

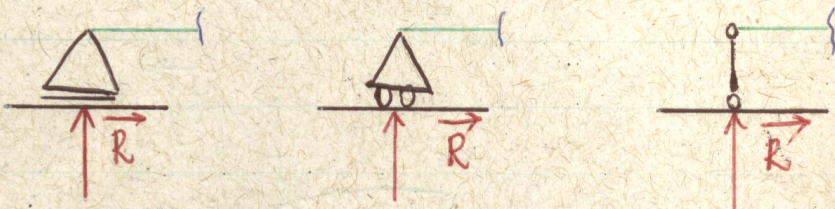
São Paulo, 29 de fevereiro de 2008.

Apoios

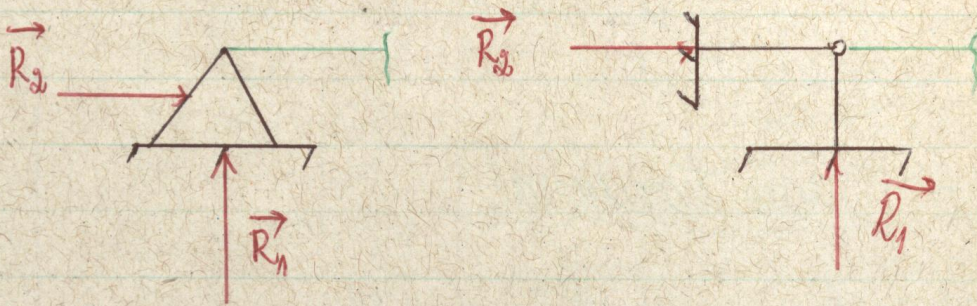
Existem três tipos distintos de apoios para estruturas:

a) Articulação Móvel É um apoio que restringe um grau de movimento.

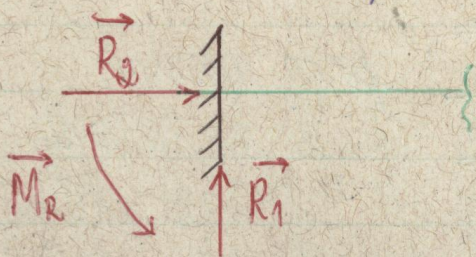
Abaixo são representados exemplos de figuras que simbolizam a articulação móvel e as reações nelas aplicadas:



b) Articulação Fixa Restringe dois graus de movimento (translações). É representada por:

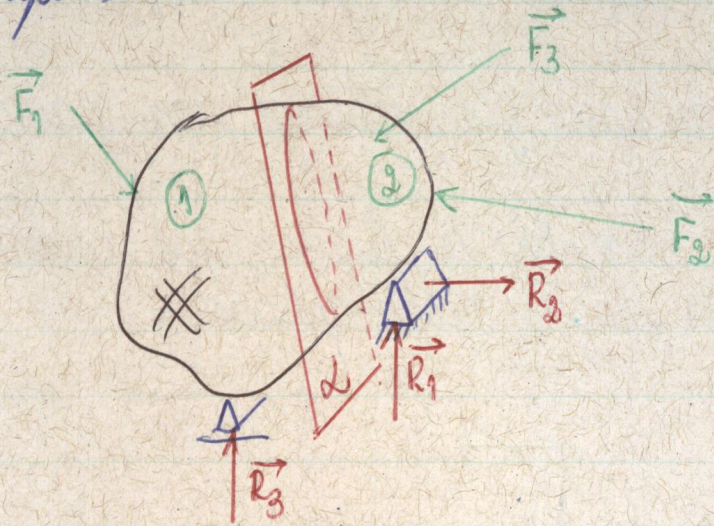


c) Engastamento Restringe três graus de liberdade (translações e rotação). É representado por:

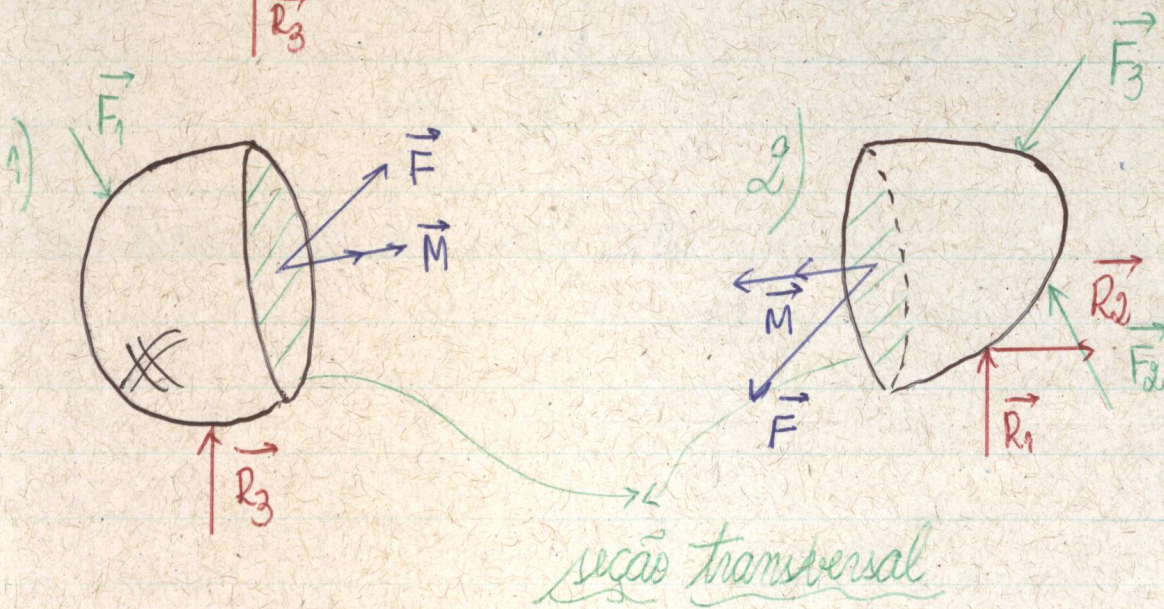


Esforços Solicitantes

Considere uma certa estrutura em que estão representadas forças ativas nela aplicadas e esforços reativos devido aos apoios:

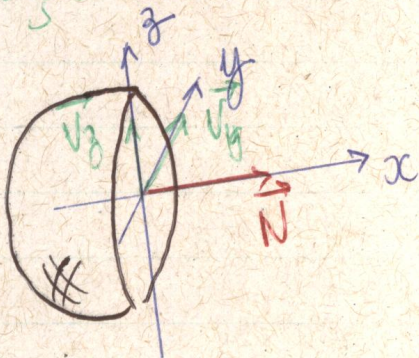


Teorema do Corte
Cortando a estrutura através do plano α , surgem dois hemisférios. Tal divisão cria esforços internos devido ao desbalanceamento.



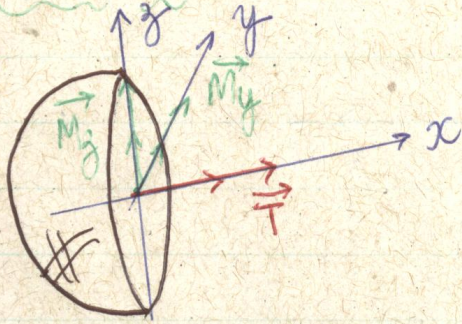
Dividindo tais esforços nas três direções:

→ Força F



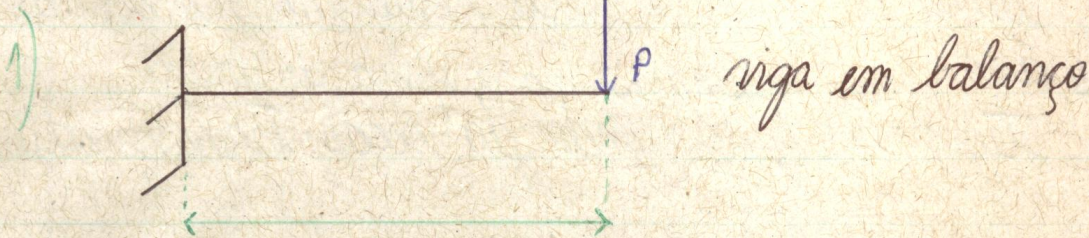
$F = \begin{cases} \vec{N} & : \text{força normal} \\ \vec{V}_x \\ \vec{V}_y \\ \vec{V}_z \end{cases}$ } forças cortantes (tentam cortar a estrutura)

