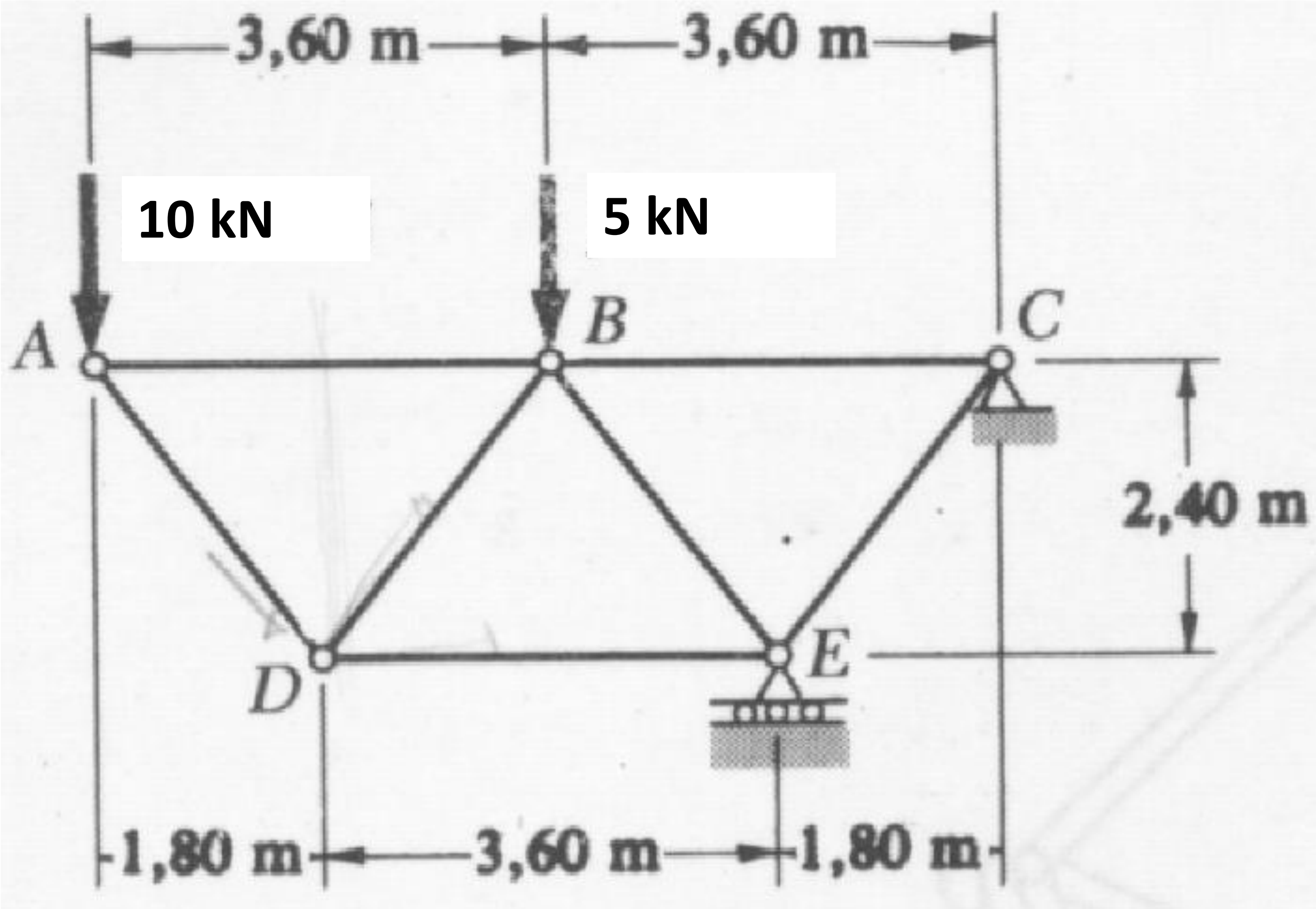
$\Sigma F_y = 0$

$3 + N_{19} * \text{sen}\alpha + N_{20} = 0$

$3 - 14{,}4 * 0{,}832 + N_{20} = 0$

