PEF3208
Aula 3
28 abril
PROF. NAKAO

- **Linhas de estado em vigas inclinadas e curvas. Linhas de estado em vigas poligonais planas.**

# PEF-3208 Fundamentos de Mecânica das Estruturas

**Planejamento inicial aula a aula – 1º Semestre – 2023 (sujeito a modificações)**

**Terças-feiras, turma 1 das 9h20 às 11h00 - Prof. Guilherme Franzini gfranzini@usp.br**
**Quintas-feiras, turma 2 das 7h30 às 9h10 - Prof. Daniel Miranda danielmiranda@usp.br**
**Sextas-feiras, turma 3 das 7h30 às 9h10 - Prof. Osvaldo Nakao nakao@usp.br**
**Sextas-feiras, turma 4 das 9h20 às 11h00 - Prof. Osvaldo Nakao nakao@usp.br**
**Sala: D1-4 (Elétrica)**

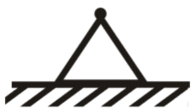
**https://edisciplinas.usp.br/course/view.php?id=106390**

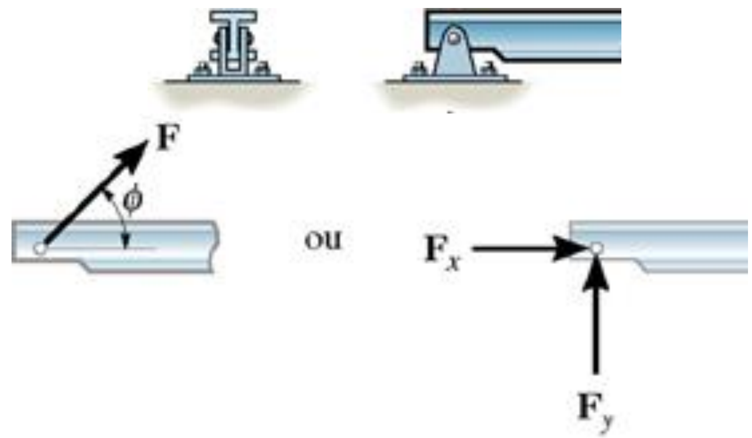
| AULA | Conteúdo | Estudo | Exercício | Projeto / Trabalho | Extra Aula | Dia da Aula |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Planejamento: expectativas, conteúdo, estratégias. Introdução: Mecânica das Estruturas. Objetivos da Resistência dos.Materiais. Classificação das estruturas, das ações e dos esforços. | | | 0,5h | 0,5h | 21/3, 23/3, 24/3 |
| 2 | Esforços reativos e solicitantes. Linhas de estado em vigas retas. | 0,5h | 0,5h | 0,5h | 1,5h | 28/3, 30/3, 31/3 |
| 3 | Linhas de estado em vigas inclinadas e curvas. | 0,5h | 0,5h | 0,5h | 1,5h | 11/4, 13/4, 14/4 |
| 4 | Linhas de estado em vigas poligonais planas. | 0,5h | 0,5h | 0,5h | 1,5h | 18/4, 20/4, 28/4 |
| 5 | Linhas de estado de vigas poligonais espaciais. Apresentação do programa Ftool. **Entrega da proposta de T.** | 0,5h | 0,5h | 0,5h | 1,5h | 25/4, 27/4; 5/5 |
| 6 | Treliças Planas isostáticas. Cálculo de treliças pelo equilíbrio de nós e pelo método das seções. | 1h | 1h | | 2h | 2 e 9/5, 4/5, 12/5 |
| | **Prova P1 (Anf Am: t1 e t2; Anf Ver t3 e t4)** | | | | | **17/5 - 15h40** |

# APOIOS NO PLANO

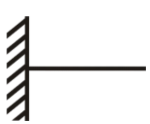
## ARTICULAÇÃO MÓVEL:

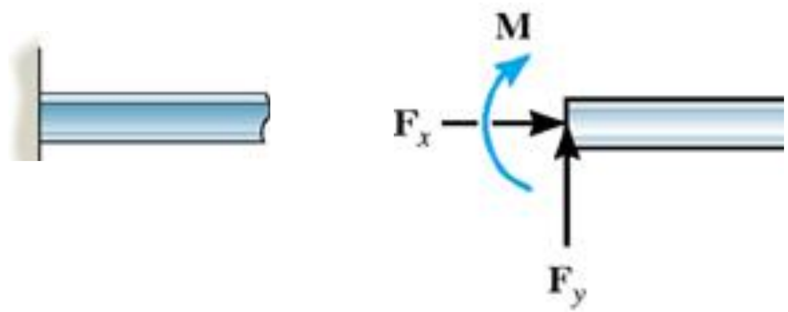

## ARTICULAÇÃO FIXA:



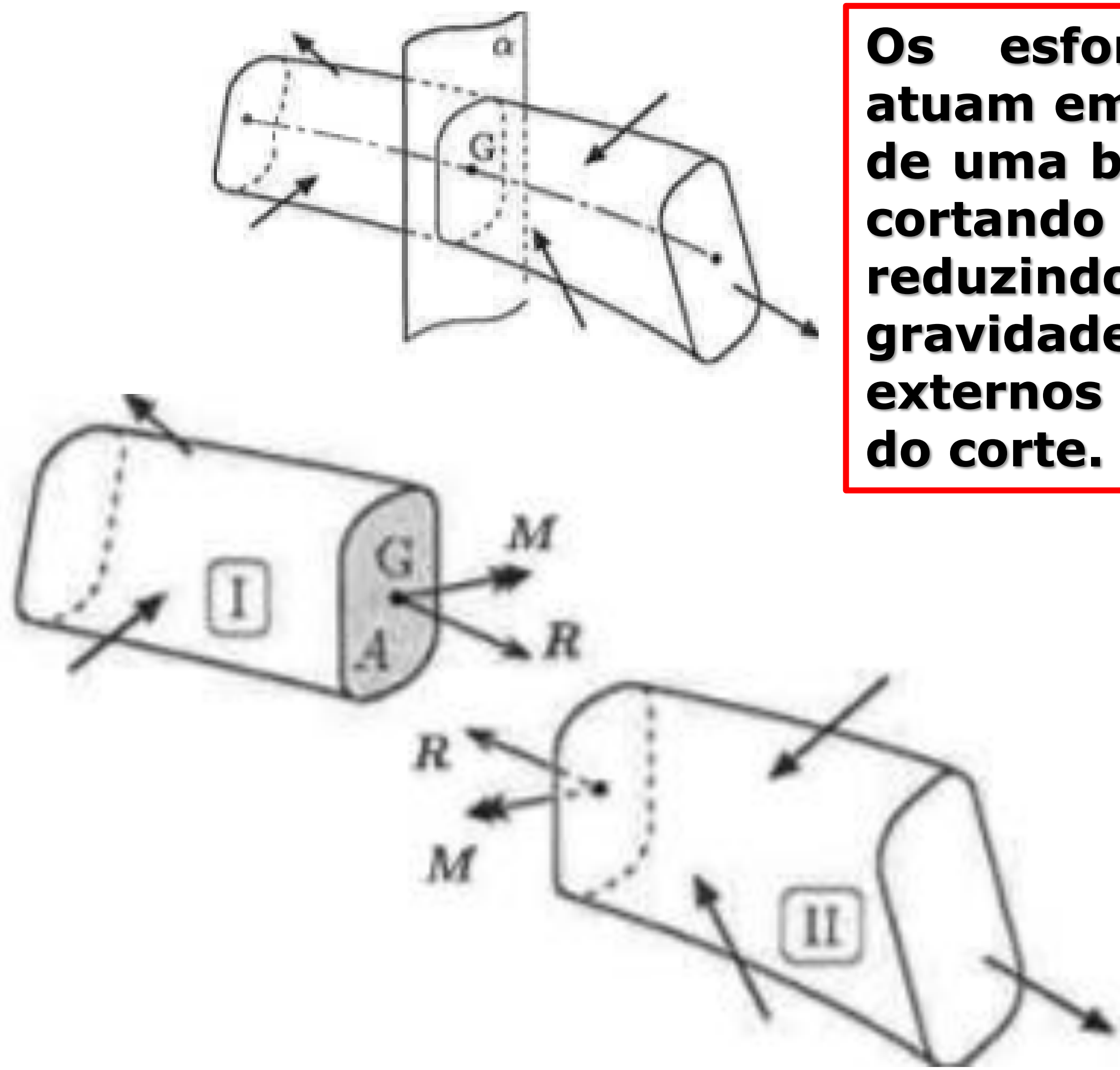



## ENGASTAMENTO:





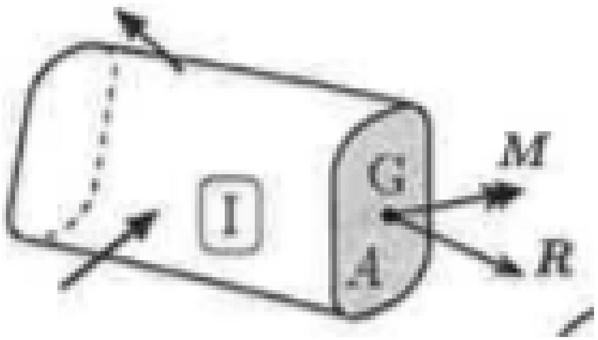
# Teorema fundamental da Resistência dos materiais
# Teorema do corte

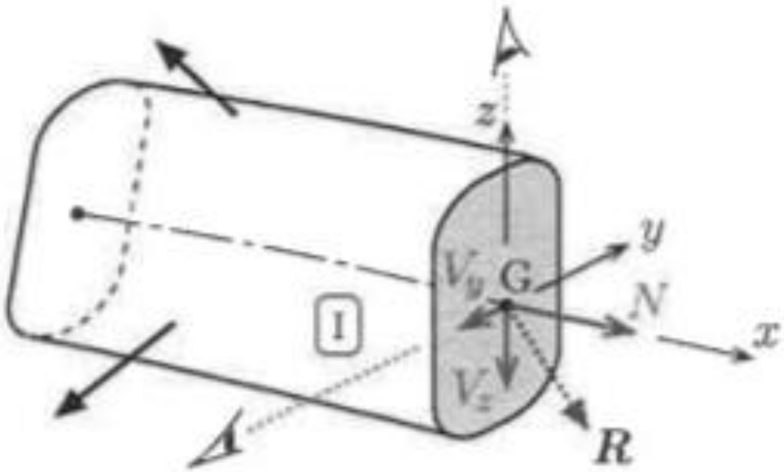



**Os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo no seu centro de gravidade todos os esforços externos aplicados do outro lado do corte.**

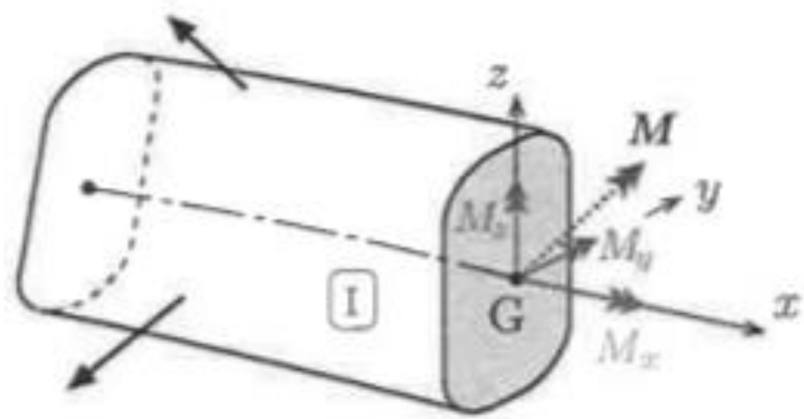
**Fonte: Almeida Neto, E. S. Conceitos fundamentais de Resistência dos materiais, apostila Epusp, São Paulo, 2011**

# Teorema fundamental da Resistência dos materiais
# Teorema do corte



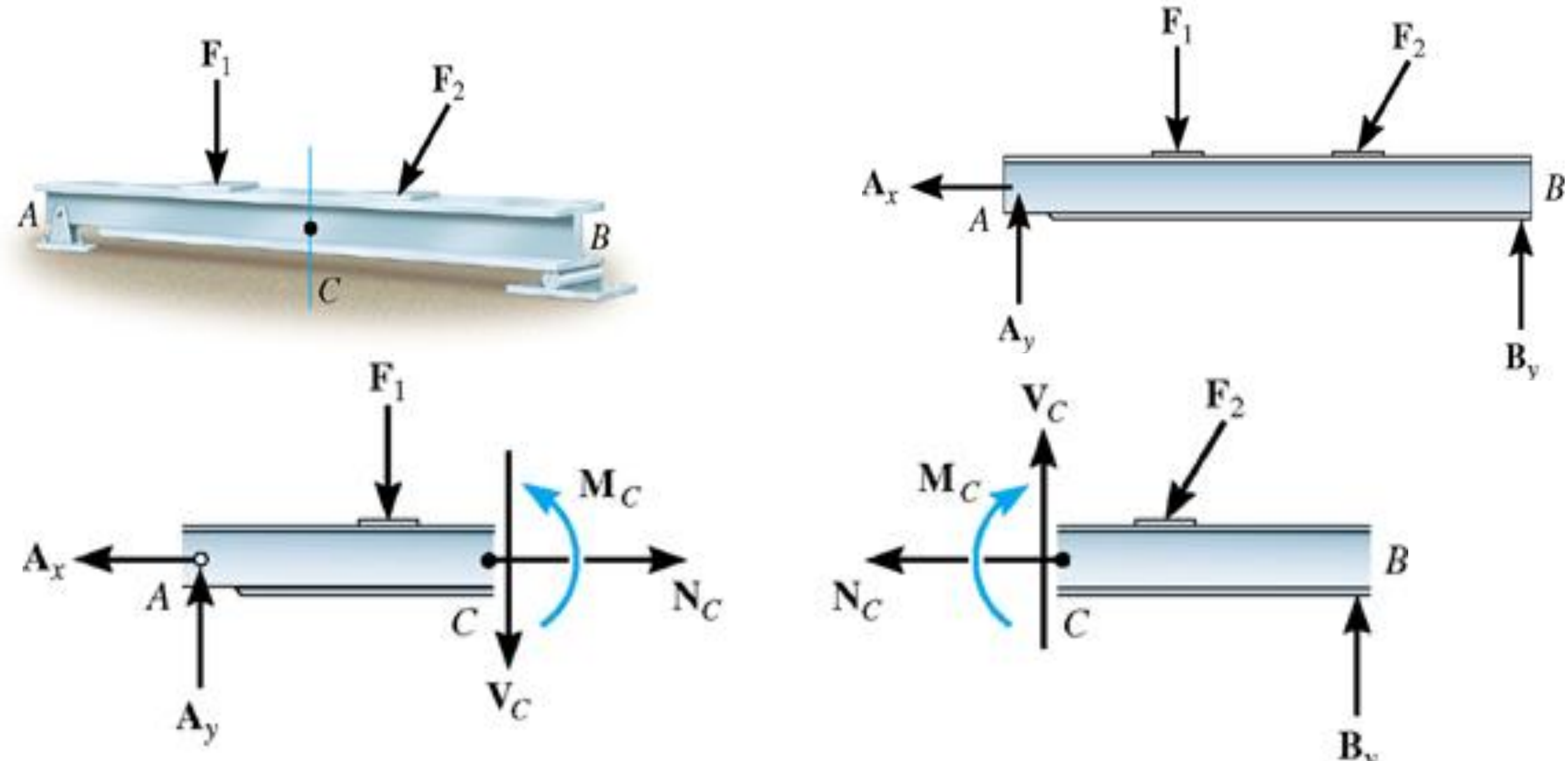




(a) Forças




(b) Momentos

Fonte: Almeida Neto, E. S. Conceitos fundamentais de Resistência dos materiais, apostila Epusp, São Paulo, 2011

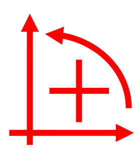



**ESFORÇOS**: forças (concentradas, distribuídas), momentos e tensões.
**ESFORÇOS EXTERNOS**: Aqueles que atuam nas estruturas e fazem surgir esforços internos que podem deformar estas estruturas levando ao rompimento em alguns casos são esforços externos **ativos ($F_1$ $F_2$)**. Aqueles que surgem nos apoios são esforços externos **reativos ($A_x$ $A_y$ $B_y$)**.
**ESFORÇOS INTERNOS**: tensões e suas resultantes.
**ESFORÇOS SOLICITANTES**: esforços internos, resultantes e momentos das tensões na seção transversal de uma barra. São as **forças normais ($N_c$)**, as **forças cortantes ($V_c$)**, os **momentos fletores ($M_c$)**, e os **momentos de torção**.

# Convenção de sinais

## Força cortante V
## Momento fletor M

## Estruturas planas

**No equilíbrio,**
**convenção Grinter** 

Força de cisalhamento positiva

Momento fletor positivo

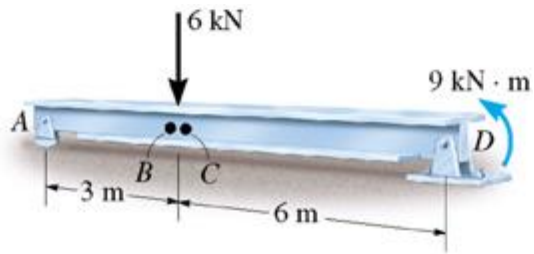
# Convenção de sinais

| Esforço solicitante | Sinal positivo (+) | Sinal negativo (-) |
|---|---|---|
| Força normal | Tração | Compressão |
| Força cortante | Gira o trecho de barra em que atua no sentido horário | Gira o trecho de barra em que atua no sentido anti-horário |
| Momento fletor | Traciona as fibras inferiores da barra | Traciona as fibras superiores da barra |
| Momento de torção[2] | O vetor momento tem o sentido da normal externa à seção transversal em que atua | O vetor momento tem sentido contrário ao da normal externa à seção tranversal em que atua |

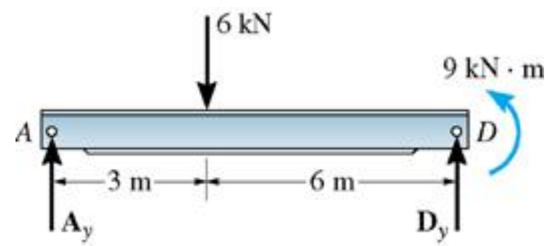
**Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997**

# Exercício 3. (aula 2)

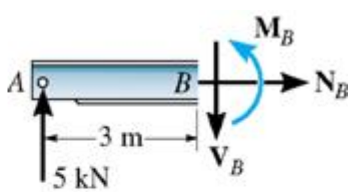
**DETERMINE AS REAÇÕES NOS APOIOS E OS ESFORÇOS SOLICITANTES NOS PONTOS B E C DA VIGA DA FIGURA**



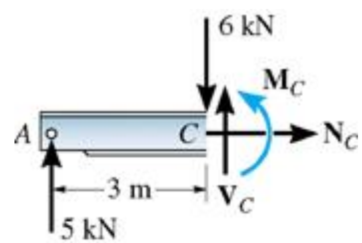

(a)




(b)

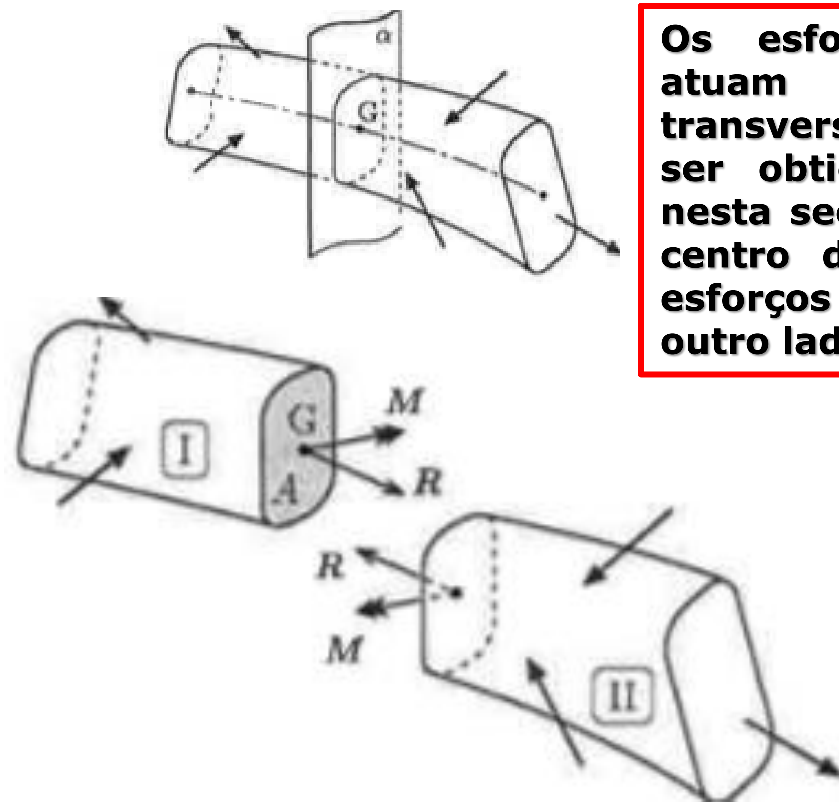



(c)