→ Momento M



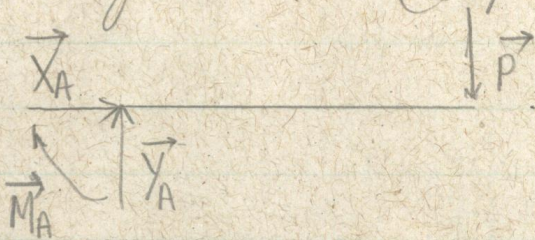
$$M = \begin{Bmatrix} T \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \begin{array}{l} \text{momento de torção} \\ \text{momentos fletores} \\ \text{ou de flexão} \end{array}$$

Exercícios - Lista P1-A



a) Reações de Apoio

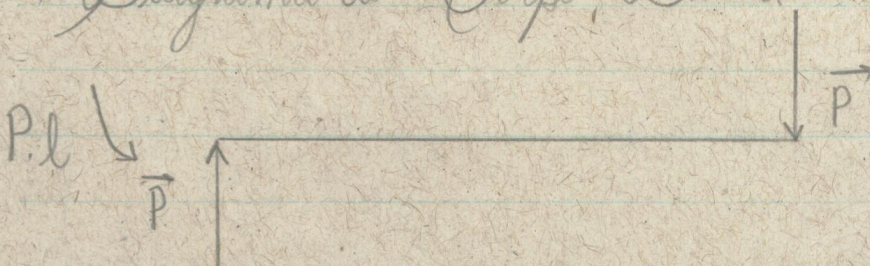
1) Diagrama de Corpo Livre



$$\begin{aligned} \rightarrow + \sum X = 0: X_A &= 0 \\ \uparrow + \sum Y = 0: Y_A &= P \\ \curvearrowright + \sum M = 0: M_A + P \cdot l &= 0 \rightarrow M_A = -P \cdot l \end{aligned}$$

b) Diagramas de N , V e M

→ Diagrama de Corpo Livre

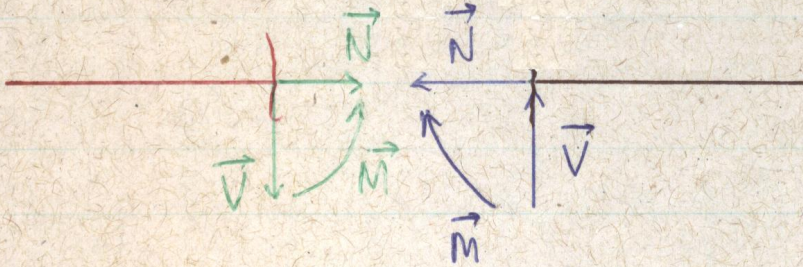


Aplicando o teorema do corte para uma posição x .



Convenções

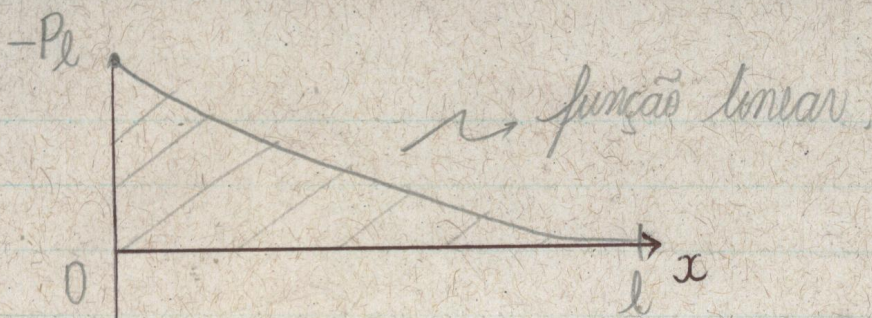
- \vec{N} : sentido da tração
- \vec{V} : tende a girar a peça resultante no sentido horário.
- \vec{M} : traciona a fibra inferior da estrutura.



$$\begin{aligned}
 \textcircled{+} \rightarrow \quad \sum x = 0: \quad \vec{N} &= 0 \\
 \textcircled{\uparrow} \quad \sum y = 0: \quad \vec{V} &= \vec{P} \\
 \textcircled{+} \quad \sum M = 0: \quad Pl - Px + M &= 0 \rightarrow M = P(x-l) \quad \left\{ \begin{array}{l} M(0) = -Pl \\ M(l) = 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

→ Diagrama dos esforços solicitantes





M (sentido positivo para baixo: indica o local onde se deve aplicar mais esforço).