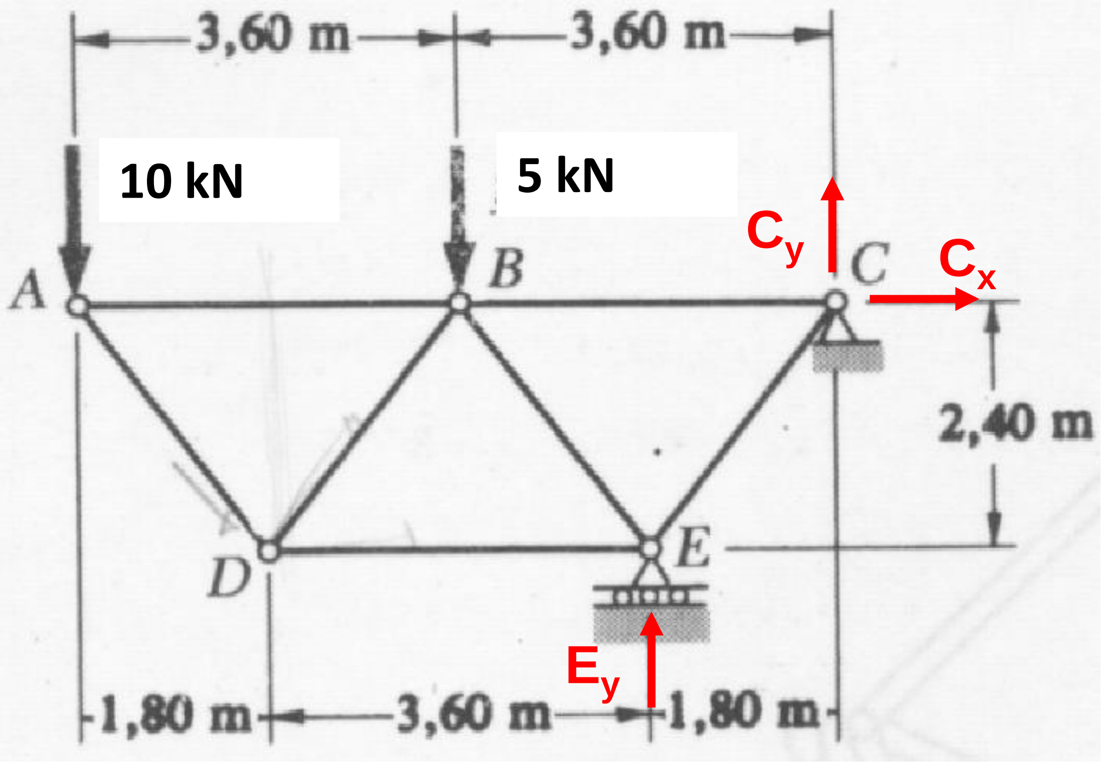
$N_{21} = 9 \text{ kN}$

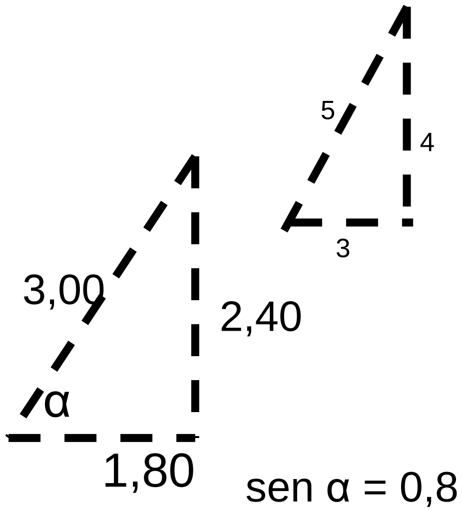
6. Determine os esforços normais nas barras da treliça:



1. Reações nos apoios

GRINTER





sen α = 0,8

cos α = 0,6

$$\Sigma M_C = 0 = +10kN \,.\, 7{,}20m + 5kN \,.\, 3{,}60m - E_y .\, 1{,}80m$$

$$\Longrightarrow \mathbf{E_y = +50\ kN}$$

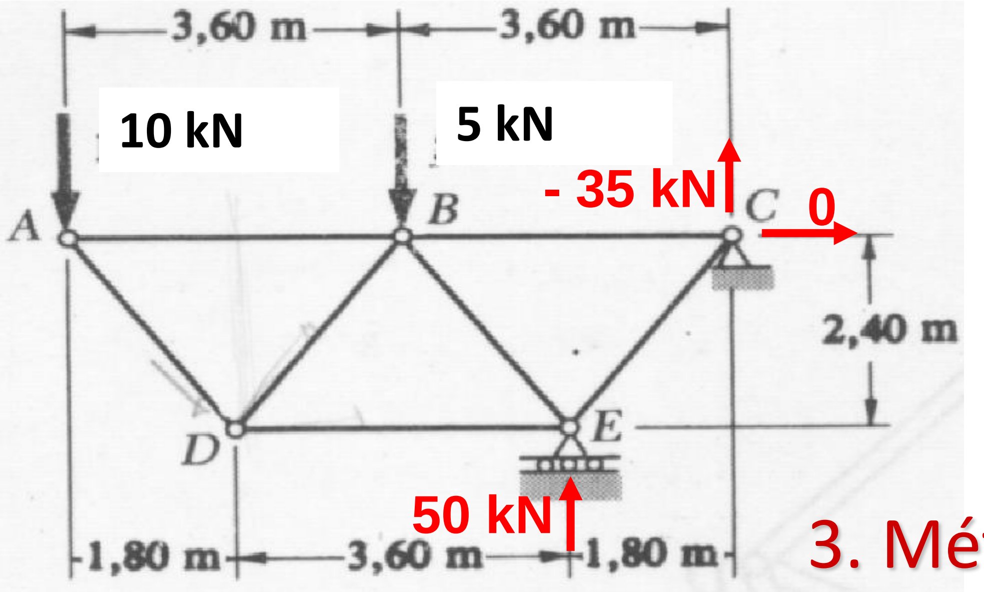
$$\Sigma F_X = 0 = C_x \Longrightarrow \mathbf{C_x = 0}$$

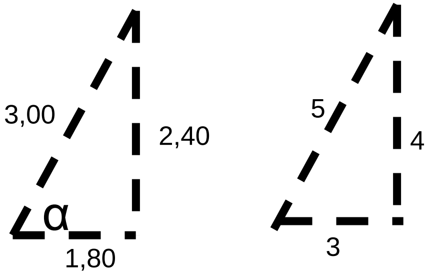
$$\Sigma F_Y = 0 = -10kN - 5kN + C_y + E_y$$

$$\Longrightarrow \mathbf{C_y = -35\ kN}$$

GRINTER

2. Diagrama de corpo livre





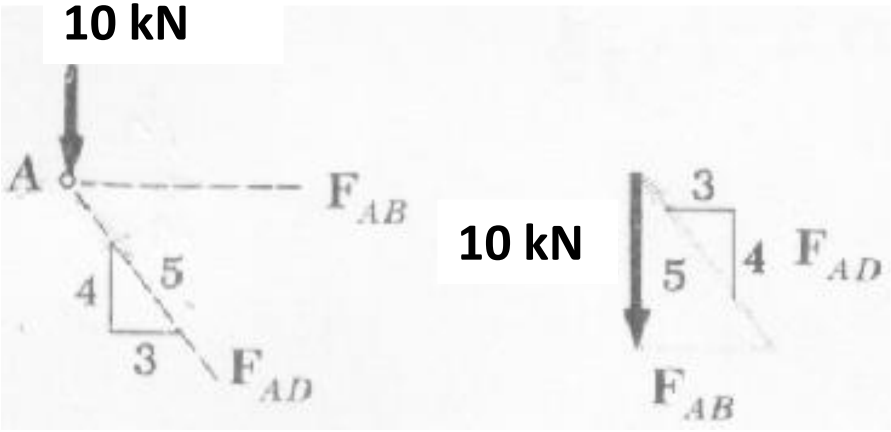
sen α = 0,8
cos α = 0,6

3. Método do equilíbrio dos nós

Nó A:

$$\Sigma F_y = 0 = -10kN - 0{,}8.F_{AD}$$

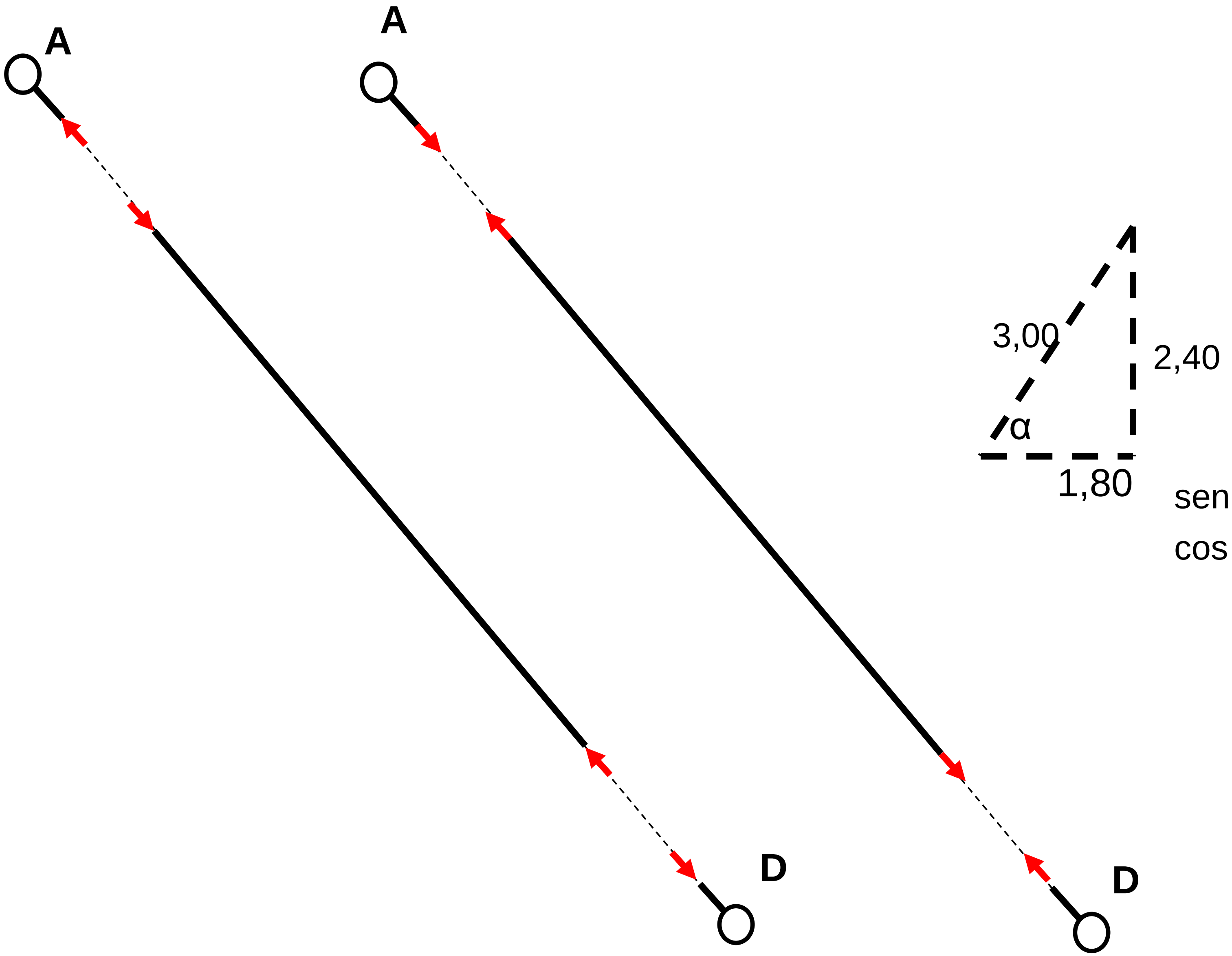
$$\Sigma F_x = 0 = F_{AD}\,.0{,}6 + F_{AB}$$



F_{AD} = -12,5 kN $\Longrightarrow F_{DA}$ =12,5 kN
(Compressão no nó e na barra)

F_{AB} = +7,5 kN
(Tração no nó e na barra)

Nós A e D:

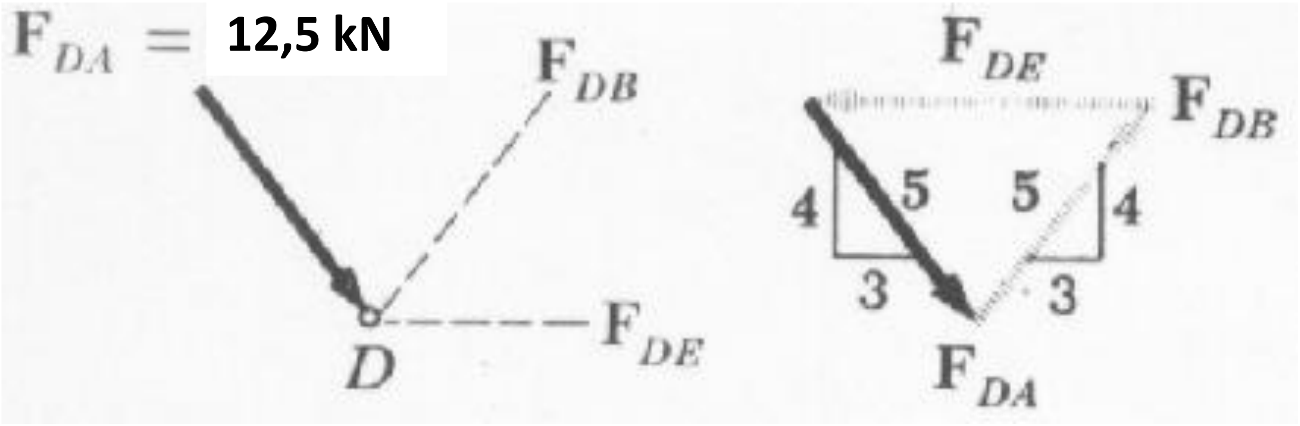


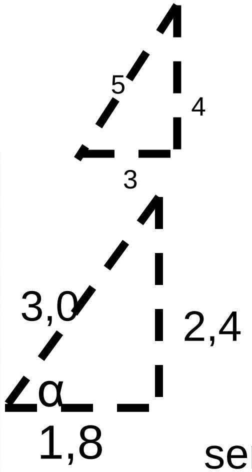
sen α = 0,8

cos α = 0,6

GRINTER

Nó D:





sen α = 0,8
cos α = 0,6

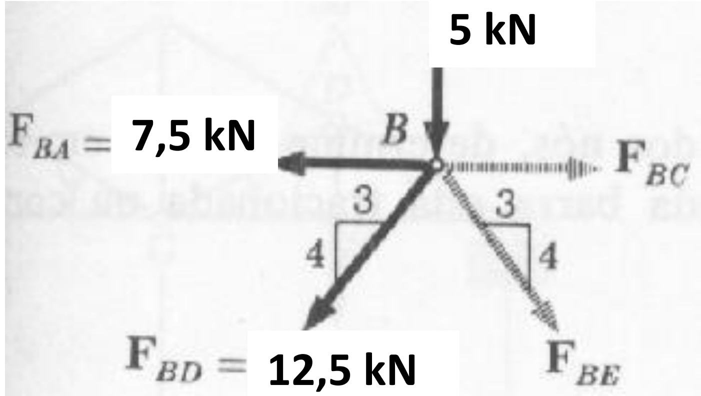
$$\Sigma F_y = 0 = -12{,}5 \,.\, 0{,}8 \; + 0{,}8 .\, F_{DB}$$

$$\Sigma F_x = 0 = F_{DE} + 0{,}6 \,.\, F_{DB} + 0{,}6 \,.\, 12{,}5$$

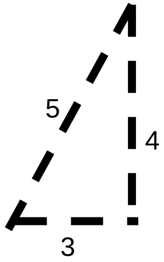
F_{DB} = +12,5 kN (Tração no nó e na barra)

F_{DE} = - 15 kN (Compressão no nó e na barra)

Nó B:



GRINTER



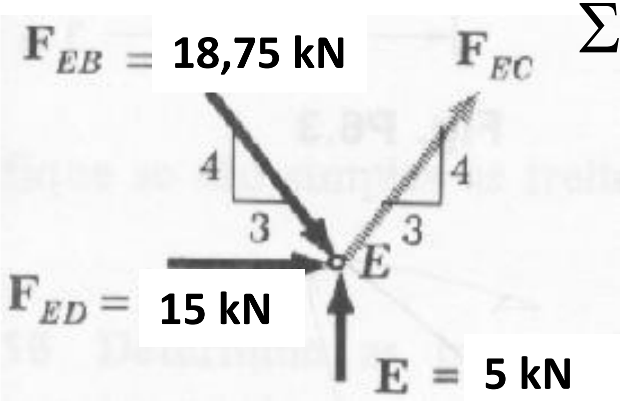
$$\Sigma F_Y = 0 = -5 - 0{,}8 \cdot 12{,}5 - 0{,}8 \cdot F_{BE}$$