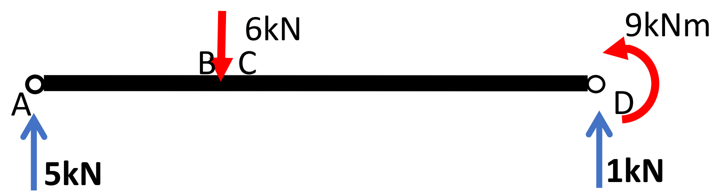

(d)

## Teorema fundamental da Resistência dos materiais
## Teorema do corte

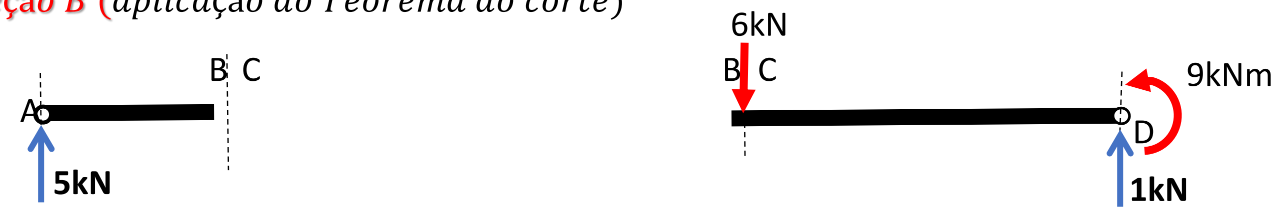



**Os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo no seu centro de gravidade todos os esforços externos aplicados do outro lado do corte.**

**Fonte: Almeida Neto, E. S. Conceitos fundamentais de Resistência dos materiais, apostila Epusp, São Paulo, 2011**

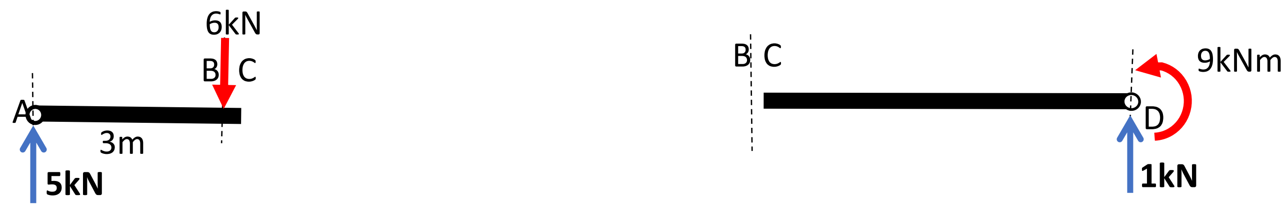



*Seção B* (*aplicação do Teorema do corte*)

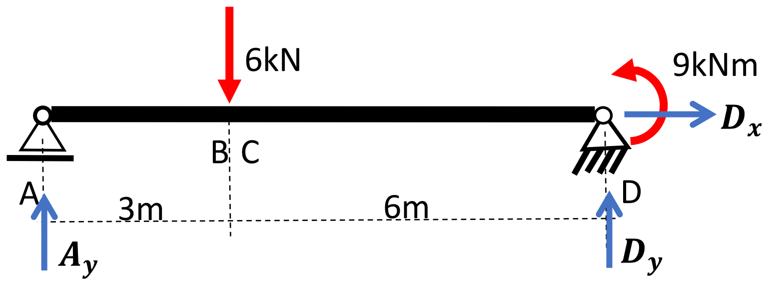



**Pelo Teorema do corte, divide-se a estrutura apenas em duas partes na seção de interesse**

*Seção C* (*aplicação do Teorema do corte*)




**Os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo no seu centro de gravidade todos os esforços externos aplicados do outro lado do corte.**





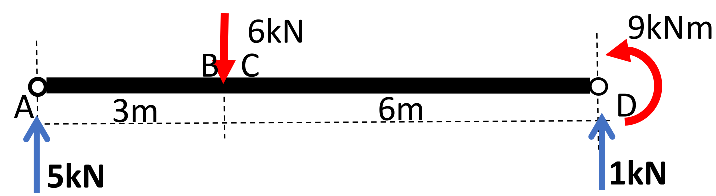
1. *Reações nos apoios*

$\sum X = 0 = D_x \Longrightarrow \boldsymbol{D_x = 0}$

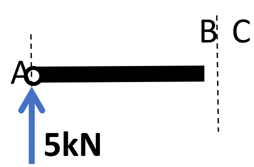
$\sum M_D = 0 = -A_y * 9 + 6 * 6 + 9 \Longrightarrow \boldsymbol{A_y = 5\ kN}$

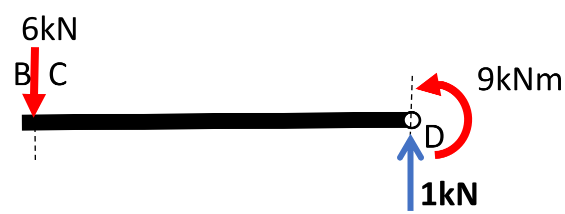
$\sum Y = 0 = A_y - 6 + D_y \Longrightarrow 5 - 6 + D_y = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{D_y = 1\ kN}$

2. *Diagrama do corpo livre* (***DCL***)



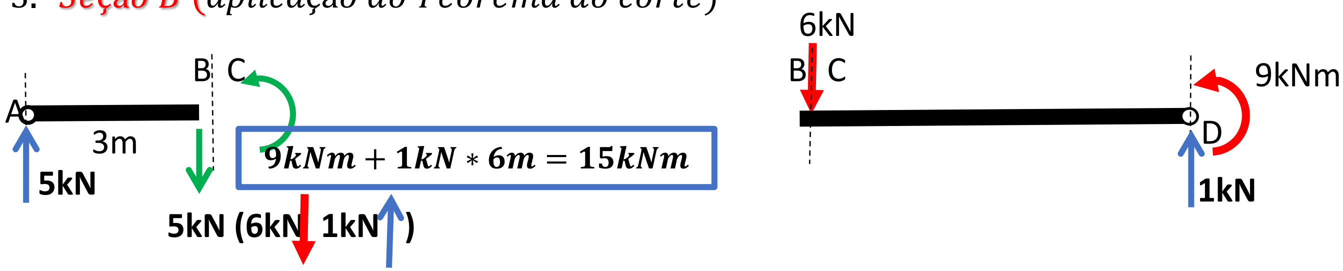

3. *Seção B* (*aplicação do Teorema do corte*)



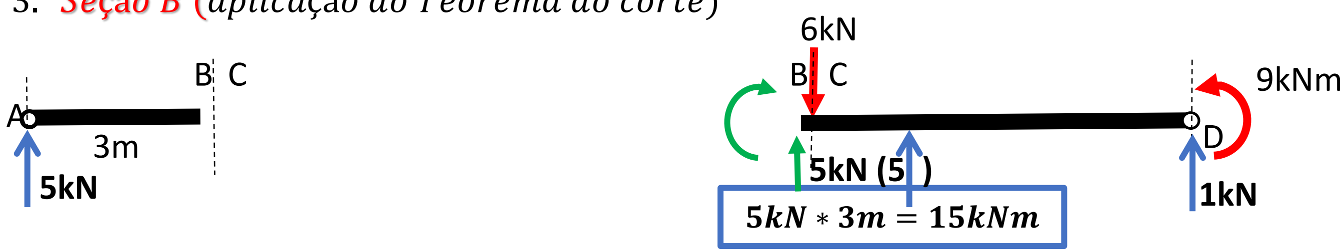




**Pelo Teorema do corte, divide-se a estrutura apenas em duas partes na seção de interesse**

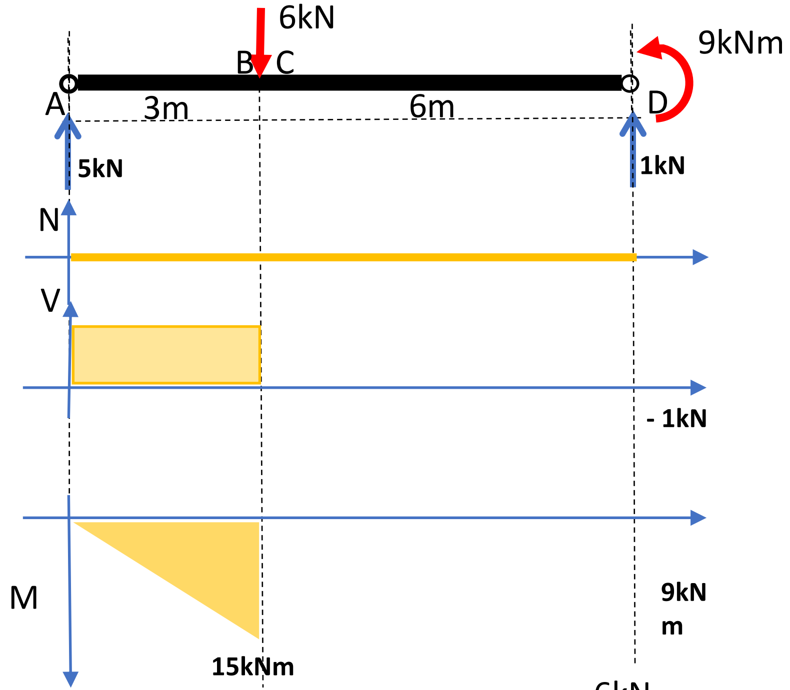
3. *Seção B (aplicação do Teorema do corte)*

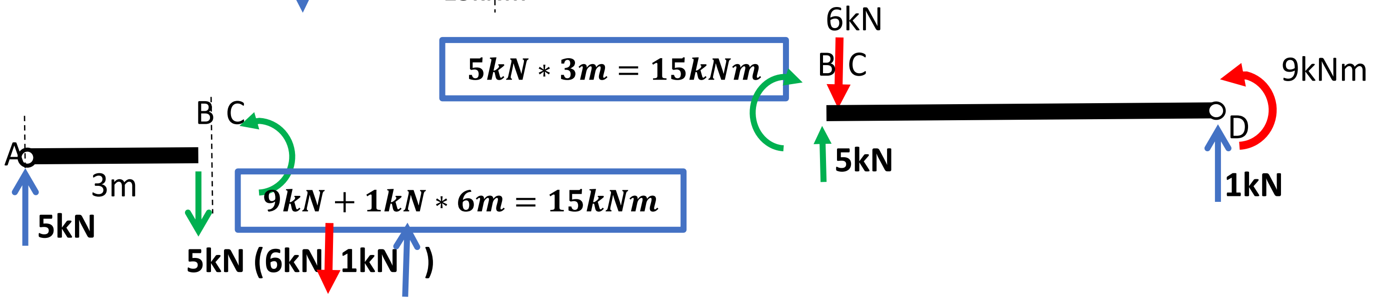



3. *Seção B (aplicação do Teorema do corte)*

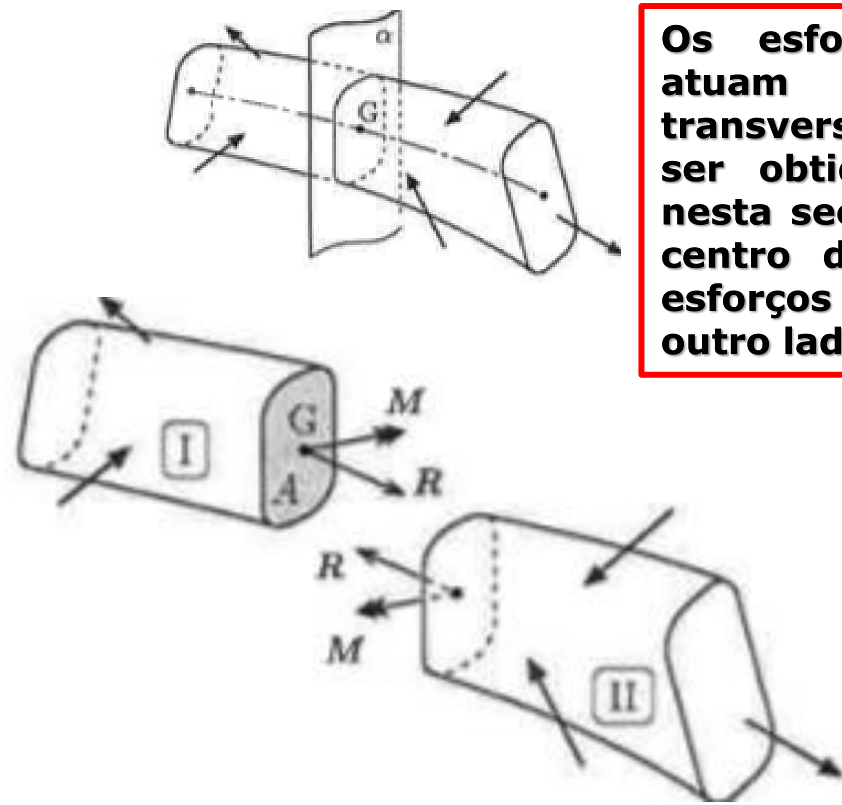


4. $Diagramas\ dos\ esforços\ solicitantes$



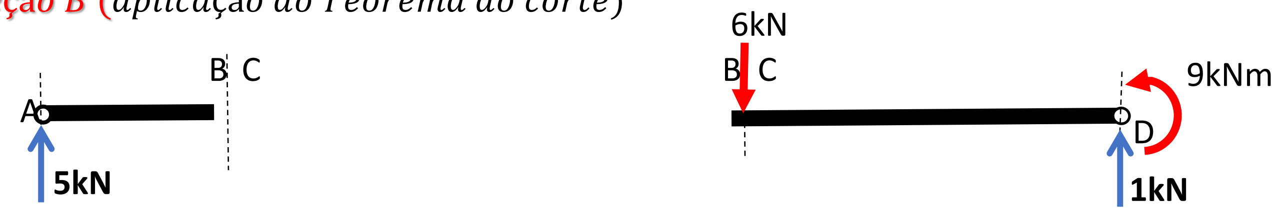
# Teorema fundamental da Resistência dos materiais
# Teorema do corte




**Os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo no seu centro de gravidade todos os esforços externos aplicados do outro lado do corte.**

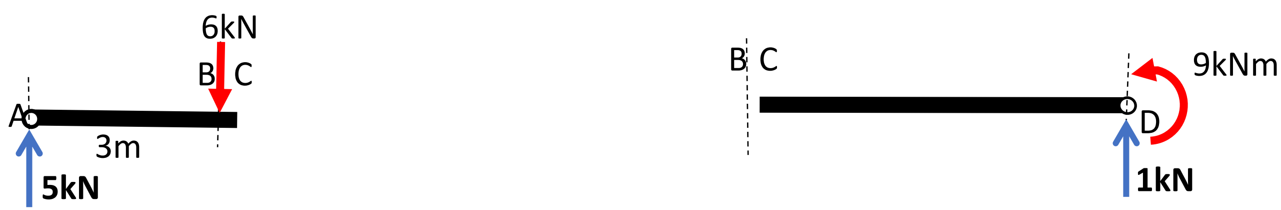
**Fonte: Almeida Neto, E. S. Conceitos fundamentais de Resistência dos materiais, apostila Epusp, São Paulo, 2011**


*Seção B* (*aplicação do Teorema do corte*)

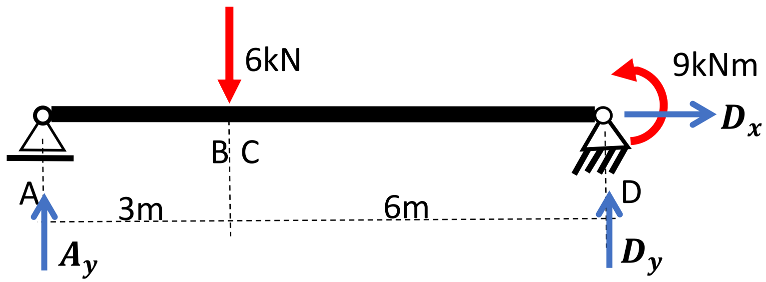



**Pelo Teorema do corte, divide-se a estrutura apenas em duas partes na seção de interesse**

*Seção C* (*aplicação do Teorema do corte*)




**Os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo no seu centro de gravidade todos os esforços externos aplicados do outro lado do corte.**





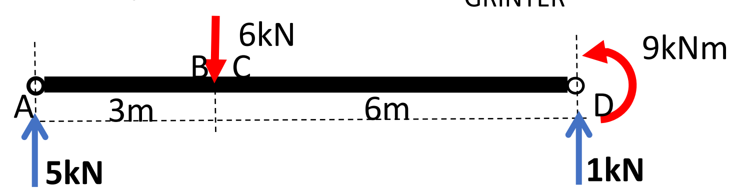
1. *Reações nos apoios*

$\sum X = 0 = D_x \Longrightarrow \boldsymbol{D_x = 0}$

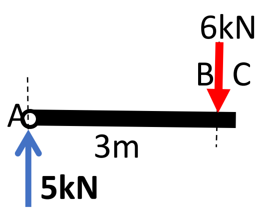
$\sum M(D) = 0 = -A_y * 9 + 6 * 6 + 9 \Longrightarrow \boldsymbol{A_y = 5\ kN}$

$\sum Y = 0 = A_y - 6 + D_y \Longrightarrow 5 - 6 + D_y = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{D_y = 1\ kN}$