São Paulo, 07 de março de 2008.

Exercícios - Lista P1A

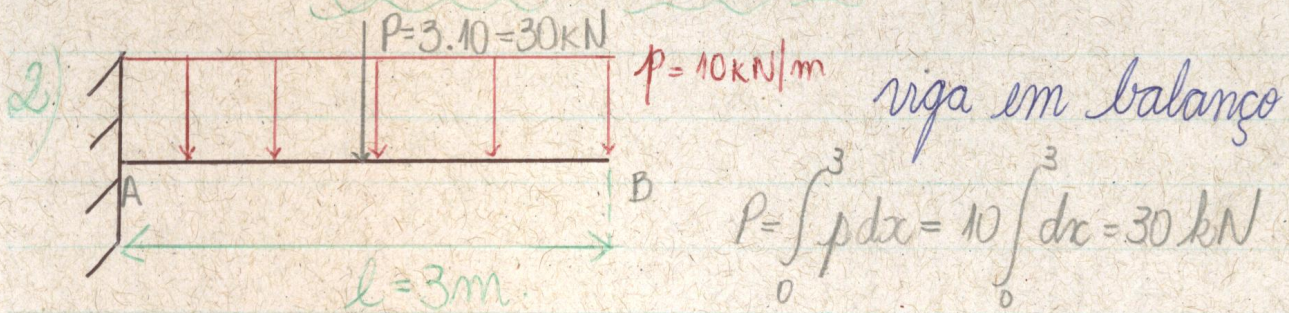
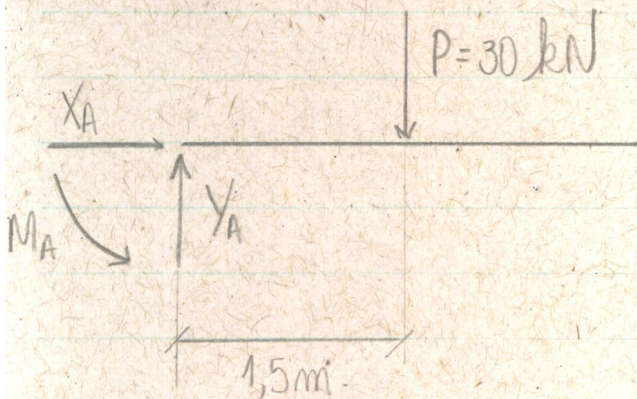
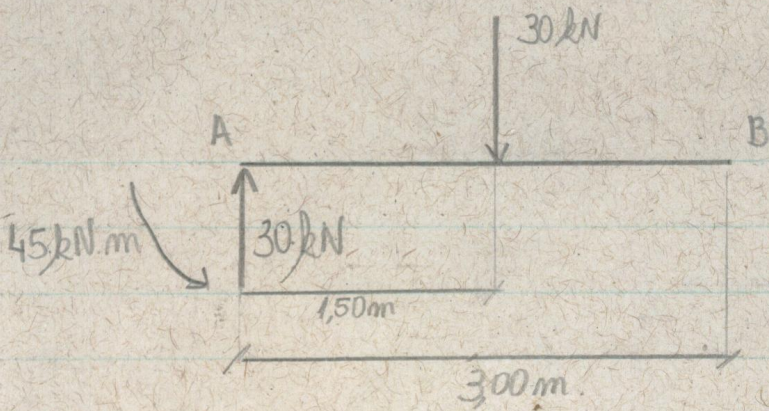