$$\Longrightarrow F_{BE} = -\,18{,}75 \text{ kN (Compressão)}$$

$$\Sigma F_X = 0 = F_{BC} - 7{,}5 - 0{,}6 \cdot 12{,}5 - 0{,}6 \cdot 18{,}75$$

$$\Longrightarrow F_{BC} = 26{,}25 \text{ kN (Tração)}$$

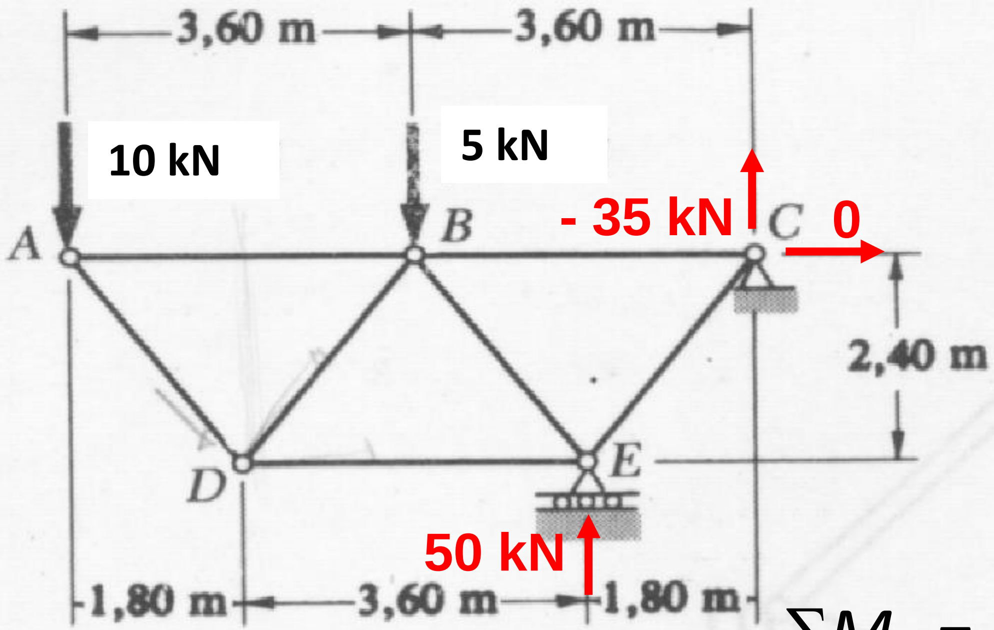
Nó E:

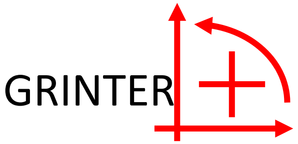


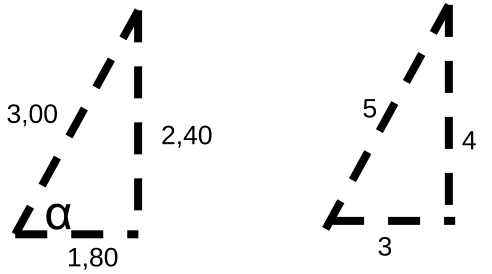
$$\Sigma F_X = 0 = 0{,}6 \cdot F_{EC} + 15 + 0{,}6 \cdot 18{,}75$$