2. *Diagrama do corpo livre* ***DCL***

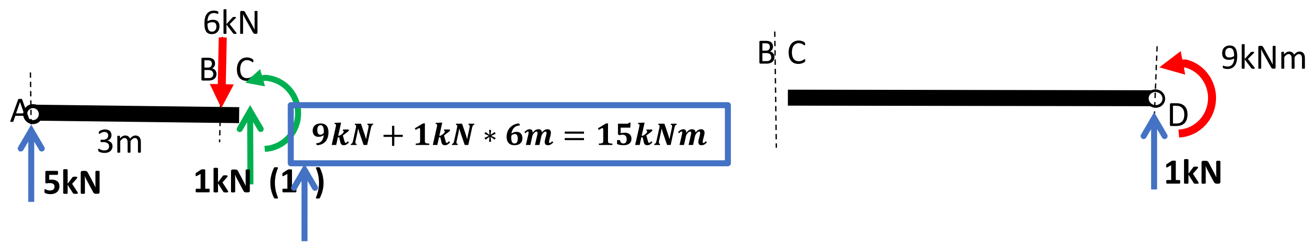



4. ***Seção C*** *(aplicação do Teorema do corte)*

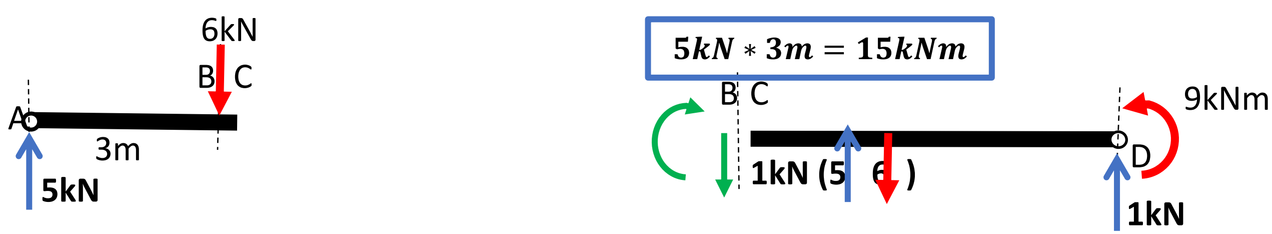



4. ***Seção C*** *(aplicação do Teorema do corte)*

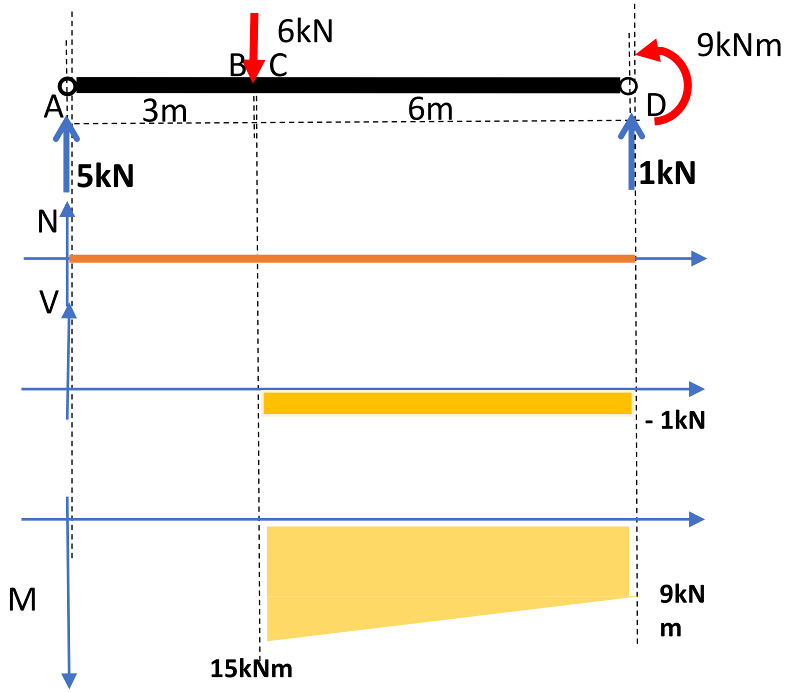

4. ***Seção C*** *(aplicação do Teorema do corte)*

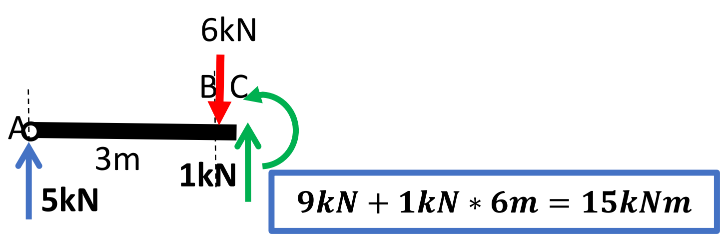


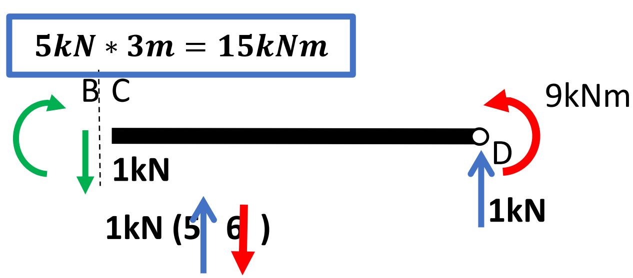

4. ***Seção C*** *(aplicação do Teorema do corte)*



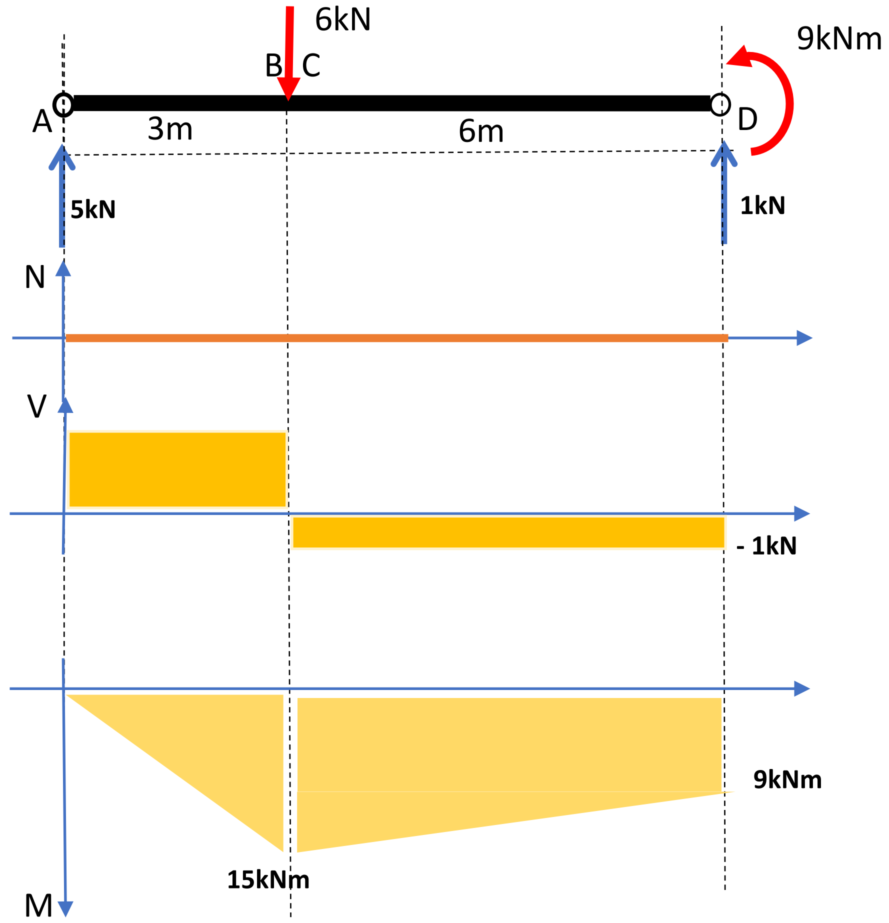
4. *Diagramas dos esforços solicitantes*



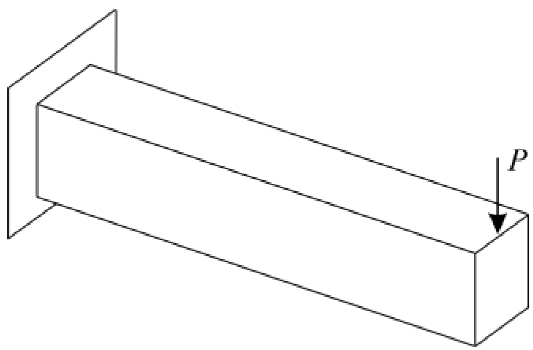



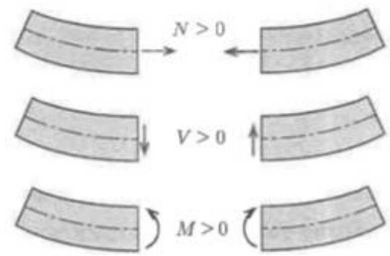
5. $Diagramas\ dos\ esforços\ solicitantes$

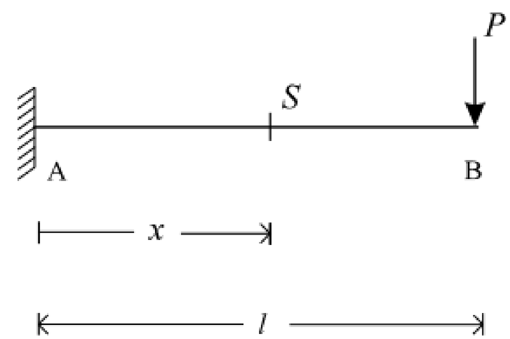


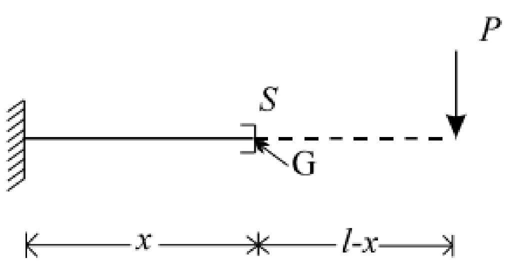
# Exercício 1.

**Esboce os diagramas dos esforços solicitantes da viga em balanço da figura**



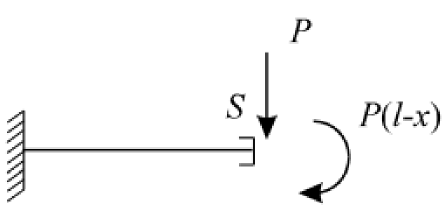



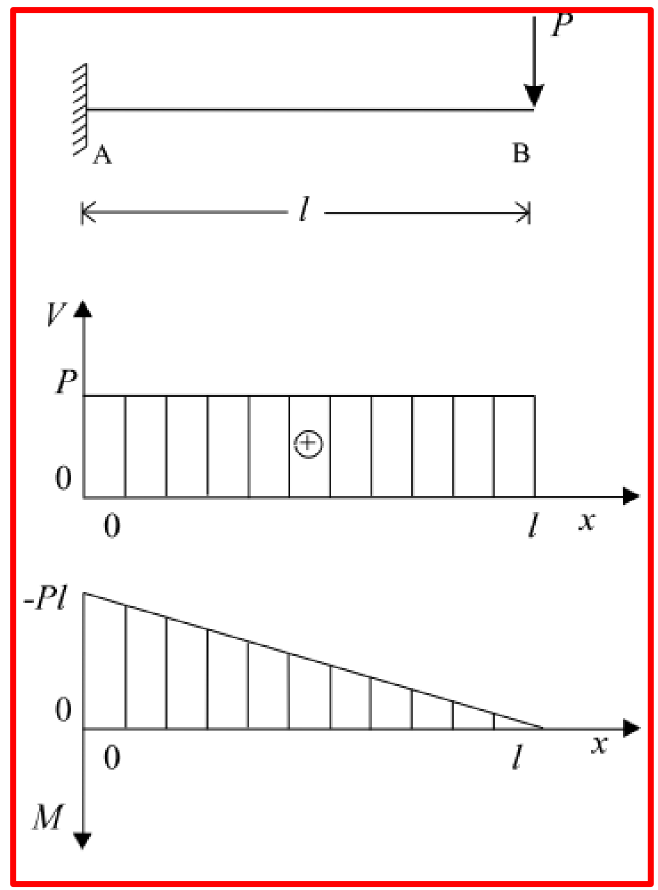

(a)

$$V_A = V(0) = P$$
$$V_B = V(l) = P$$
$$M_A = M(0) = -Pl$$
$$M_B = M(l) = 0$$



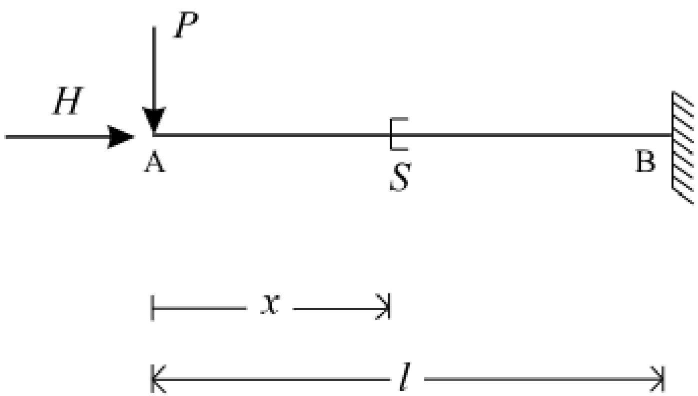

(b)

$$V(x) = P$$
$$M(x) = -P(l - x)$$

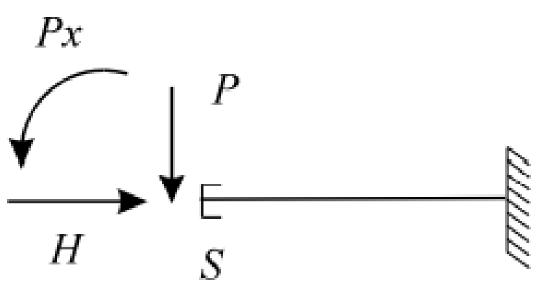


**Exercício 2.**

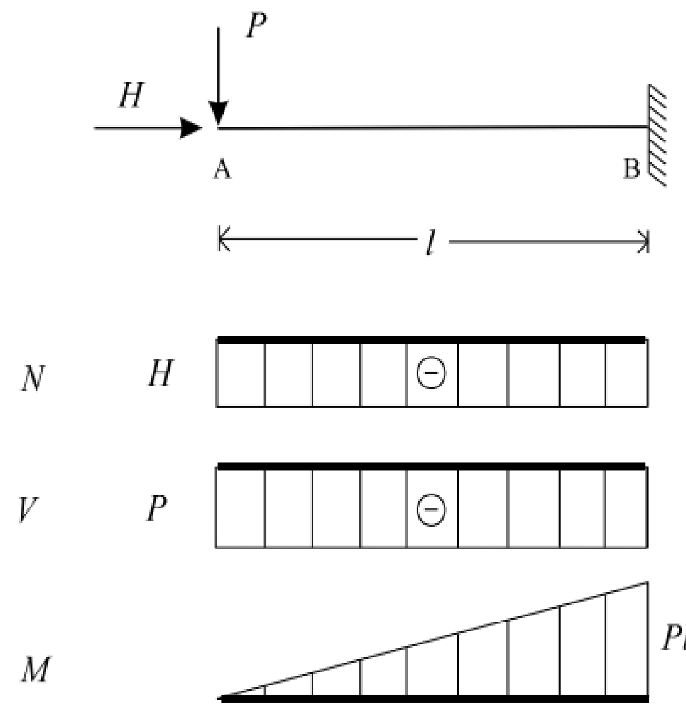
**Esboce os diagramas dos esforços solicitantes da viga em balanço da figura**

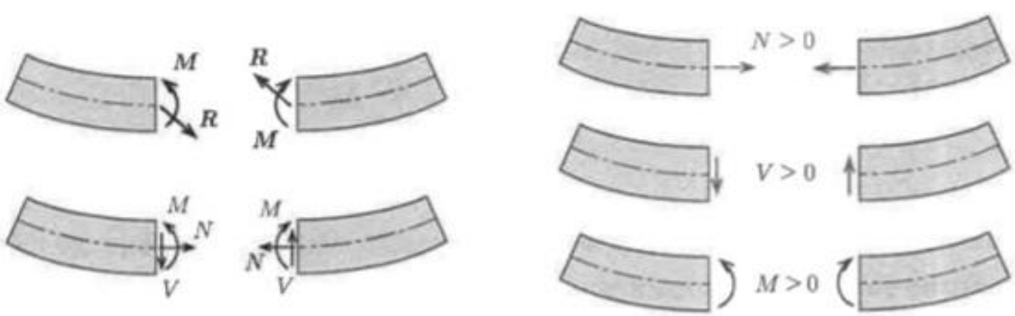



$$N(0) = -H$$
$$N(l) = -H$$
$$V(0) = -P$$
$$V(l) = -P$$
$$M(0) = 0$$
$$M(l) = -Pl$$



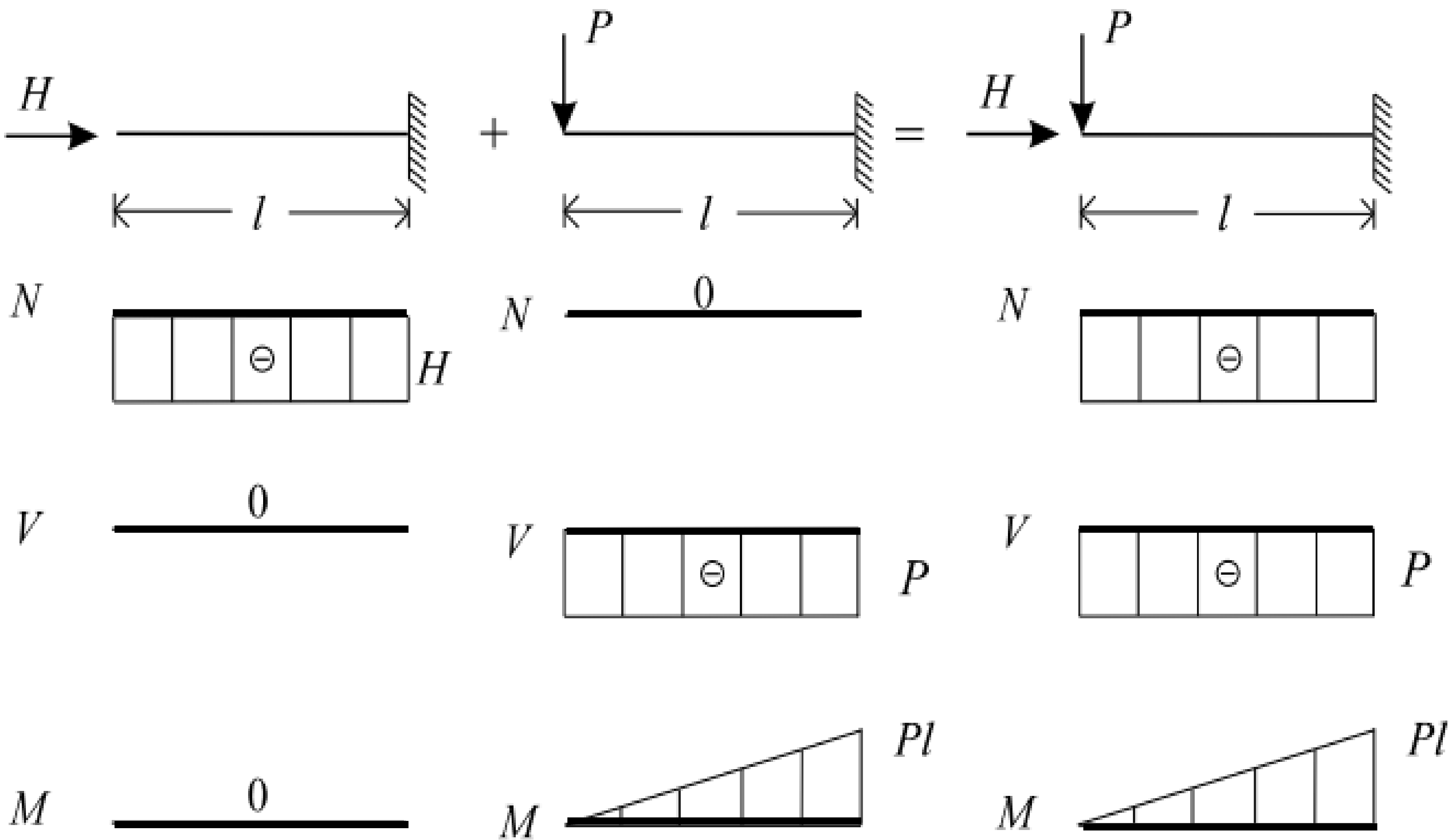

$$N(x) = -H$$
$$V(x) = -P$$
$$M(x) = -Px$$



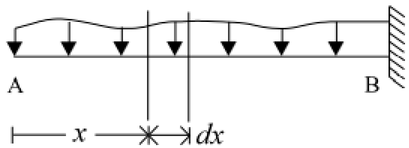

Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

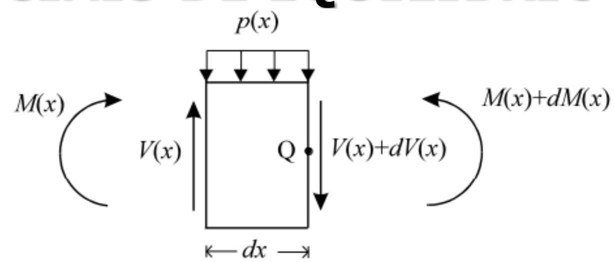
# PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO DE EFEITOS




Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO




$$1.\ \sum Y = 0 = V(x) - p(x) * dx - (V(x) + dV(x)) \Longrightarrow \frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$$

$$2.\ M(S_Q) = 0 = -M(x) - V(x) * dx + p(x) * dx * \frac{dx}{2} + \left(M(x) + dM(x)\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

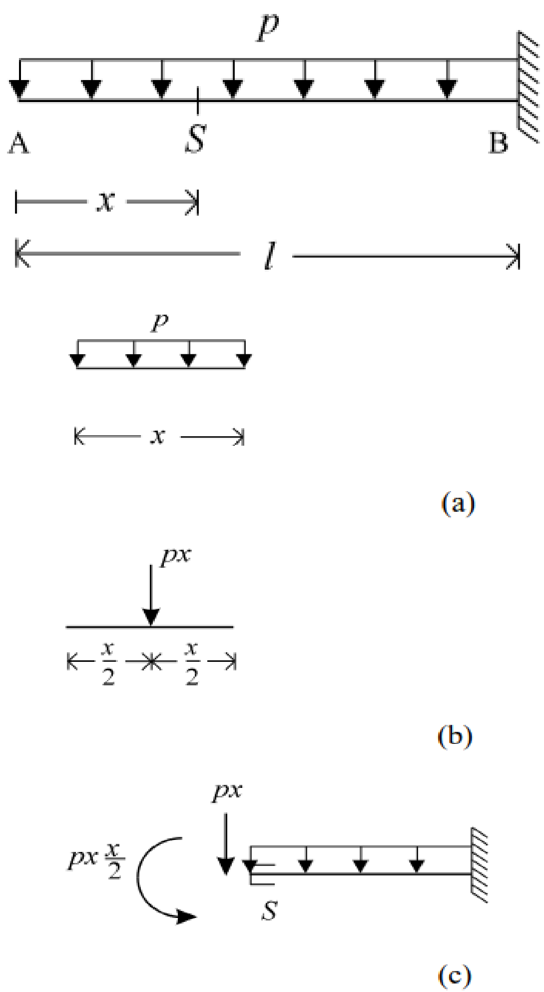
$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$$

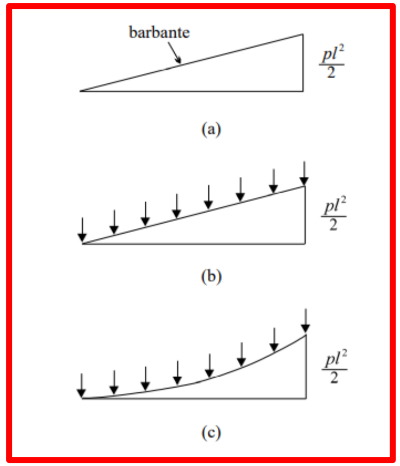
$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$V$ – *força cortante*
$M$ – *momento fletor*
$p$ – *força distribuída*
$x$ – *origem em A*