Diagrama de Corpo Livre

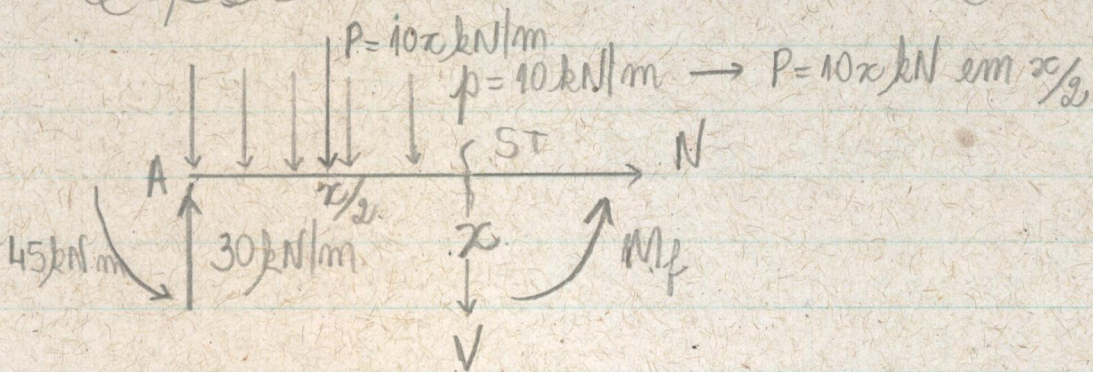


1) Reações nos apoios

$$\begin{aligned} \oplus \sum X &= 0 \rightarrow X_A = 0 \\ \oplus \uparrow \sum Y &= 0 \rightarrow Y_A - 30 = 0 \rightarrow Y_A = 30 \text{ kN} \\ \oplus \sum M(A) &= 0 \rightarrow M_A - 30 \cdot 1,5 \rightarrow M_A = 45 \text{ kN.m} \end{aligned}$$



→ Esforços Solicitantes - Teorema do Corte



• Equações da Estática

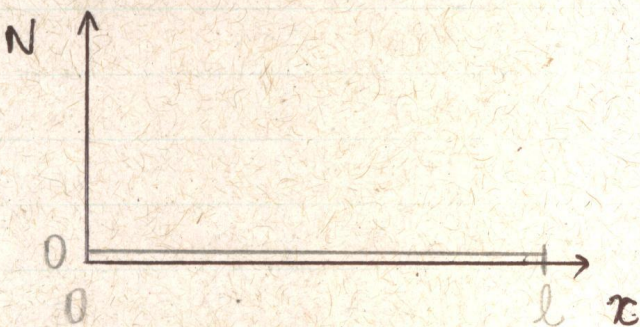
$$\oplus \sum X_A = 0 \rightarrow N = 0$$

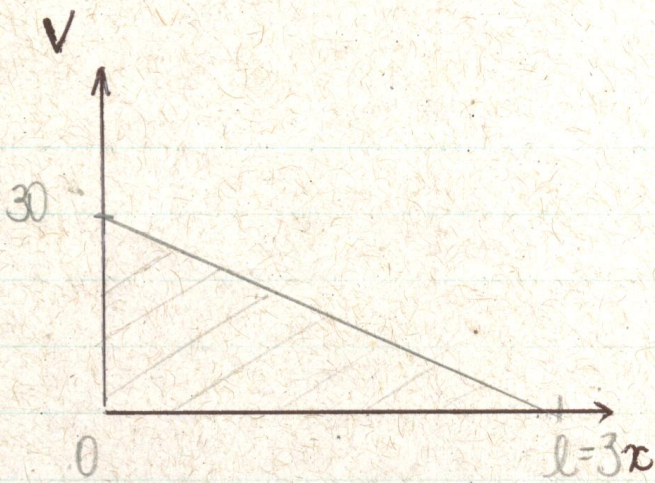
$$\uparrow \sum Y_A = 0 \rightarrow 10x + V = 30 \rightarrow V = 30 - 10x$$

$$\oplus \sum M(ST) \rightarrow M_f + \frac{10x^2}{2} - 30x + 45 = 0 \rightarrow M_f = -5x^2 + 30x - 45$$