$$\Longrightarrow F_{EC} = -\,43{,}75 \text{ kN (Compressão)}$$

4. Método de Ritter

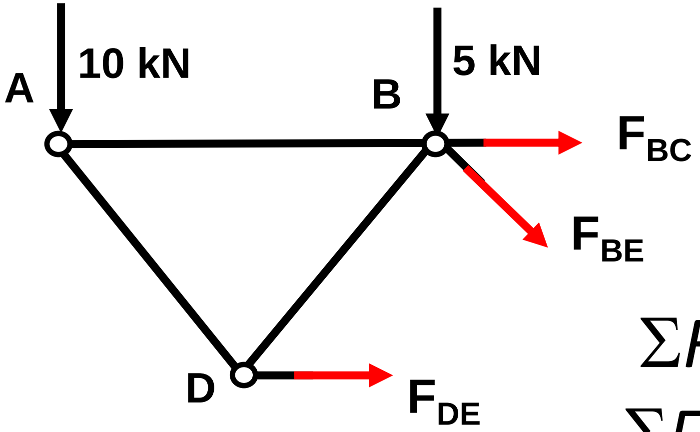






sen α = 0,8

cos α = 0,6



$$\Sigma M_B = 0 = 10kN.3,60m + F_{DE}.2,40m$$

$$\Longrightarrow F_{DE} = -\ 15\ kN$$

$$\Sigma F_y = 0 = -10kN - 5kN - F_{BE}.0,8$$

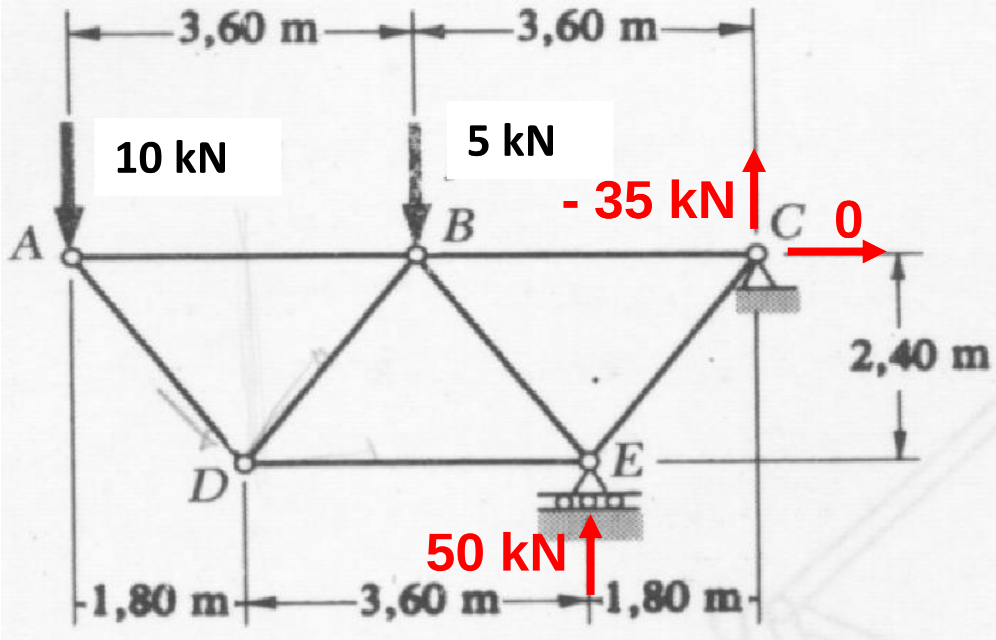
$$\Longrightarrow F_{BE} = -\ 18,75\ kN$$

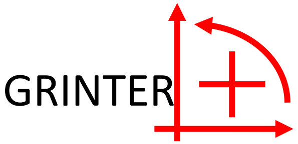
$$\Sigma F_x = 0 = F_{DE} + F_{BC} + 0,6\ .\ F_{BE}$$

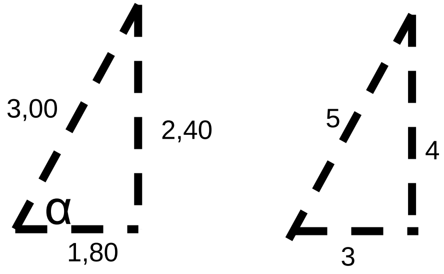
$$\Sigma F_x = 0 = -\ 15\ kN + F_{BC} + 0,6.\ (-18,75\ kN)$$

$$\Longrightarrow F_{BC} = 26,25\ kN$$

4. Método de Ritter

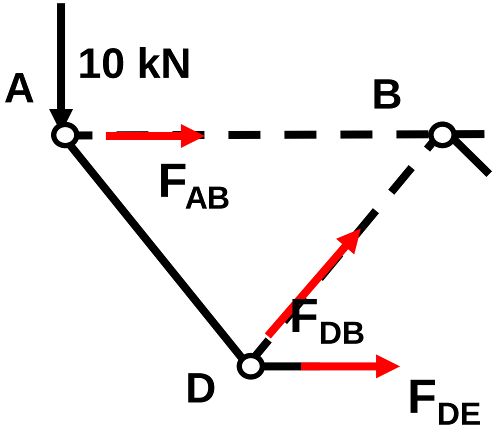






sen α = 0,8

cos α = 0,6



$$\Sigma M_D = 0 = 10kN.1,80m - F_{AB}.2,40m$$

$$\Longrightarrow \mathbf{F_{AB} = 7,5\ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 = -\ 10kN + F_{DB}.0,8$$

$$\Longrightarrow \mathbf{F_{DB} = 12,5\ kN}$$

$$\Sigma M_B = 0 = 10kN.3,60m + F_{DE}.2,40m$$

$$\Longrightarrow \mathbf{F_{DE} = -\ 15\ kN}$$