# Exercício 3.

## TRACE OS DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES DA VIGA EM BALANÇO DA FIGURA



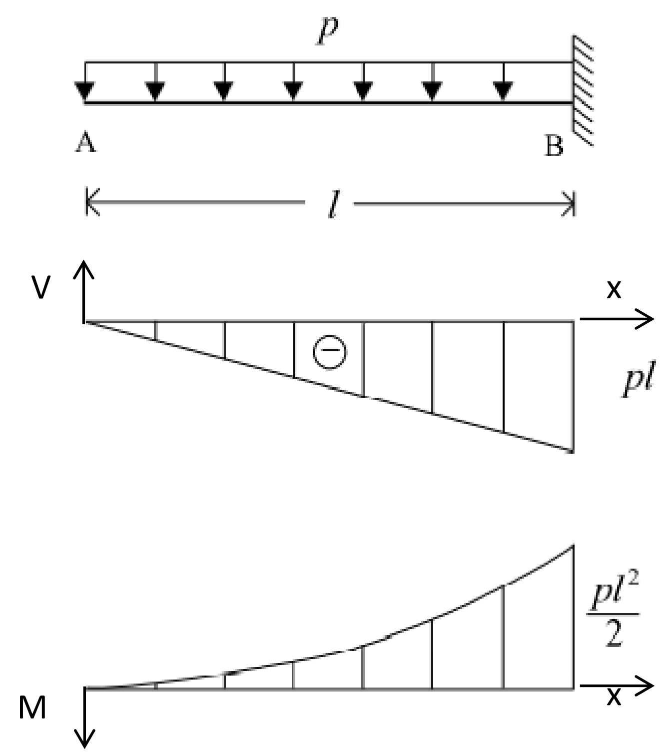




$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

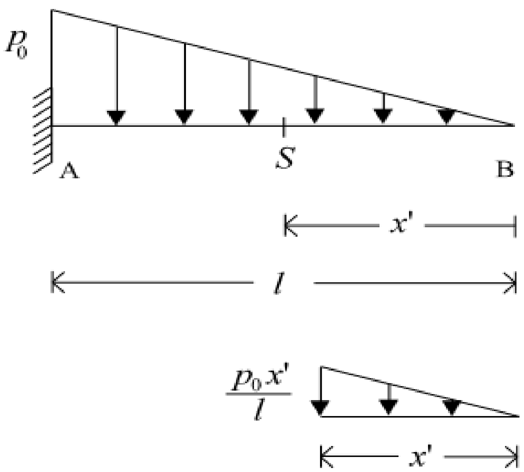
$$N(x) = 0$$
$$V(x) = -px$$
$$M(x) = \frac{-px^2}{2}$$

$$V(0) = 0$$
$$V(l) = -p.l$$
$$M(0) = 0$$
$$M(l) = -\frac{p.l^2}{2}$$




Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

# Exercício 4.
# Trace os diagramas dos esforços solicitantes da viga em balanço da figura




(a)

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$$

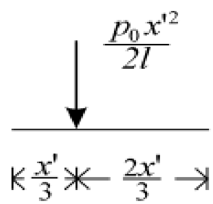
$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$$V(0) = 0$$

$$V(l) = \frac{p_0 l}{2}$$

$$M(0) = 0$$

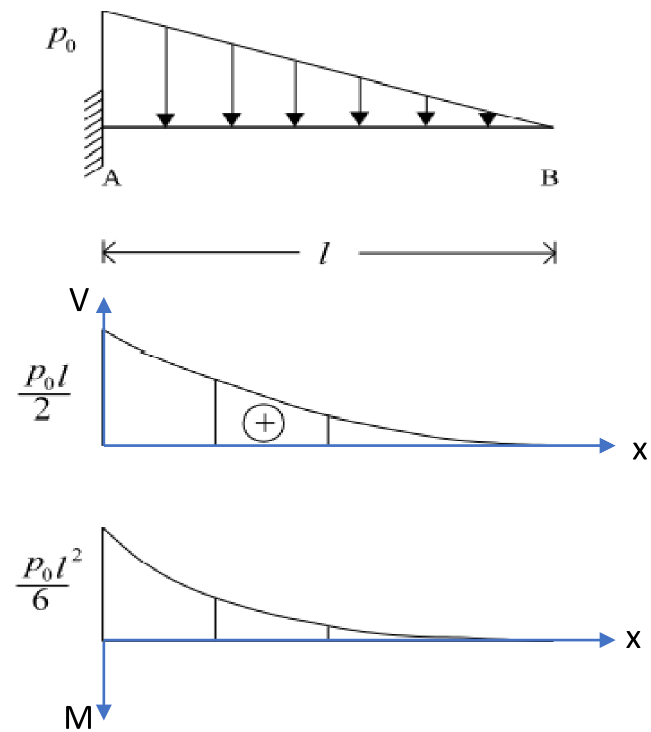
$$M(l) = -\frac{p_0 . l^2}{6}$$

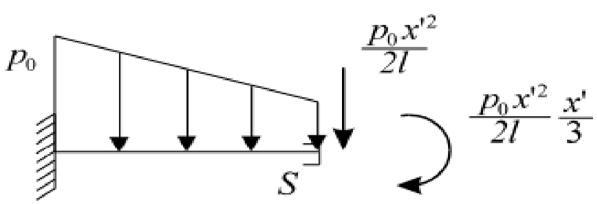



(b)

$$V(x') = \frac{p_0 (x')^2}{2l}$$

$$M(x') = \frac{-p_0 (x')^3}{6l}$$

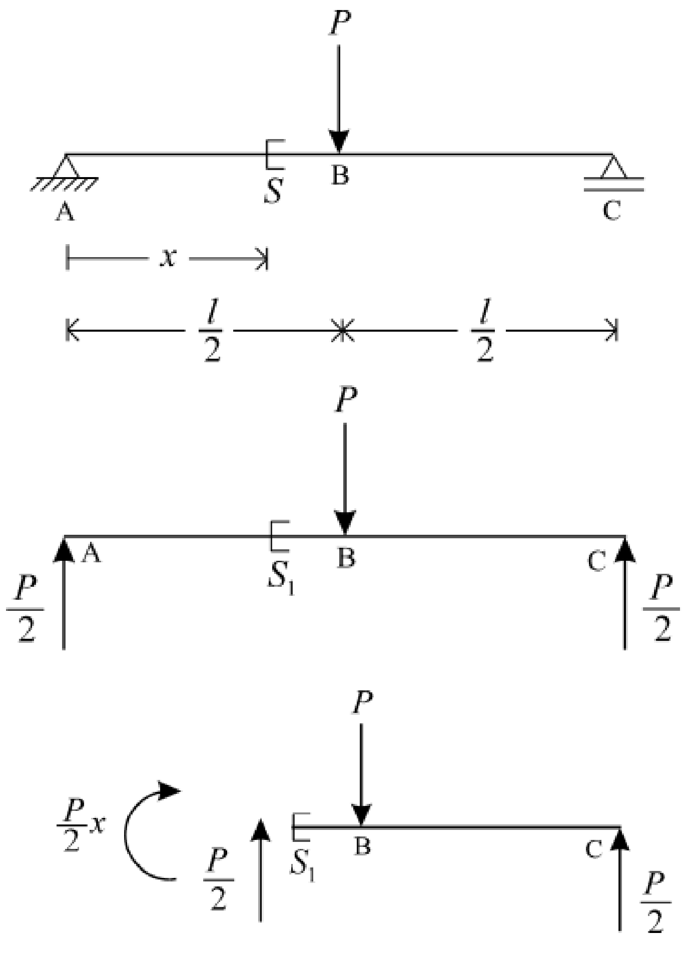


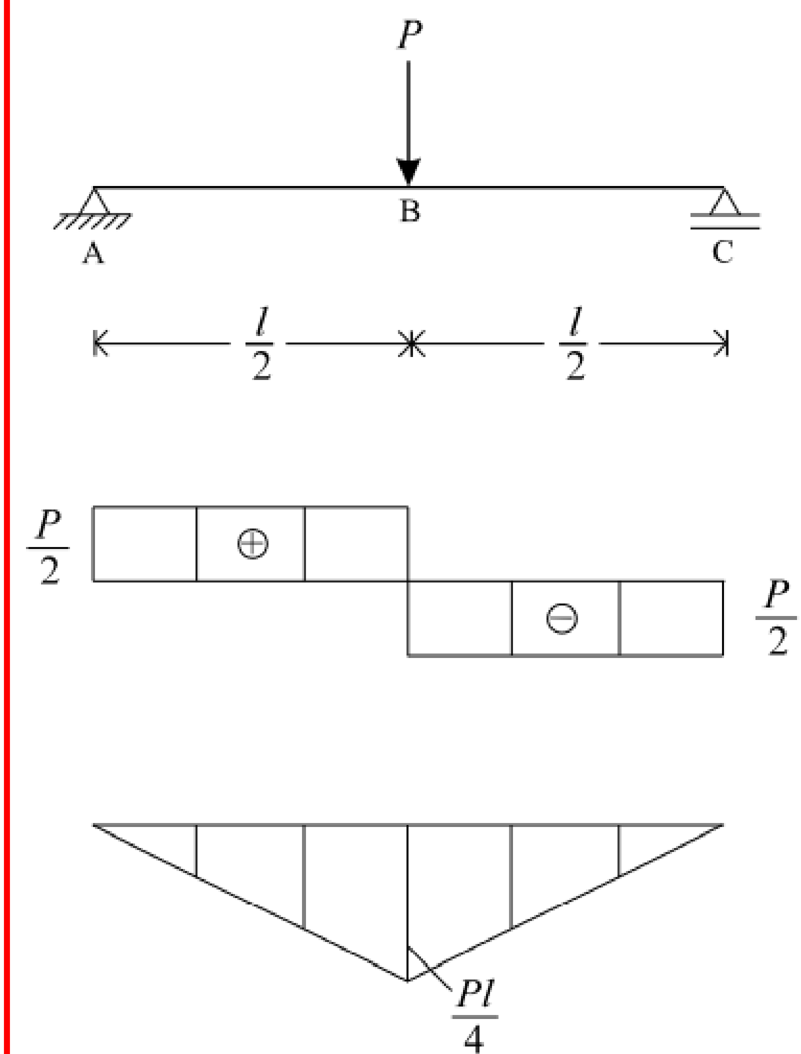

(c)

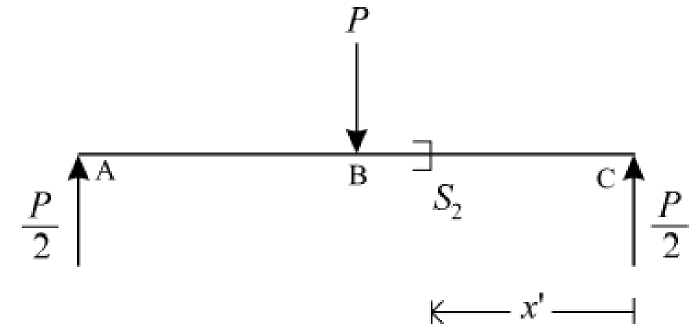
Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

# Exercício 5.
## Trace os diagramas dos esforços solicitantes

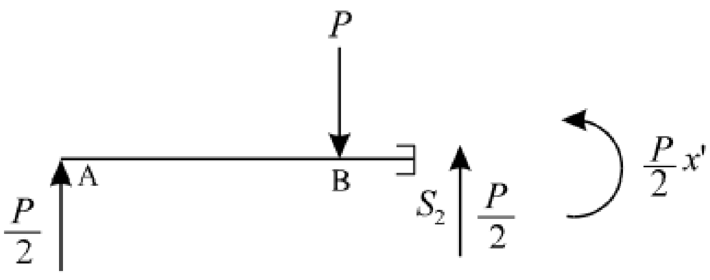



$$V_{S1}(x) = \frac{P}{2}; M_{S1}(x) = \frac{P}{2}x$$






(a)

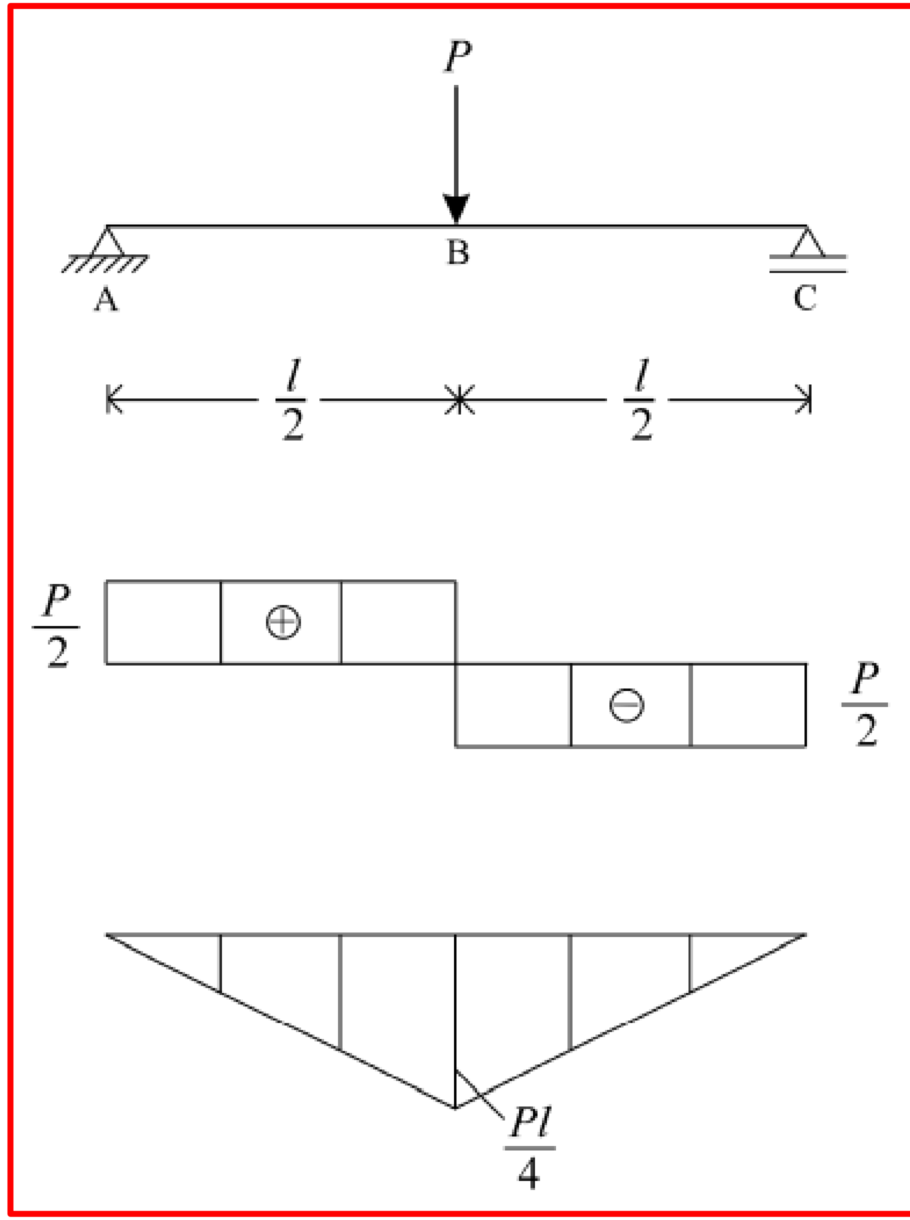



$$V_{S2}(x') = -\frac{P}{2}$$

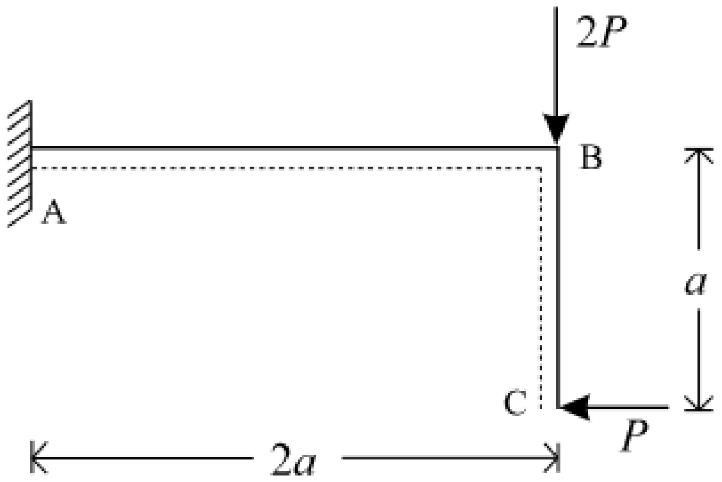
$$M_{S2}(x') = \frac{P}{2}x'$$

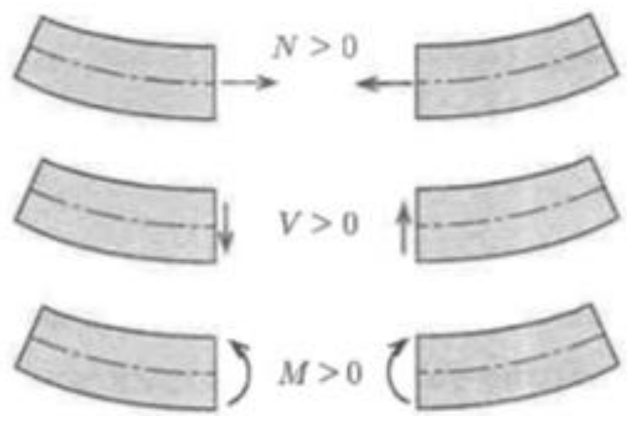
$$V_C = -\frac{P}{2}; V_B = -\frac{P}{2}$$

$$M_C = \frac{P}{2}.0 = 0; M_B = \frac{P}{2}.\frac{l}{2} = \frac{Pl}{4}$$



## Exercício 6.
### Trace os diagramas dos esforços solicitantes

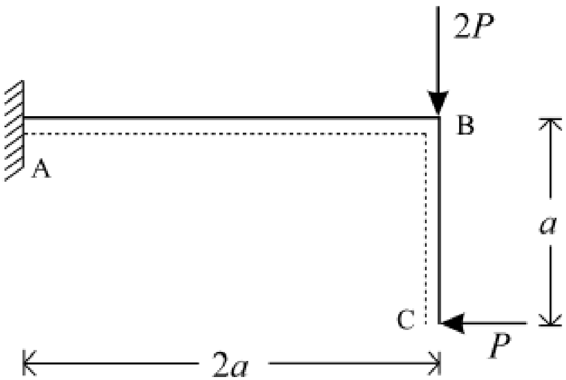


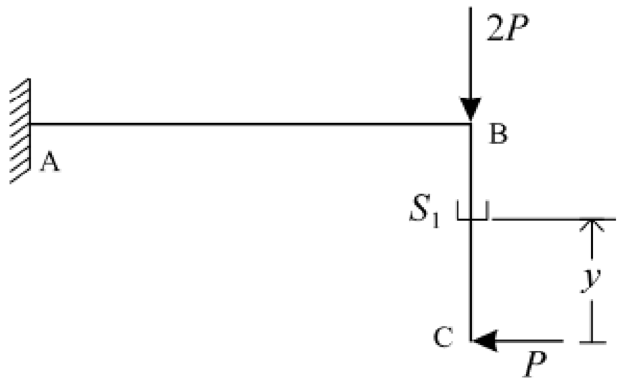




**Pelo Teorema do corte, divide-se a estrutura apenas em duas partes na seção de interesse.**

**Os esforços solicitantes que atuam em uma seção transversal de uma barra podem ser obtidos cortando a barra nesta seção e reduzindo/transferindo para o seu centro de gravidade todos os esforços externos aplicados do outro lado do corte.**

