

Esforços solicitantes em um pórtico

PEF 3208 - Fundamentos da mecânica das estruturas

Prof. Dr. Guilherme R. Franzini

Considere o pórtico ilustrado na Figura abaixo. No ponto C, existe uma articulação. Obtenha os diagramas de esforços solicitantes.

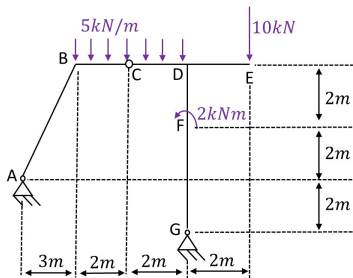


Figura: Representação esquemática do problema

Passo 1 - Determinação das reações de apoio. Considere o diagrama de corpo livre (DCL) da estrutura, sendo as reações de apoio identificadas em vermelho. Considere a direção x como a horizontal (positivo para a direita) e y a vertical (positivo para cima). Para efeito de equilíbrio, os momentos no sentido anti-horário são assumidos como positivo. Note que os sentidos das reações de apoio são arbitrados. Caso o sinal obtido seja positivo, o sentido arbitrado é de fato o correto. Note que temos quatro incógnitas vinculares (H_A , H_G , V_A , V_G) e as três equações de equilíbrio no plano. A articulação em C implica que, nesse ponto, o momento fletor é nulo. Isso fornece a equação vincular adicional necessária para o cálculo das reações de apoio.

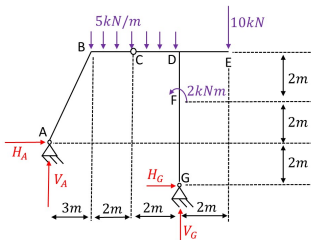


Figura: Diagrama de corpo livre

Equilíbrio da estrutura:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_A + H_G = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_A - \underbrace{5 \times 4}_{ME} - 10 + V_G = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow - \underbrace{5 \times 4}_{\text{Resultante}} \times 5 - 10 \times 9 + 7V_G + 2H_G + 2 = 0 \quad (3)$$

Equilíbrio de momentos (pólo em C):

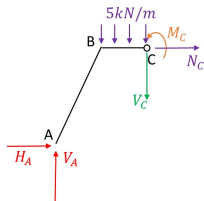


Figura: Esforços solicitantes em C.

$$-5V_A + 4H_A + 5 \times 2 \times 1 + \underbrace{M_C}_0 = 0 \quad (4)$$

De Equações (1), (2), (3) e (4): $H_A = 1,05 \text{ kN}$, $H_G = -1,05 \text{ kN}$,
 $V_A = 2,84 \text{ kN}$ e $V_G = 27,16 \text{ kN}$.

Passo 2 - Determinação do número de cortes e equilíbrio de uma sub-estrutura. Para a obtenção dos diagramas de esforços solicitantes, faremos cortes na estrutura e imporemos o equilíbrio de qualquer uma das sub-estruturas definidas pelo corte. O número de cortes depende de mudanças nas direções das barras ou do carregamento. Neste exemplo, precisamos de cinco cortes. Não esqueça que, na seção de corte, surgem os esforços solicitantes **força normal**, **força cortante** e **momento fletor**.

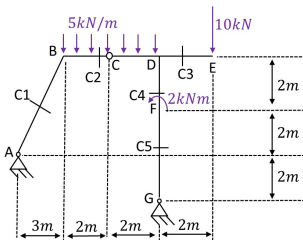


Figura: Cortes a serem feitos

Passo 3 - Corte C1. Por facilidade, o equilíbrio será imposto anulando as forças resultantes nas direções x_1 e y_1 indicadas. As expressões valem no intervalo $0 \leq x_1 \leq 5$.

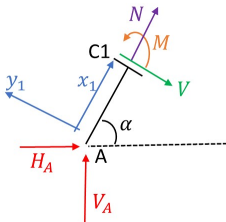


Figura: Corte C1

Equilíbrio da sub-estrutura à esquerda de C1:

$$\sum F_{x1} = 0 \rightarrow N + V_A \sin \alpha + H_A \cos \alpha = 0 \rightarrow N = -2,91 \text{ kN}$$

$$\sum F_{y1} = 0 \rightarrow V_A \cos \alpha - H_A \sin \alpha - V = 0 \rightarrow V = 0,86 \text{ kN}$$

$$\sum M_{C1} = 0 \rightarrow -V_A \cos \alpha x_1 + H_A \sin \alpha x_1 + M = 0 \rightarrow M = 0,86 x_1$$

Passo 3 - Corte C3. As expressões valem no intervalo $0 \leq x_3 \leq 2$. Note que, como a orientação de x_3 é diferente daquela usada para deduzir as equações diferenciais de equilíbrio, $dM/dx = -V$.

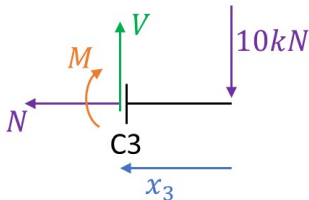


Figura: Corte C3

Equilíbrio da sub-estrutura à direita de C3:

$$\sum F_{x3} = 0 \rightarrow N = 0$$

$$\sum F_{y3} = 0 \rightarrow V = 10\text{kN}$$

$$\sum M_{C3} = 0 \rightarrow -M - 10x_3 = 0 \leftrightarrow M = -10x_3$$

Passo 3 - Corte C5. As expressões valem no intervalo $0 \leq x_5 \leq 4$.