# Exercício 6.
## Trace os diagramas dos esforços solicitantes



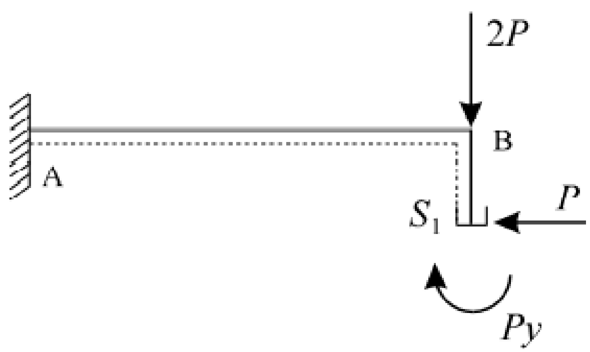



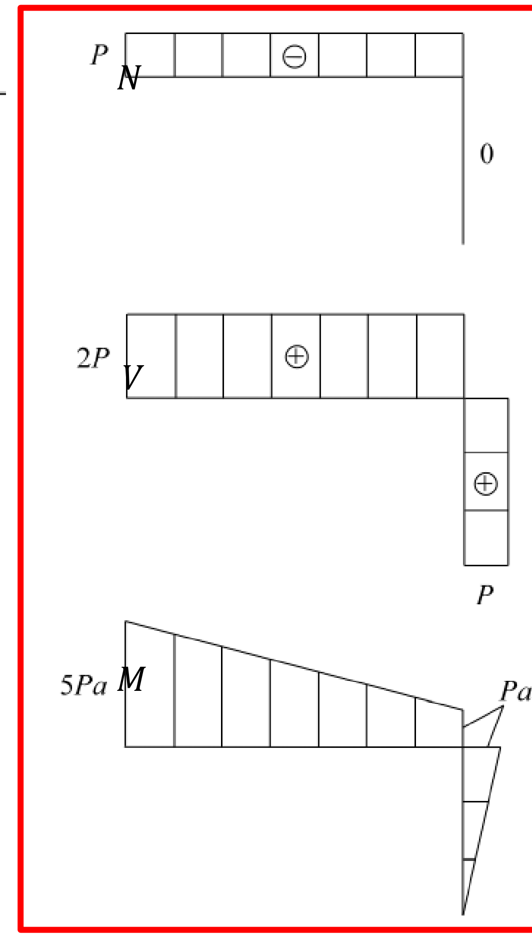

**Em $S_1$:**

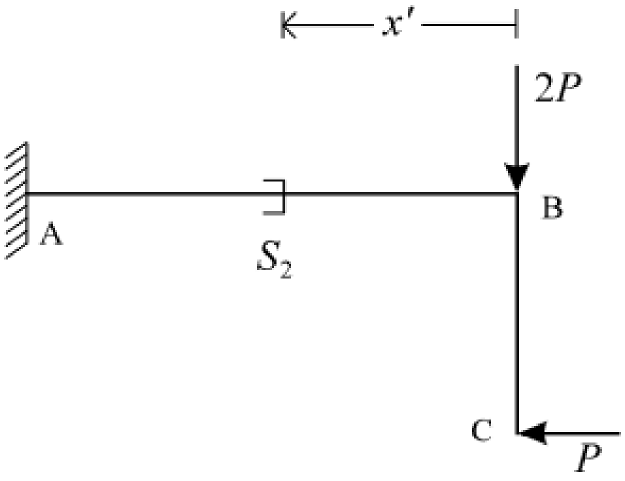
$N(y) = 0$

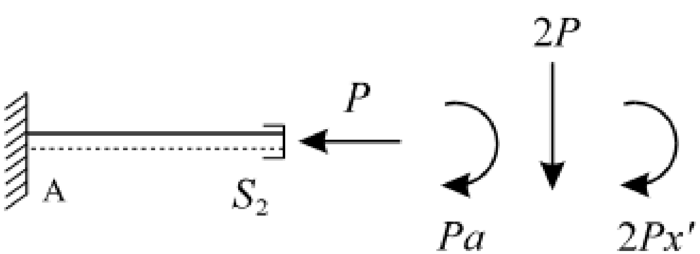
$V(y) = P$

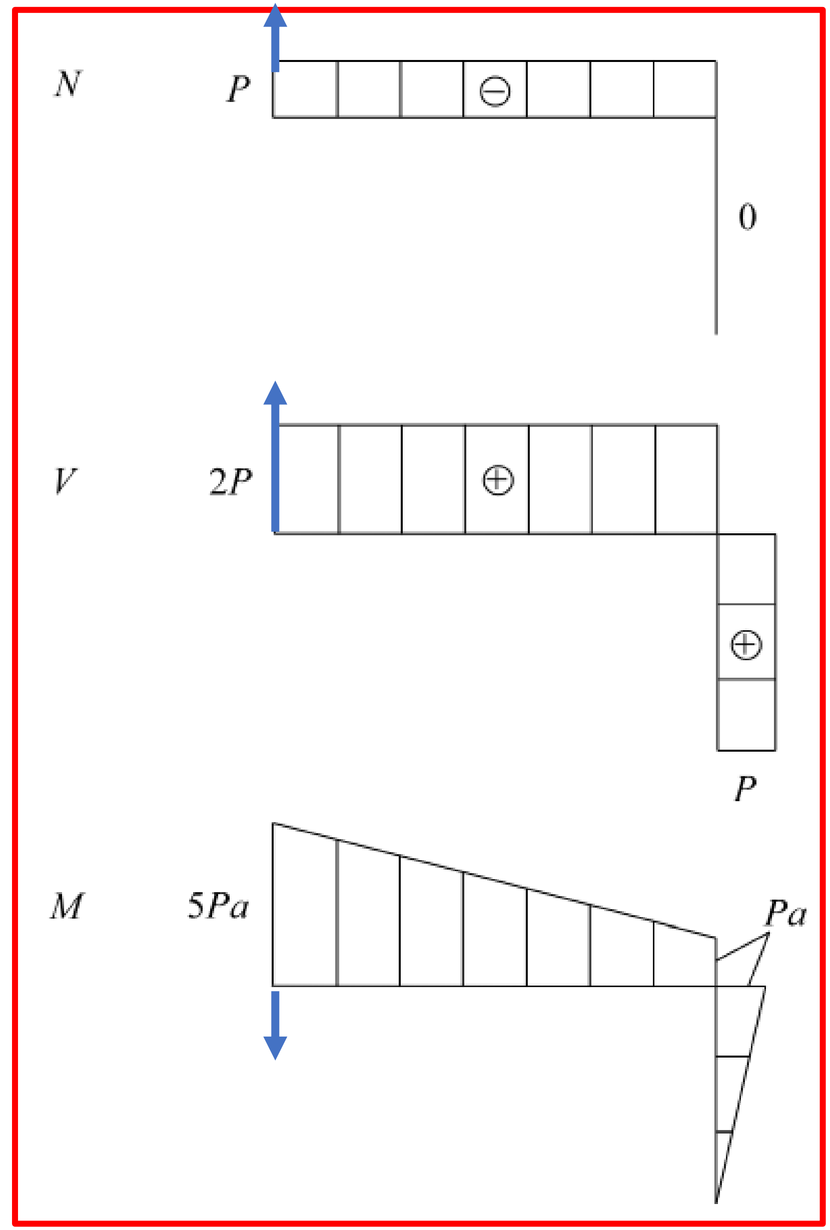
$M(y) = Py$





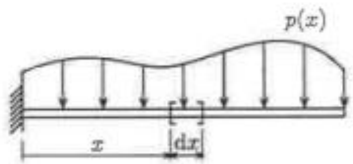

**Em $S_2$:**

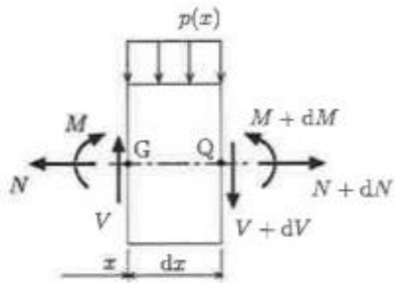
$$N(x') = -P$$

$$V(x') = +2P$$

$$M(x') = -2Px' - Pa$$

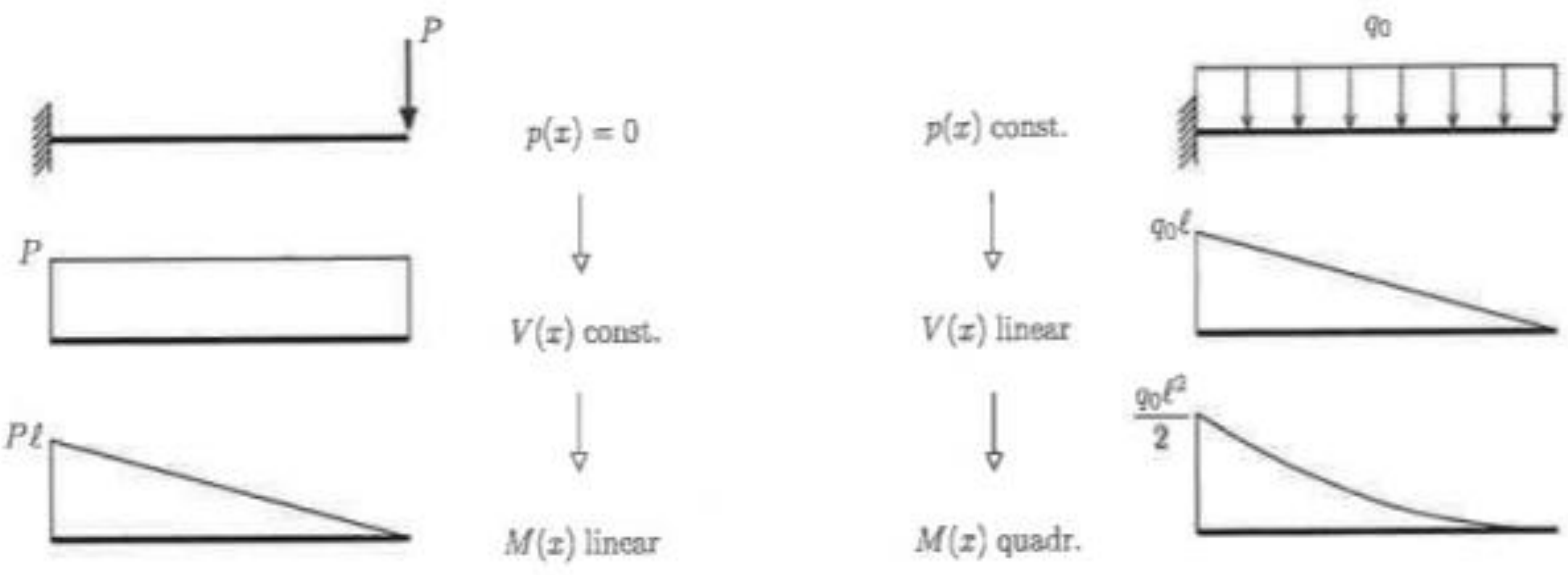
# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO



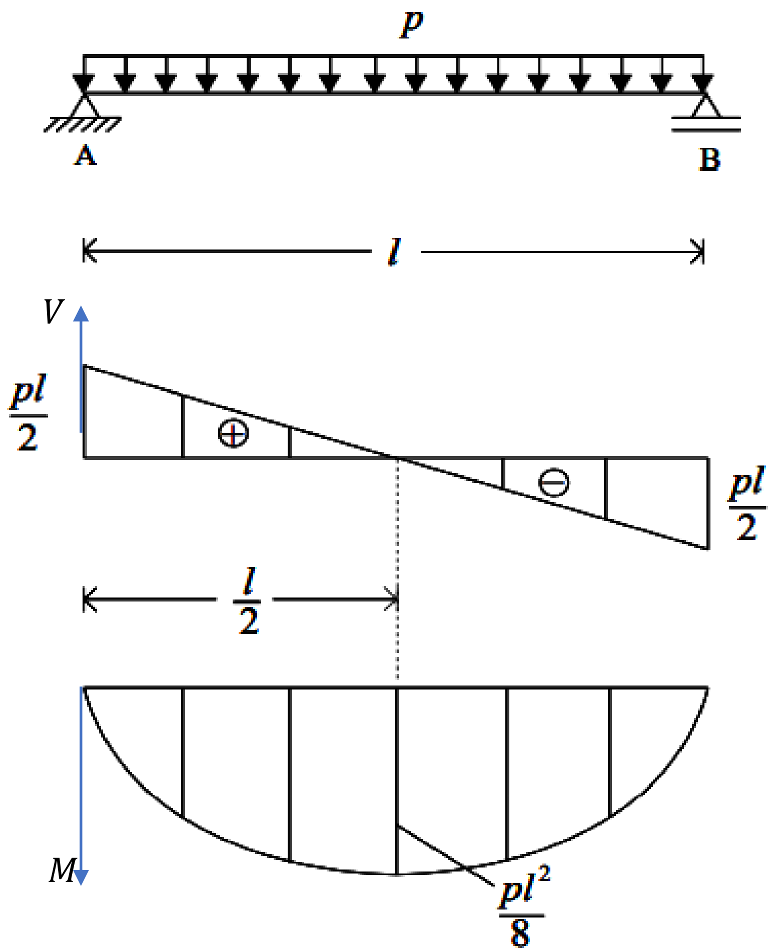



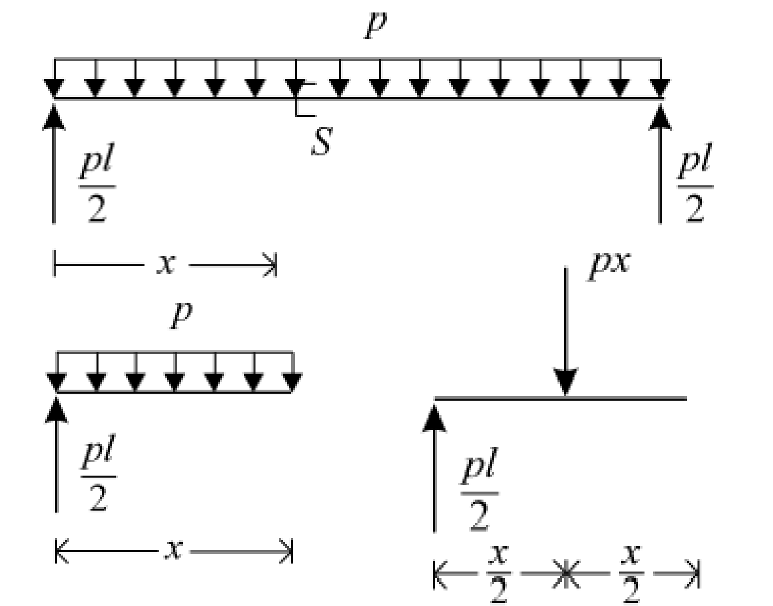

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = -p(x),$$

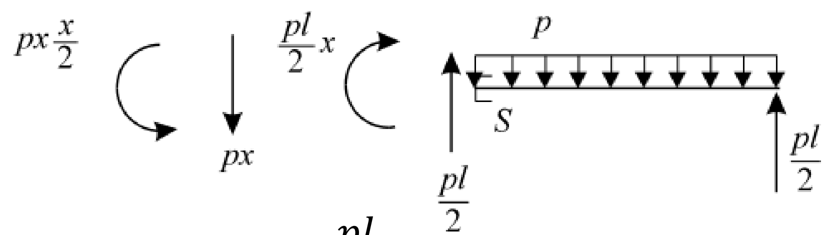
$p$ − *força distribuída*
$V$ − *força cortante*
$M$ − *momento fletor*
$x$ − *origem em A*



# Exercício 7.
## Trace os diagramas dos esforços solicitantes



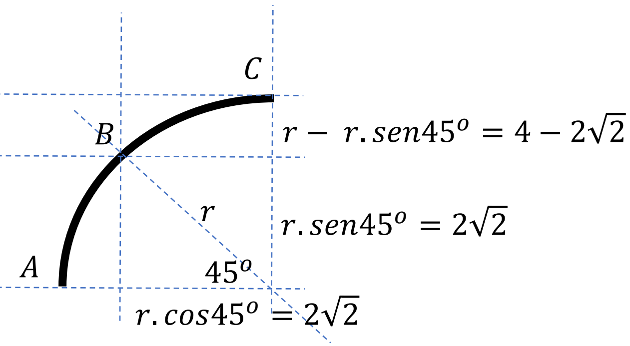

$$V_S(x) = -px + \frac{pl}{2}$$

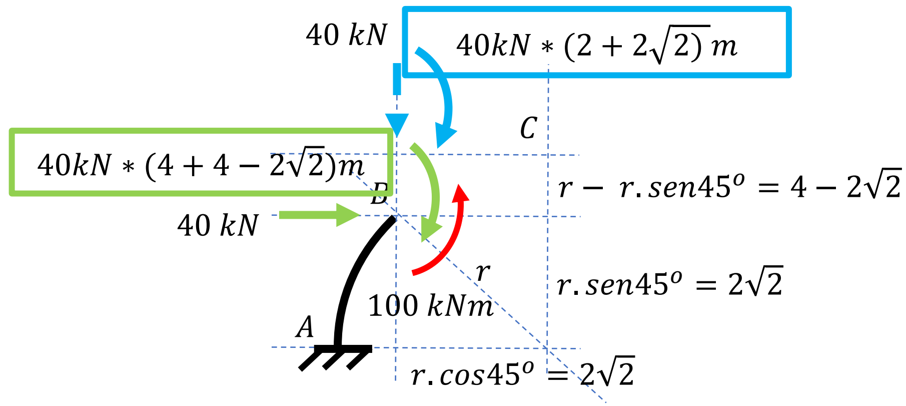
$$M_S(x) = -p\frac{x^2}{2} + \frac{pl}{2}x$$

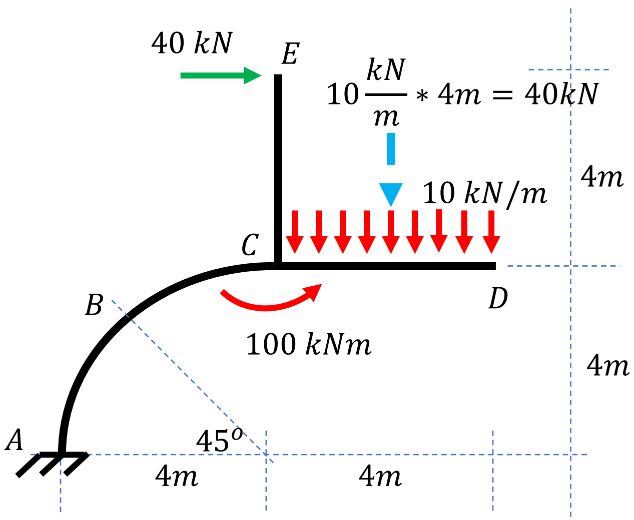
$$M_{máx}\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{pl^2}{8}$$

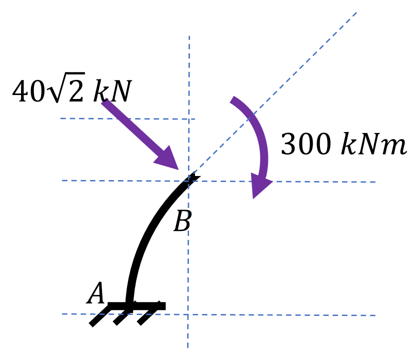
Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

# EXERCÍCIO 8.
## Determinar os esforços solicitantes em B



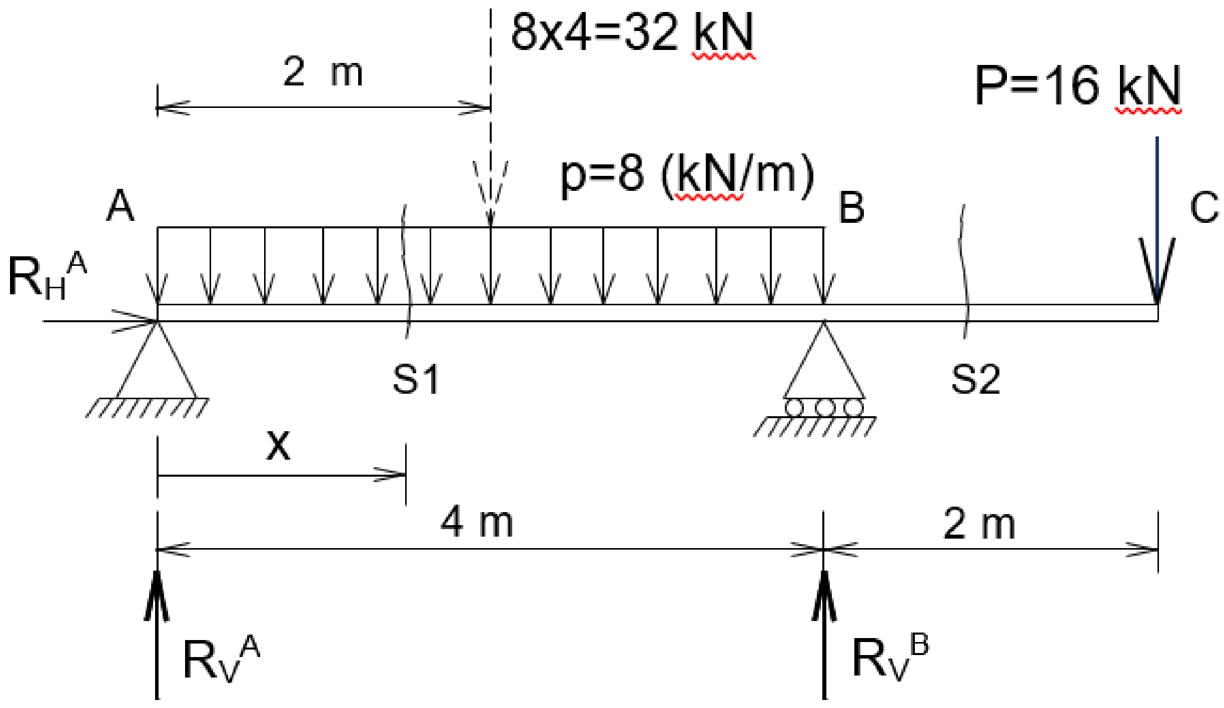




$N_B = 0$
$V_B = +40\sqrt{2}\ kN$
$M_B = -300 kNm$

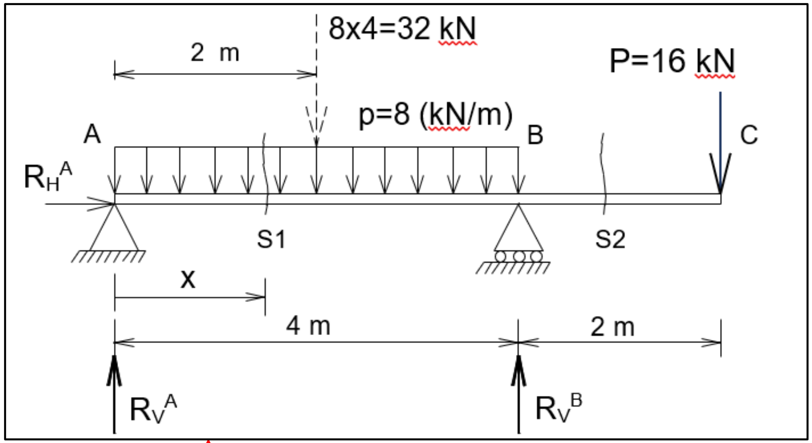
$$40 * (2 + 2\sqrt{2}) + 40 * (4 + 4 - 2\sqrt{2}) - 100 = 300\ kNm$$

**EXERCÍCIO 9.**

**Traçar os diagramas de estado da viga simplesmente apoiada com balanço à direita, com os carregamentos indicados (conforme modelo matemático na figura, é estrutura plana)**

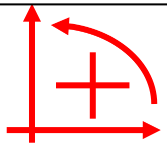


# *APLICANDO O EQUILÍBRIO*




**1. REAÇÕES NOS APOIOS**
**No equilíbrio**, adota-se a convenção de Grinter

•Primeira equação para o equilíbrio (**Resultante é zero**)



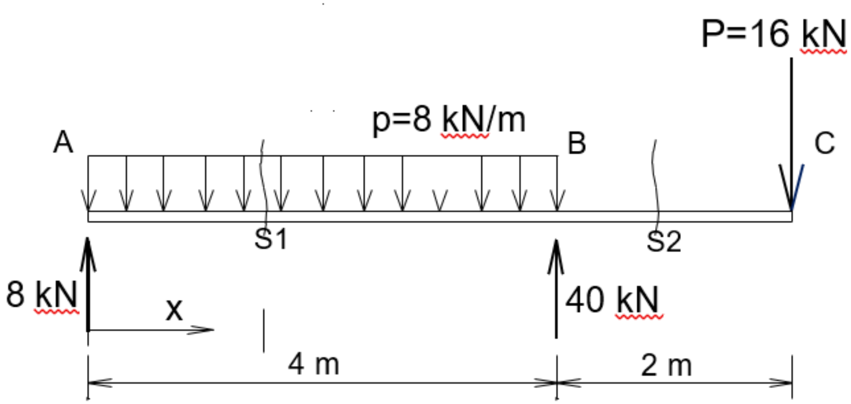
$\Sigma F_H = 0 = \mathbf{R_H^A}$
$\Sigma F_V = 0 = R_V^A - 32 + R_V^B - 16$

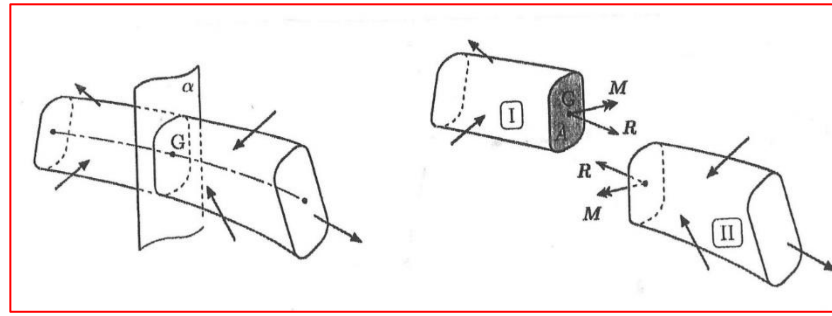
•Segunda equação para o equilíbrio (**Momento em torno de qualquer eixo é zero**)

Em torno do eixo ortogonal ao plano da figura, em A:
$\Sigma M_{(A)} = 0 = -32 \cdot 2 + R_V^B \cdot 4 - 16 \cdot 6 \Longrightarrow \mathbf{R_V^B = 40\ kN}$

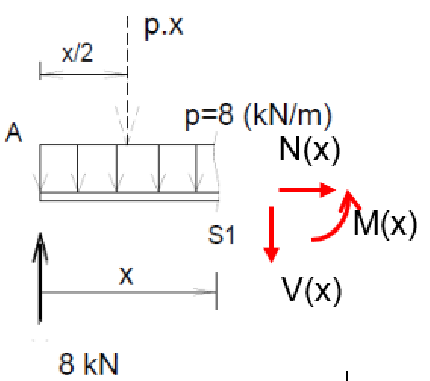
Em torno do eixo ortogonal ao plano da figura, em B:
$\Sigma M_{(B)} = 0 = -R_V^A \cdot 4 + 32 \cdot 2 - 16 \cdot 2 \Longrightarrow \mathbf{R_V^A = 8\ kN}$.

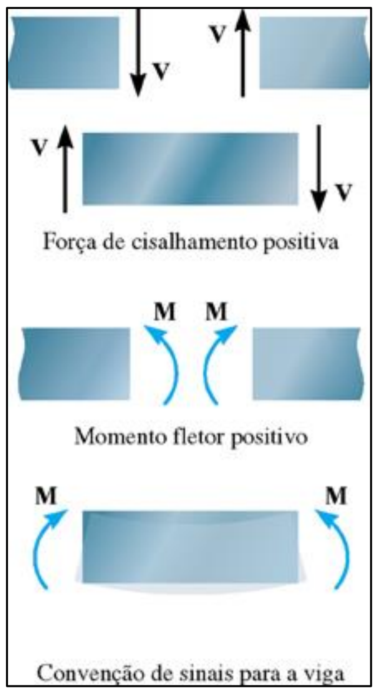
## 2. DIAGRAMA DO CORPO LIVRE

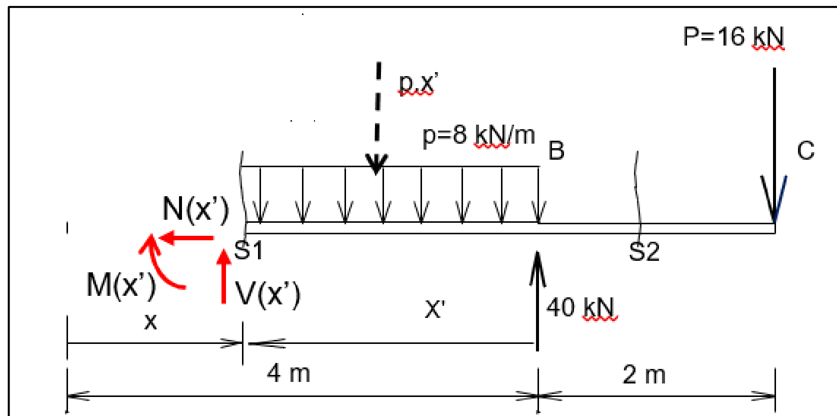


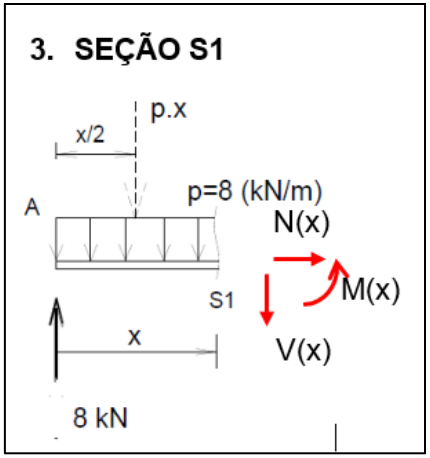



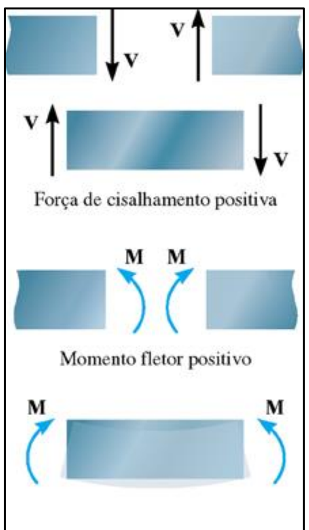

## 3. SEÇÃO S1





Convenção de sinais para a viga

- Primeira equação para o equilíbrio (**Resultante é zero**)

$\sum F_H = 0 = N(x)$

$\sum F_V = 0 = 8 - 8.x - V(x) \Longrightarrow \boldsymbol{V(x) = -8.x + 8}$

- Segunda equação para o equilíbrio (**Momento em torno de qualquer eixo é zero**)

Em torno do eixo ortogonal ao plano da figura, em S1:

$\sum M_{(S1)} = 0 = -8.x + 8.x.\frac{x}{2} + M(x) \Longrightarrow \boldsymbol{M(x) = -4.x^2 + 8.x}$

- Trecho de A ($x = 0$) até B ($x = 4$)

$V_A = -8.0 + 8 = 8$ ;

$V_B = -8.4 + 8 = -24$ ;

$M_A = -4.0^2 + 8.0 = 0$;

$M_B = -4.4^2 + 8.4 = -32$;

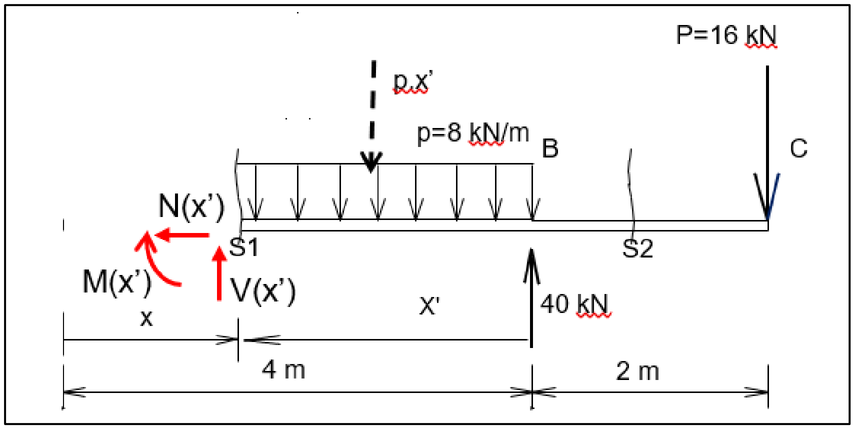
$M_{(x=1)} = -4.1^2 + 8.1 = 4$

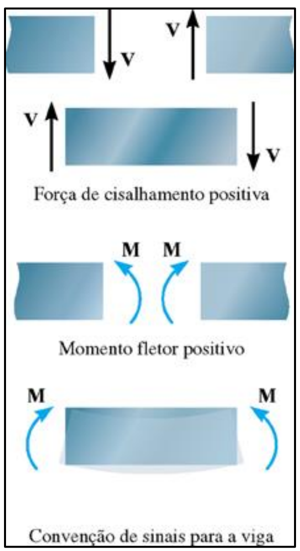
$p - força\ distribuída$
$V - força\ cortante$
$M - momento\ fletor$
$x - origem\ em\ A$

$\boldsymbol{\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)}$ ; $\boldsymbol{\frac{dM(x)}{dx} = V(x)}$

***APLICANDO O EQUILÍBRIO***

# *APLICANDO O EQUILÍBRIO*




$p - força\ distribuída$
$V - força\ cortante$
$M - momento\ fletor$
$x - origem\ em\ A$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x) \quad ; \quad \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

- Primeira equação para o equilíbrio (**Resultante é zero**)

$\sum F_H = 0 = -N(x') \Longrightarrow N(x') = 0$

$\sum F_V = 0 = V(x') - 8.x' + 40 - 16 \quad \Longrightarrow$ $\boldsymbol{V(x') = 8.x' - 24}$

- Segunda equação para o equilíbrio (**Momento em torno de qualquer eixo é zero**)

Em torno do eixo ortogonal ao plano da figura, em S1:

$$\sum M_{(S1)} = 0 = -M(x') - 8.x'.\frac{x'}{2} + 40.x' - 16.(x' + 2)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{M(x') = -4.x'^2 + 24.x' - 32}$$

- Trecho de B $(x' = 0)$ até A $(x' = 4)$ :

$$V_B = 8.0 - 24 = -24;$$
$$V_A = 8.4 - 24 = 8\ ;$$
$$M_B = -4.0^2 + 24.0 - 32 = -32;$$
$$M_A = -4.4^2 + 24.4 - 32 = 0$$
$$M_{(x'=3)} = -4.3^2 + 24.3 - 32 = 4$$

- Primeira equação para o equilíbrio (**Resultante é zero**)

$\sum F_H = 0 = N(x)$

$\sum F_V = 0 = 8 - 8.x - V(x) \Longrightarrow \mathbf{V(x) = -8.x + 8}$

- Segunda equação para o equilíbrio (**Momento em torno de qualquer eixo é zero**)

Em torno do eixo ortogonal ao plano da figura, em S1:

$\sum M_{(S1)} = 0 = -8.x + 8.x.\frac{x}{2} + M(x) \Longrightarrow \mathbf{M(x) = -4.x^2 + 8.x}$

- Trecho de A $(x = 0)$ até B $(x = 4)$

$$V_A = -8.0 + 8 = 8\,;$$
$$V_B = -8.4 + 8 = -24\,;$$
$$M_A = -4.0^2 + 8.0 = 0;$$
$$M_B = -4.4^2 + 8.4 = -32;$$
$$M_{(x=1)} = -4.1^2 + 8.1 = 4$$

- Primeira equação para o equilíbrio (**Resultante é zero**)

$\sum F_H = 0 = -N(x') \Longrightarrow N(x') = 0$

$\sum F_V = 0 = V(x') - 8.x' + 40 - 16 \Longrightarrow \mathbf{V(x') = 8.x' - 24}$

- Segunda equação para o equilíbrio (**Momento em torno de qualquer eixo é zero**)

Em torno do eixo ortogonal ao plano da figura, em S1:

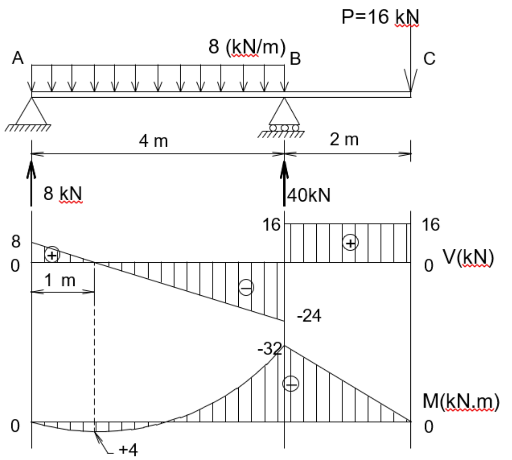
$\sum M_{(S1)} = 0 = -M(x') - 8.x'.\frac{x'}{2} + 40.x' - 16.(x' + 2) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \mathbf{M(x') = -4.x'^2 + 24.x' - 32}$

- Trecho de B $(x' = 0)$ até A $(x' = 4)$ :

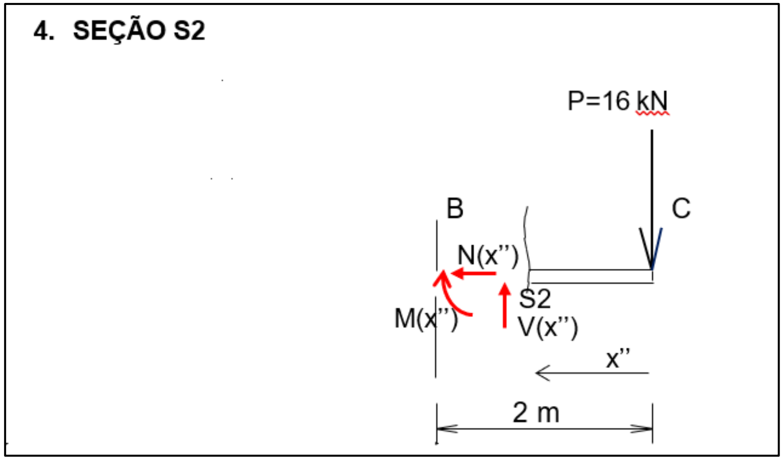
$$V_B = 8.0 - 24 = -24;$$
$$V_A = 8.4 - 24 = 8\,;$$
$$M_B = -4.0^2 + 24.0 - 32 = -32;$$
$$M_A = -4.4^2 + 24.4 - 32 = 0$$
$$M_{(x'=3)} = -4.3^2 + 24.3 - 32 = 4$$

**5. DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES**




**Observe que, considerando a parte da esquerda como a parte da direita, as funções de x e as funções de x' são diferentes, mas os valores das forças cortantes e dos momentos fletores são iguais.**

***APLICANDO O EQUILÍBRIO***




- Primeira equação para o equilíbrio (**Resultante é zero**)

$\sum F_H = 0 = N(x'')$

$\sum F_V = 0 = V(x'') - 16 \Longrightarrow \boldsymbol{V(x'') = 16}$

- Segunda equação para o equilíbrio (**Momento em torno de qualquer eixo é zero**)

Em torno do eixo ortogonal ao plano da figura, em S2:

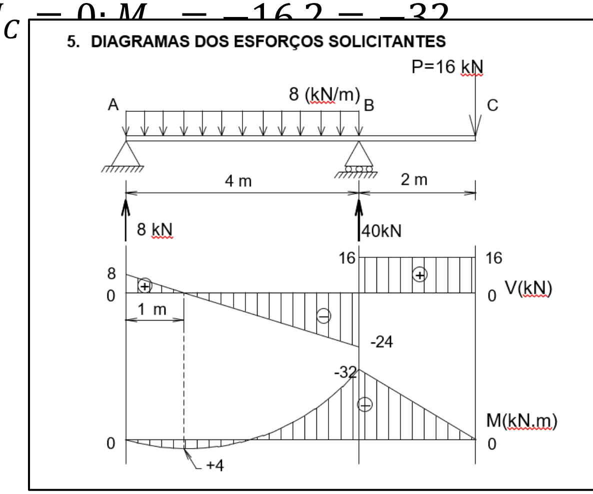
$\sum M_{(S2)} = 0 = -16.x'' - M(x'') \Longrightarrow \boldsymbol{M(x'') = -16.x''}$

Trecho de C ($x'' = 0$) até B ($x'' = 2$):

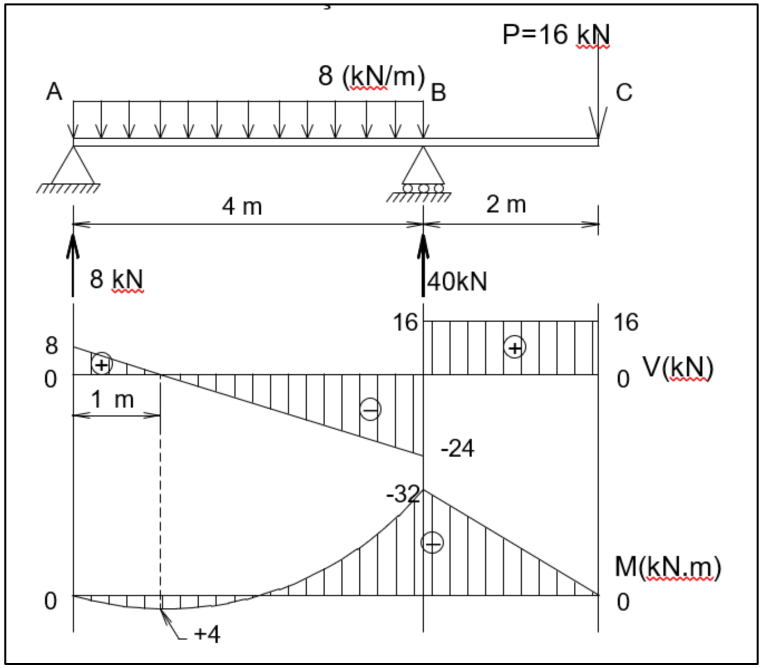
$V_C = 16\,;\ V_B = 16;\ M_C = 0;\ M_B = -16.2 = -32$

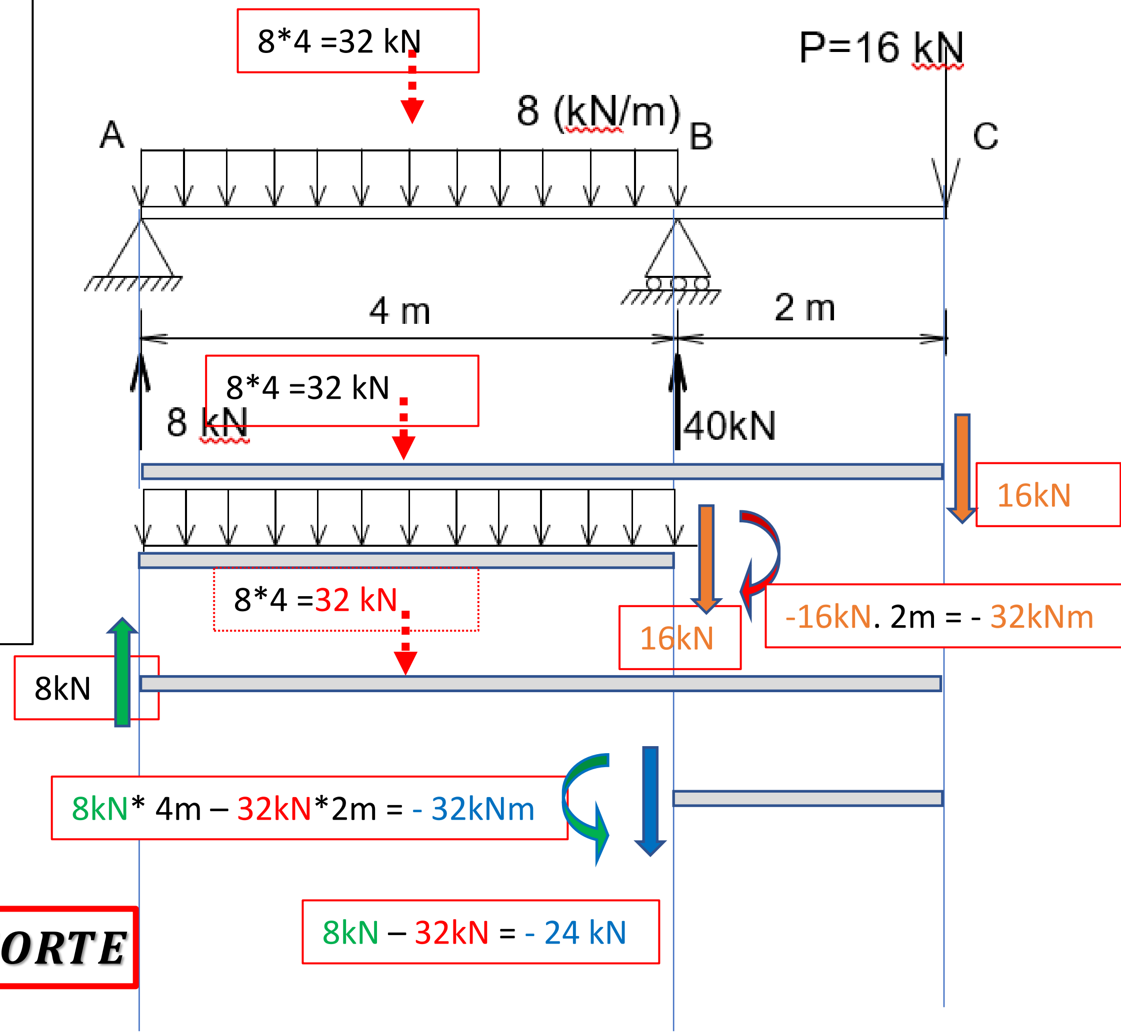
$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x) \quad ; \quad \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