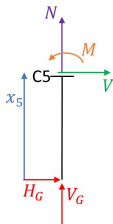


Figura: Corte C5

Equilíbrio da sub-estrutura abaixo de C5:

$$\sum F_{x5} = 0 \rightarrow N + V_G = 0 \rightarrow N = -27,16 \text{ kN}$$

$$\sum F_{y5} = 0 \rightarrow V + H_G = 0 \rightarrow V = -H_G = 1,05 \text{ kN}$$

$$\sum M_{C5} = 0 \rightarrow H_G x_5 + M = 0 \leftrightarrow M = 1,05 x_5$$

Passo 3 - Corte C4. As expressões valem para o corte C4, ou seja, no intervalo $4 \leq x_5 \leq 6$.

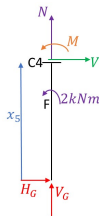


Figura: Corte C4

Equilíbrio da sub-estrutura à direita de C3:

$$\sum F_{x5} = 0 \rightarrow N + V_G = 0 \rightarrow N = -27,16 \text{ kN}$$

$$\sum F_{y5} = 0 \rightarrow V + H_G = 0 \Rightarrow V = -H_G = 1,05 \text{ kN}$$

$$\sum M_{C5} = 0 \rightarrow H_G x_5 + 2 + M = 0 \Leftrightarrow M = 1,05 x_5 - 2$$

O momento concentrado levou a uma descontinuidade no diagrama de momentos fletores.

Passo 3 - Corte C2. As expressões valem para o corte C4, ou seja, no intervalo $0 \leq x_2 \leq 4$. Não há necessidade de corte antes e depois da articulação.

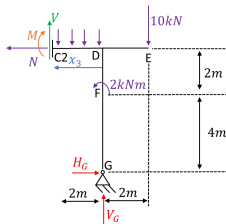


Figura: Corte C2

Equilíbrio da sub-estrutura à direita de C2 :

$$\sum F_{x2} = 0 \rightarrow N = H_G = -1,05\text{kN}$$

$$\sum F_{y2} = 0 \rightarrow V - 5x_2 + V_G - 10 = 0 \rightarrow V = 5x_2 - 17,16$$

$$\sum M_{C2} = 0 \rightarrow -M - \frac{5}{2}x_2^2 - 10(2 + x_2) + 2 + V_G x_2 + 6H_G = 0$$

$$\Leftrightarrow M = -\frac{5}{2}x_2^2 + 17,16x_2 - 24,30$$

Passo 4 - Diagrama de força normal. Valores em kN

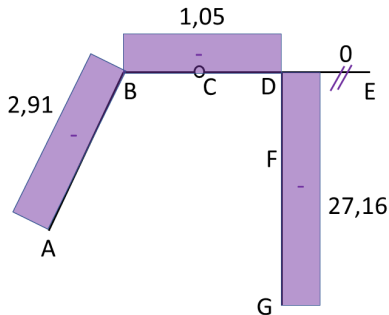


Figura: N [kN].

Passo 4 - Diagrama de força cortante. Valores em kN

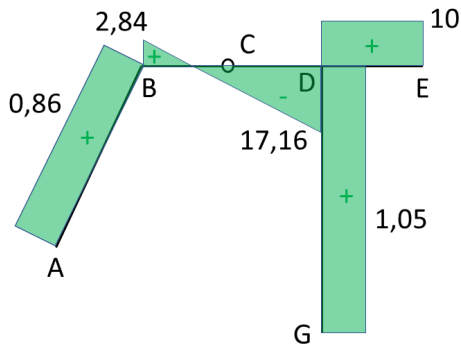


Figura: V [kN].

Note que, em BD, como o carregamento é uniformemente distribuído, $V(x)$ assume a forma de uma reta.

Passo 4 - Diagrama de momentos fletores. Valores em kNm

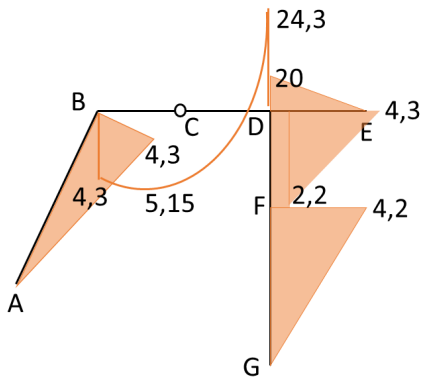


Figura: M [kNm].

- Note que, em BD, como o carregamento é uniformemente distribuído, $M(x)$ assume a forma de uma parábola;
- Note também que a concavidade é oposta ao nosso senso comum, uma vez que o momento fletor positivo é assumido como tracionado as fibras inferiores;
- Como $V=dM/dx$, um valor extremo do momento fletor ocorre quando a cortante é nula. No caso, a cortante é nula em $\bar{x} = 17,16/5 = 3,43$ m. Note, ainda, que $M(\bar{x}) = 5,15$ kNm;
- $M(x_2 = 2) \approx 0$. O valor é aproximado pois diversas aproximações numéricas foram feitas ao longo da dedução;
- Por fim, note que em B o diagrama de momentos fletores é contínuo. Em D isso não ocorre, pois o momento fletor em D transferido para o trecho BD contém contribuições dos trechos DG e DE.