$p -$ *força distribuída*
$V -$ *força cortante*
$M -$ *momento fletor*
$x -$ *origem em A*




***APLICANDO O EQUILÍBRIO***

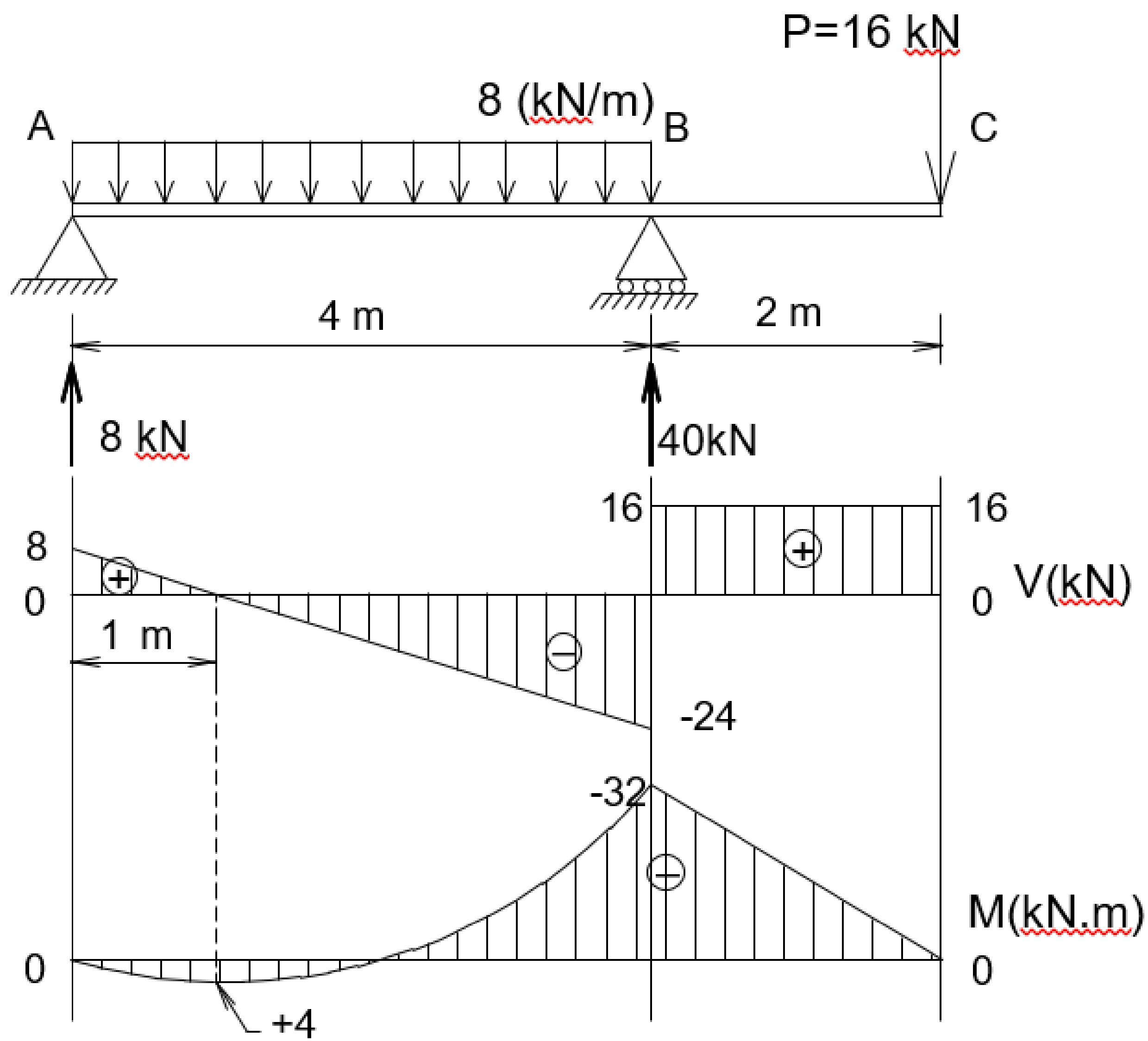


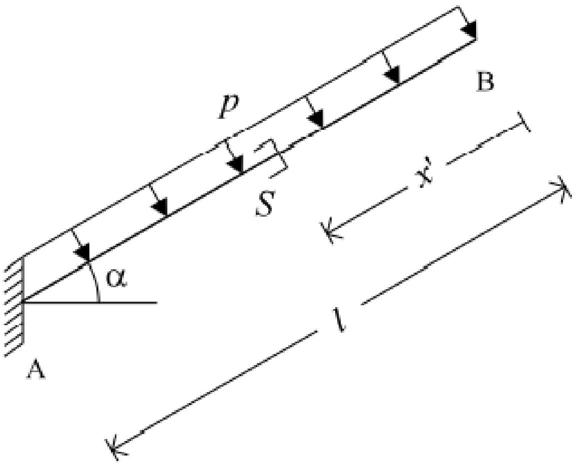

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)\ ;\ \frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

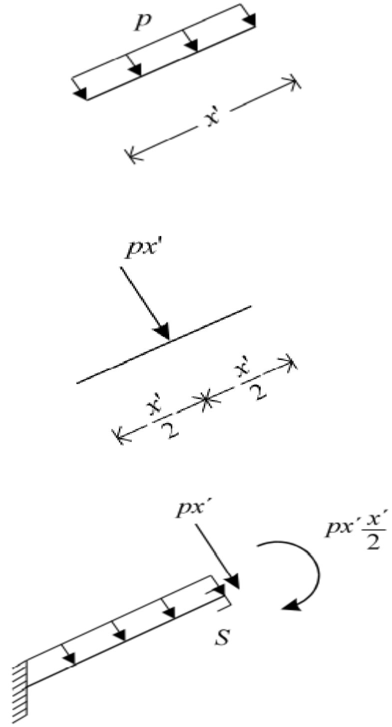
# *APLICANDO O TEOREMA DO CORTE*

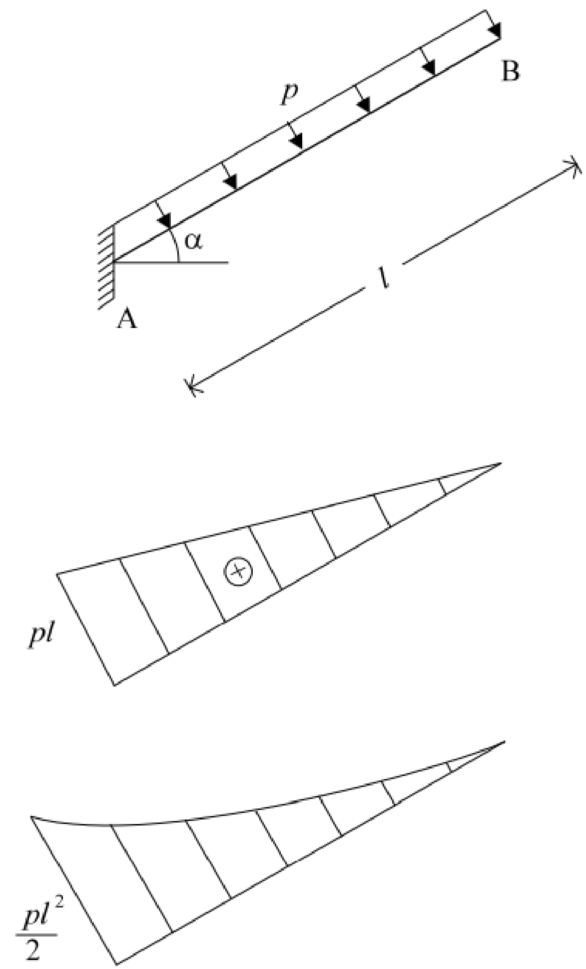
## 5. DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES



# EXERCÍCIO 11.
## Traçar os diagramas dos esforços solicitantes da viga em balanço



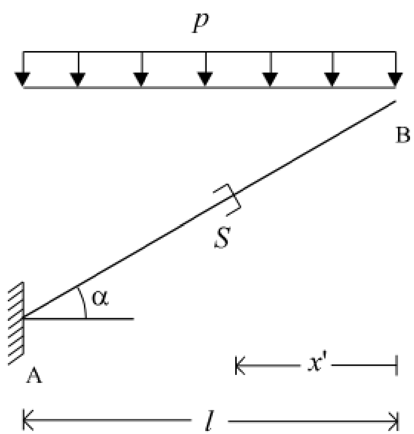

$$N(x') = 0$$
$$V(x') = +px' \Longrightarrow V_A = V(l) = pl$$
$$M(x') = -\frac{p(x')^2}{2} \Longrightarrow M_A = M(l) = -\frac{pl^2}{2}$$

***APLICANDO O TEOREMA DO CORTE***

Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997

# EXERCÍCIO 12.

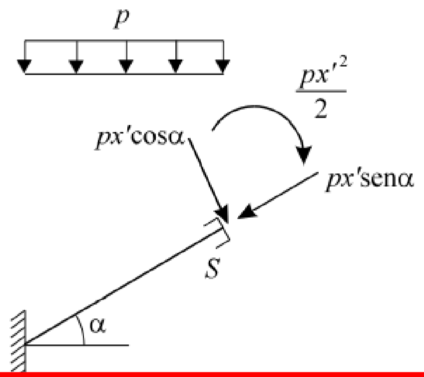
## Traçar o diagrama dos esforços solicitantes na viga poligonal




$$N(x') = -px' sen\alpha$$

$$V(x') = px' \cos\alpha$$

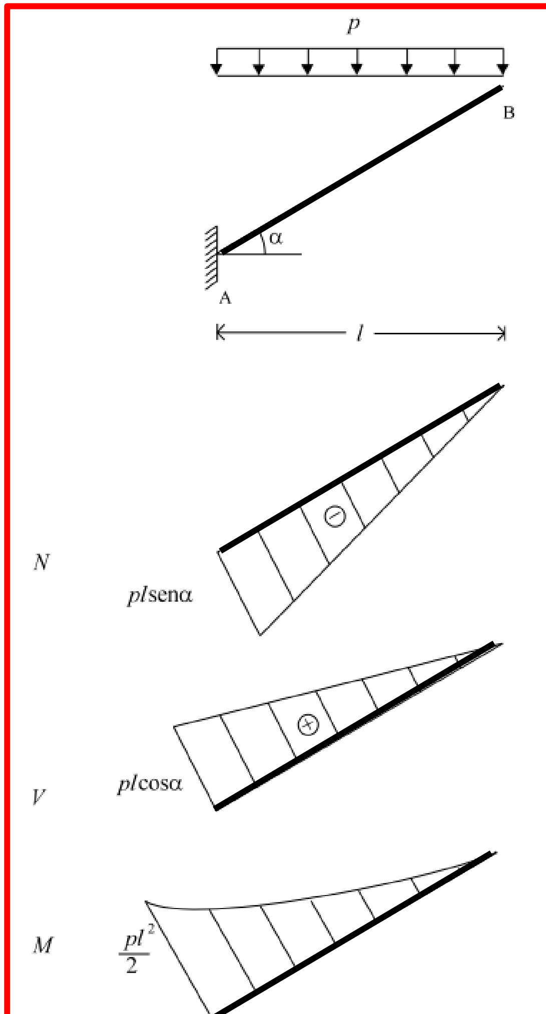
$$M(x') = -\frac{px'^2}{2}.$$




$$N(0) = 0; N(l) = -plsen\alpha$$

$$V(0) = 0; V(l) = plcos\alpha$$

$$M(0) = 0; M(l) = -\frac{pl^2}{2}$$

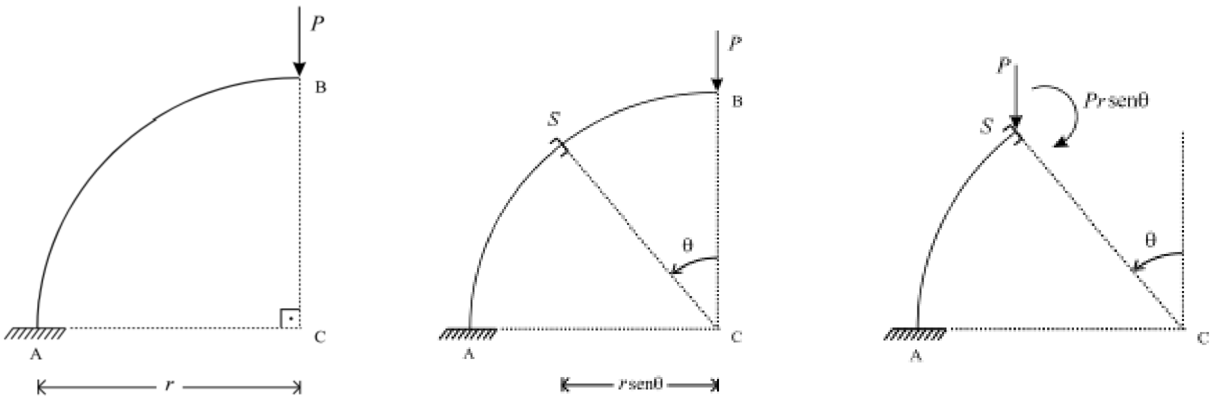


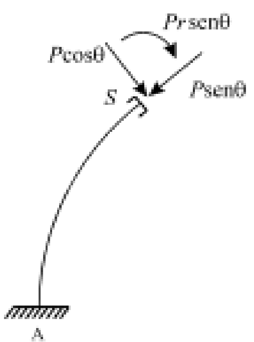

***APLICANDO O TEOREMA DO CORTE***

**Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997**

# EXERCÍCIO 13.

## Traçar o diagrama dos esforços solicitantes na viga poligonal




$$N(\theta) = -P\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$V(\theta) = P\cos\theta$$

$$M(\theta) = -Pr\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$N(B) = N(0) = 0$$

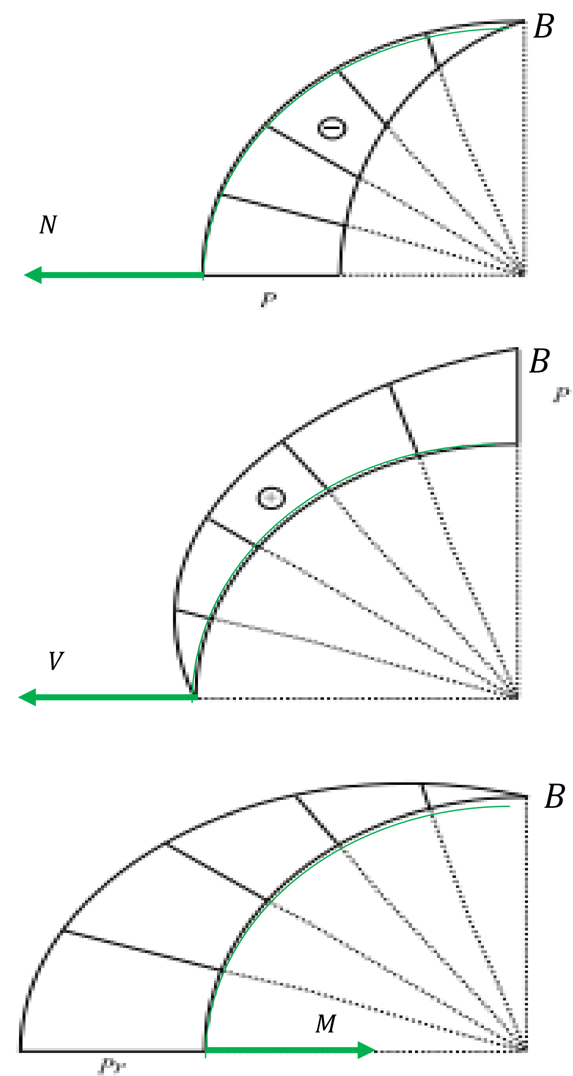
$$N(A) = N\left(\frac{\pi}{2}\right) = -P$$

$$V(B) = V(0) = P$$

$$V(A) = V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$M(B) = M(0) = 0$$

$$M(A) = M\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{Pr}$$

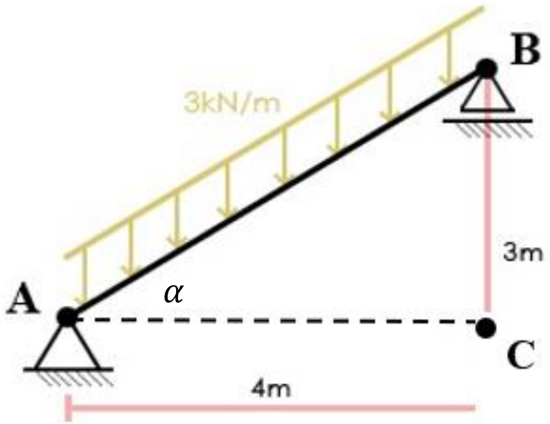


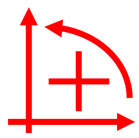

***APLICANDO O TEOREMA DO CORTE***

**Fonte: Lindenberg Neto, H. Introdução à Mecânica das estruturas, apostila Epusp, São Paulo, 1997**

# EXERCÍCIO 14.

## Determinar as reações dos apoios e esboçar o diagrama dos esforços solicitantes na estrutura da figura



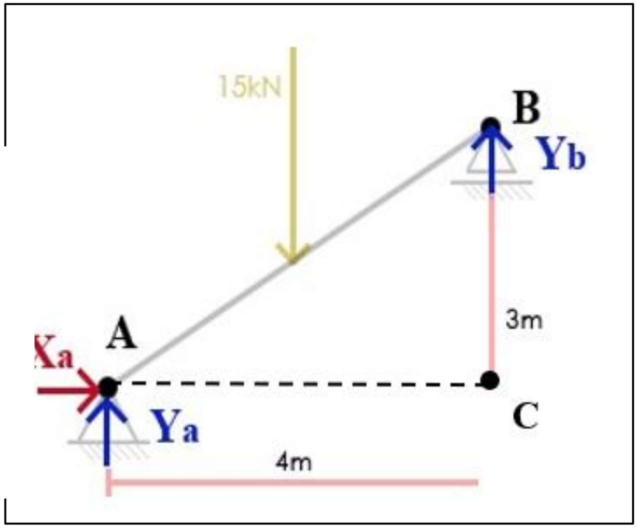




$$sen\ \alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

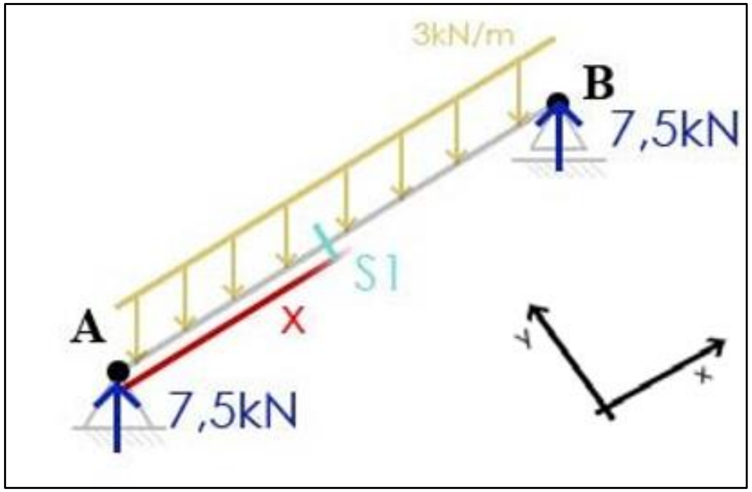
$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

### 1. REAÇÕES NOS APOIOS

- $\Sigma F_H = 0 = Xa \Rightarrow \mathbf{Xa = 0}$
- $\Sigma M_{(A)} = 0 = -15*2 + Yb*4$
  $\Rightarrow \mathbf{Yb = 7{,}5kN}$
- $\Sigma M_{(C)} = 0 = -Ya*4 + 15*2$
  $\Rightarrow \mathbf{Ya = 7{,}5kN}$



## 2. DIAGRAMA DO CORPO LIVRE




$$sen\ \alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

***APLICANDO O EQUILÍBRIO***

## 3. SEÇÃO S1

$\Sigma X = 0 = N(x) + 7{,}5 sen\ \alpha - 3x.sen\ \alpha$

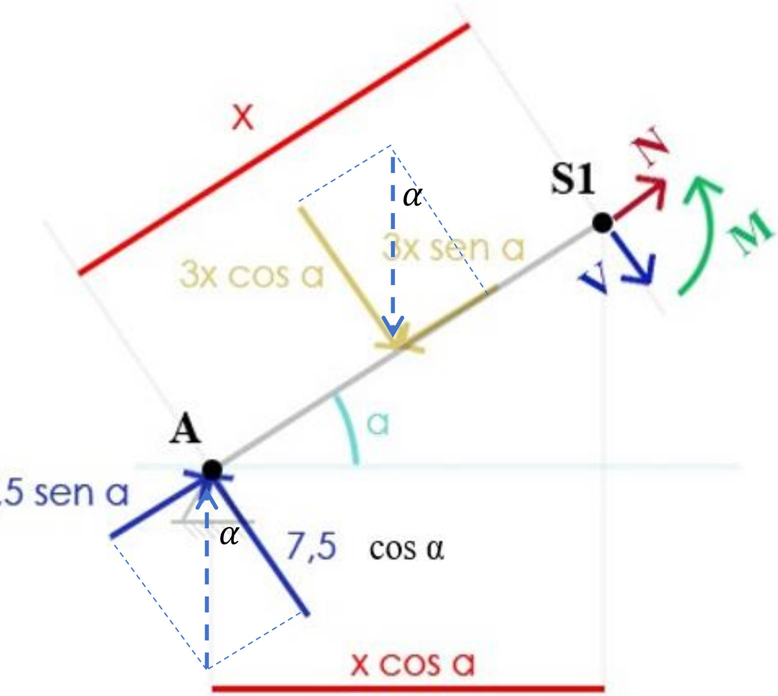
$\Rightarrow$ **N(x) = - 4,5 + 1,8x**

$\Sigma Y = 0 = 7{,}5.\cos \alpha - 3x.\cos \alpha - V(x)$

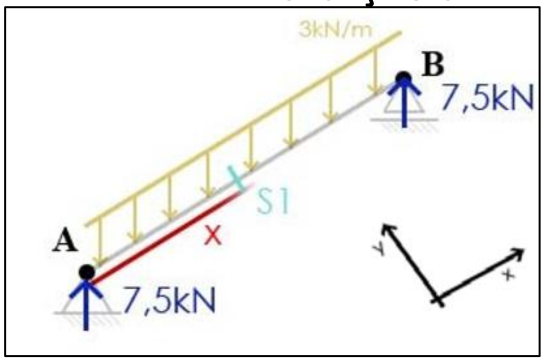
$\Rightarrow$**V(x) = 6 – 2,4x**

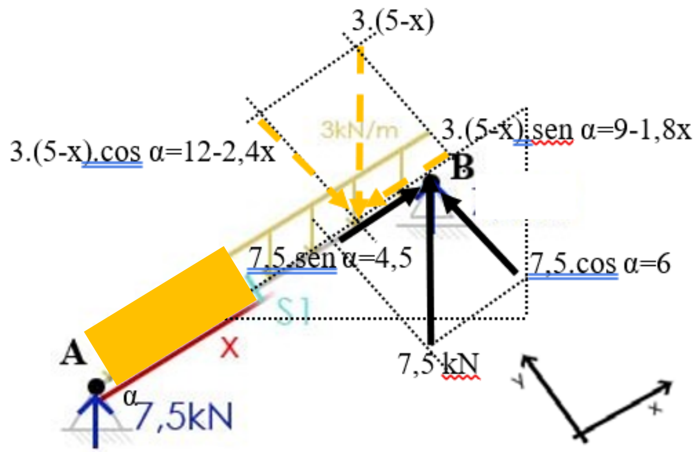
$\Sigma M_{(S1)} = 0 = (-7{,}5.\cos \alpha)*x + (3x.\cos \alpha)*x/2 + M(x)$

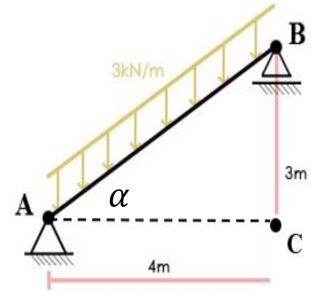
$\Rightarrow$ **M(x) = 6x – 1,2x²**



## 3. SEÇÃO S1



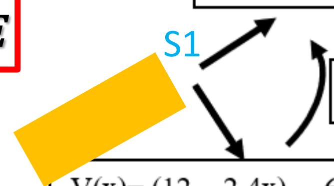




$$sen\ \alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

***APLICANDO O TEOREMA DO CORTE***




N(x)= 4,5 – (9 – 1,8x) = - 4,5 + 1,8x

M(x)= 6.(5 – x) - (12 – 2,4x).(5 – x)/2 = 6x – 1,2x²

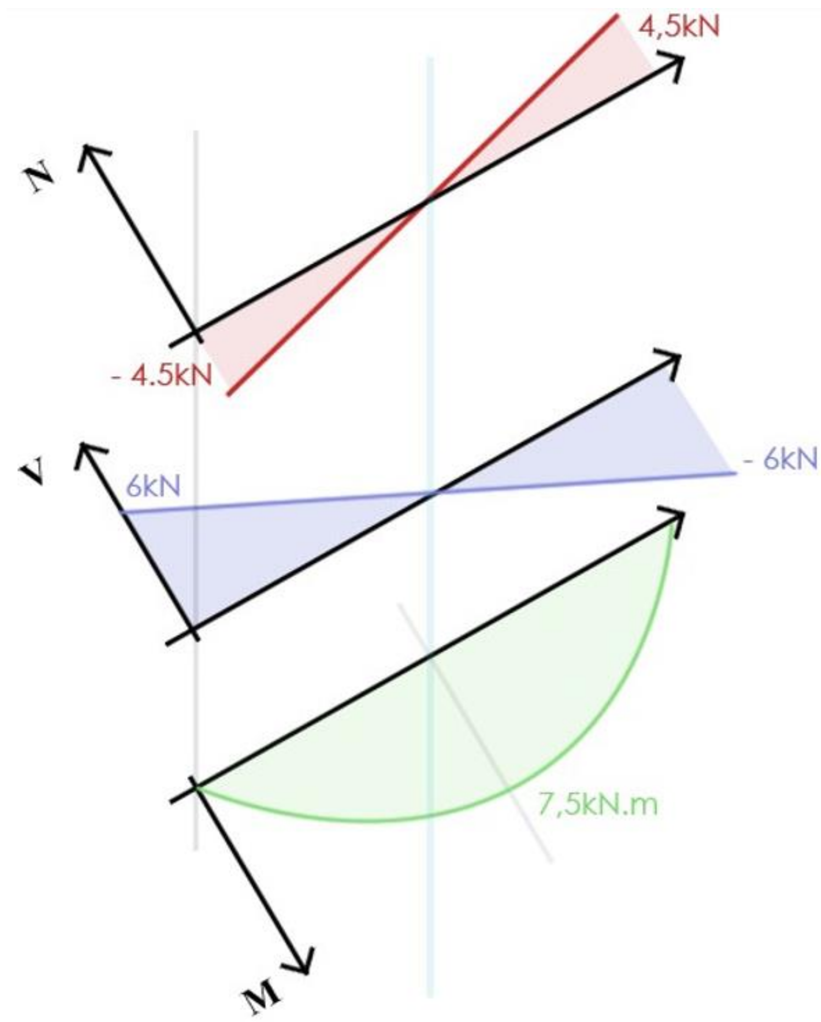
V(x)= (12 – 2,4x) – 6 = 6 – 2,4x

**4. DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES**

- **N(x) = - 4,5 + 1,8x**
  - N(0) = -4,5 kN
  - N(5) = 4,5 kN

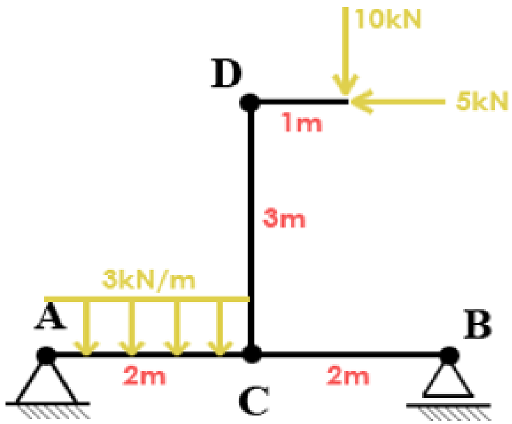
- **V(x) = 6 – 2,4x** ○
  V(0) = 6 kN ○
  V(5) = - 6 kN

- **M(x) = 6x – 1,2x²**
  - M(0) = 0
  - M(5/2) = 7,5 kN.m
  - M(5) = 0

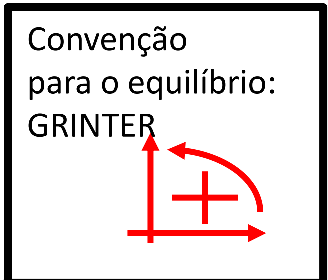


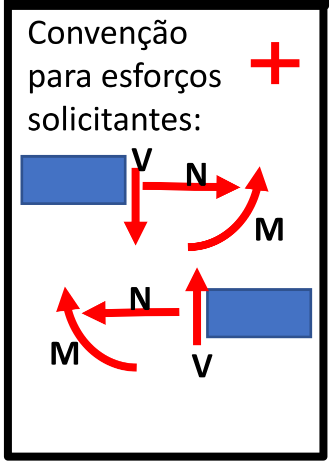
# EXERCÍCIO 15.

**Determinar as reações dos apoios e esboçar o diagrama dos esforços solicitantes na viga poligonal**




A (articulação fixa)
B (articulação móvel)
C, D (engastamentos)



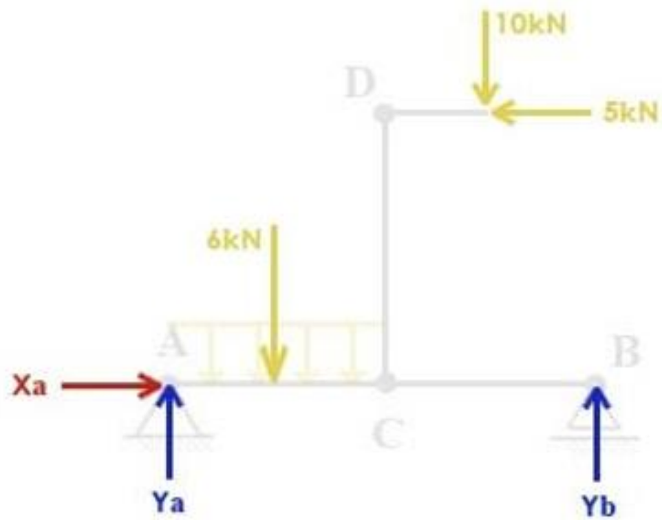




### 1. REAÇÕES NOS APOIOS

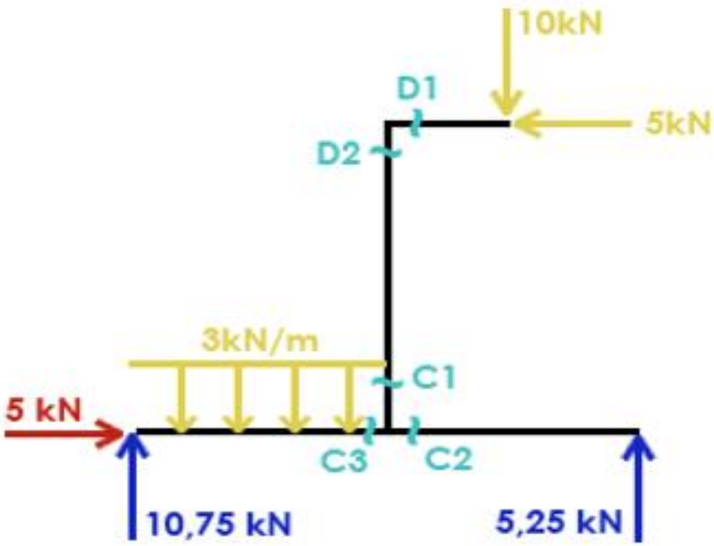
- $\Sigma F_H = 0 = Xa - 5$
  $\Rightarrow$ **Xa = 5 kN**

- $\Sigma M_{(A)} = 0 = -6*1 - 10*3 + 4Yb + 5*3$
  $\Rightarrow$ **Yb = 5,25 kN**

- $\Sigma M_{(B)} = 0 = -4Ya + 6*3 + 10*1 + 5*3$
  $\Rightarrow$ **Ya = 10,75 kN**

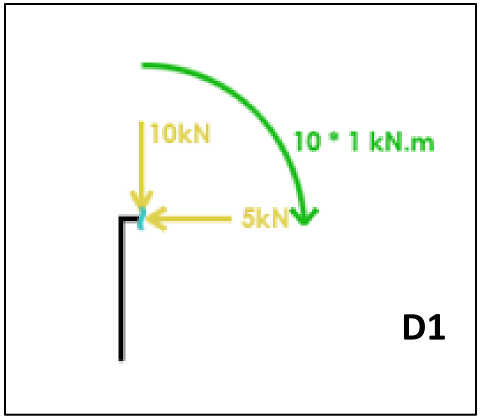


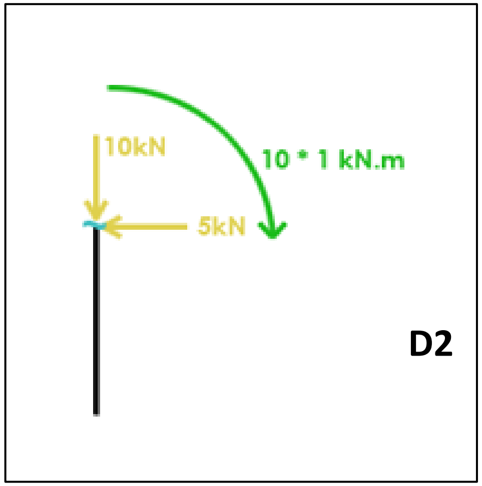
## 2. DIAGRAMA DO CORPO LIVRE



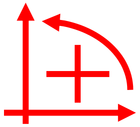

A (articulação fixa)
B (articulação móvel)
C, D (engastamentos)

## 3. SEÇÃO D1 E SEÇÃO D2

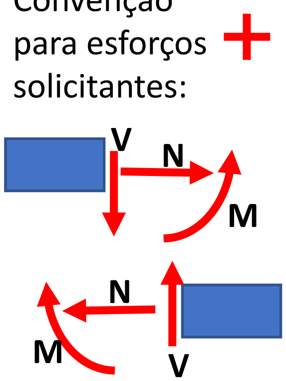


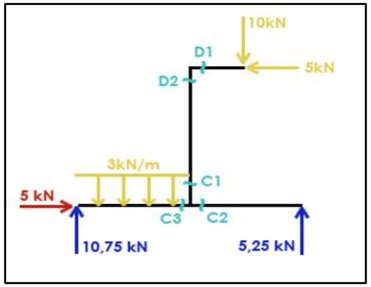




Convenção para o equilíbrio: GRINTER

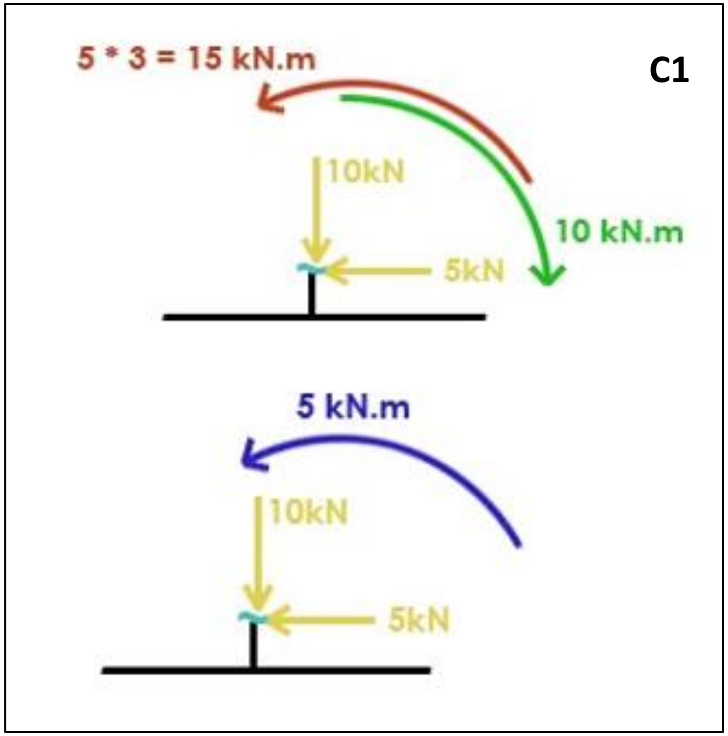


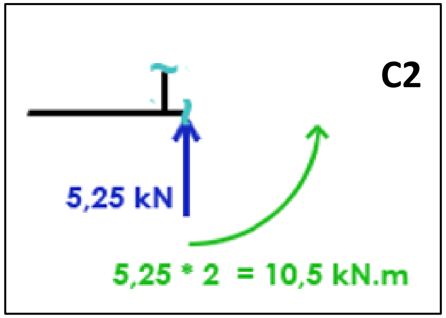
Convenção para esforços solicitantes:

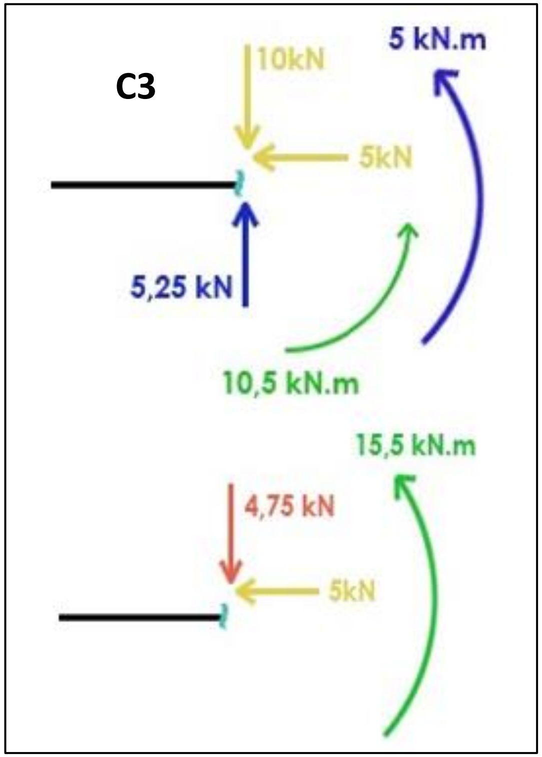




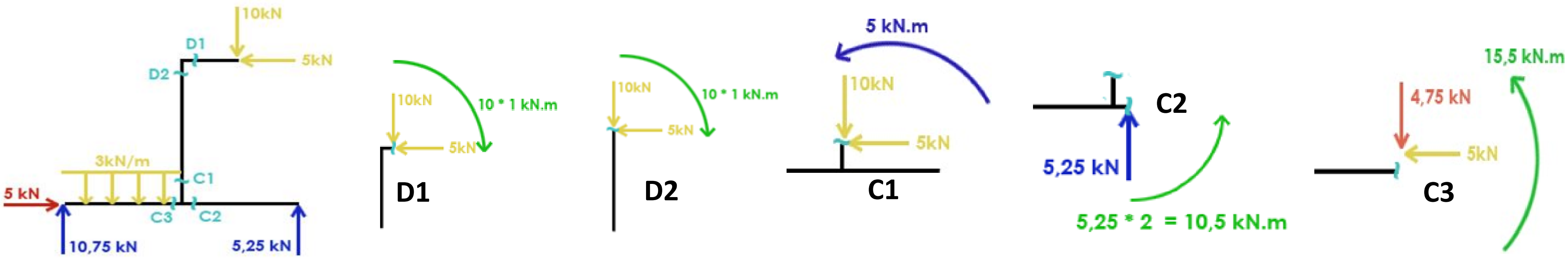

# 4. SEÇÃO C1, SEÇÃO C2 E SEÇÃO C3



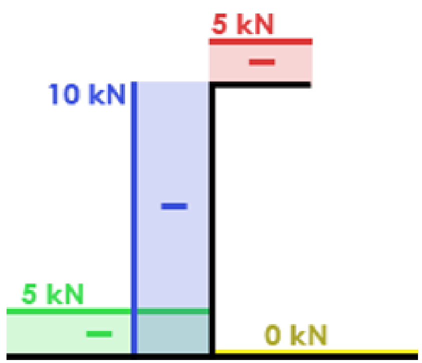



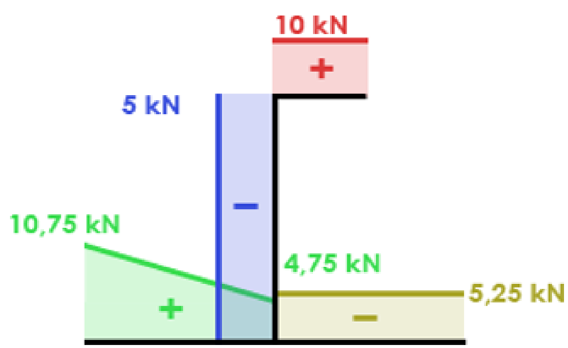
## 5. DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES




*Normal:*




*Cortante:*




*Momento fletor:*