$$M_f = -5(x^2 - 6x + 9)$$

→ Diagrama de Esforços Solicitantes

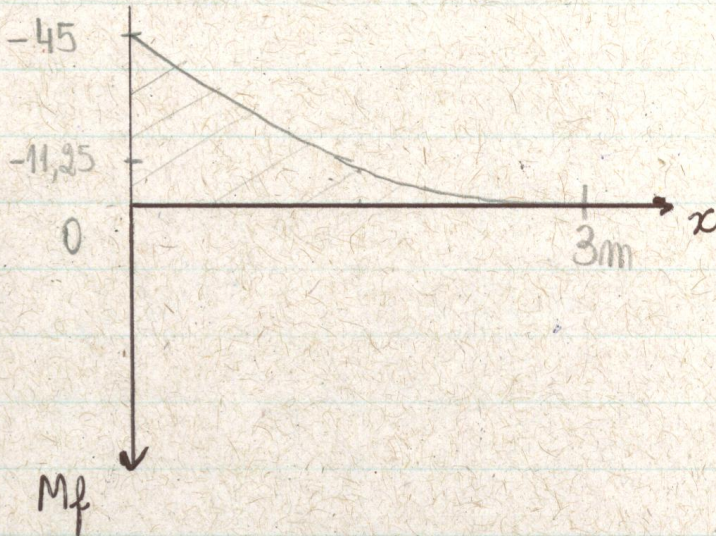




Parâmetros

$$x=0 \rightarrow V(0) = 30 \text{ kN}$$

$$x=3 \rightarrow V(3) = 0 \text{ kN}$$



Parâmetros

$$x=0 \rightarrow M(0) = -45 \text{ kN.m}$$

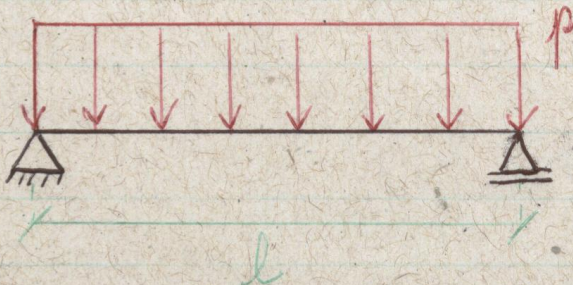
$$x=3 \rightarrow M(3) = 0$$

$$x=1,5 \rightarrow M(1,5) = -11,25 \text{ kN.m}$$

indica mais reforço de material na proximidade do ponto zero se a estrutura for mentada.

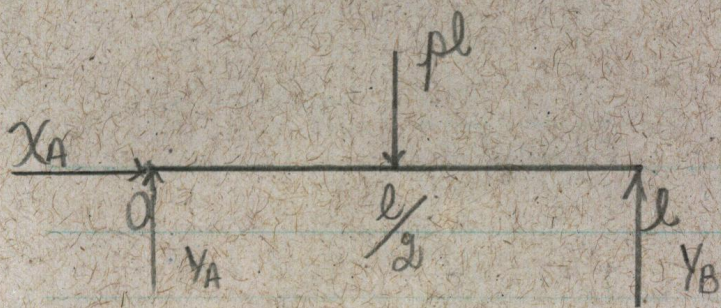
Este exemplo poderia ser uma laje, um galho de árvore ou uma árvore sofrendo ação do vento apenas à esquerda.

5)



riga simplesmente apoiada.

1) Diagrama de Corpo Livre

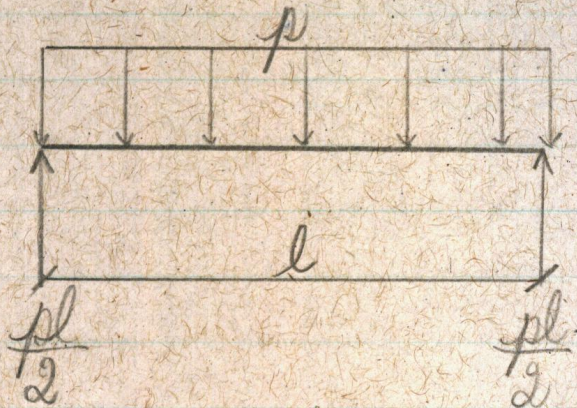


$$\rightarrow \cdot \sum X_i = 0 \rightarrow X_A = 0 //$$

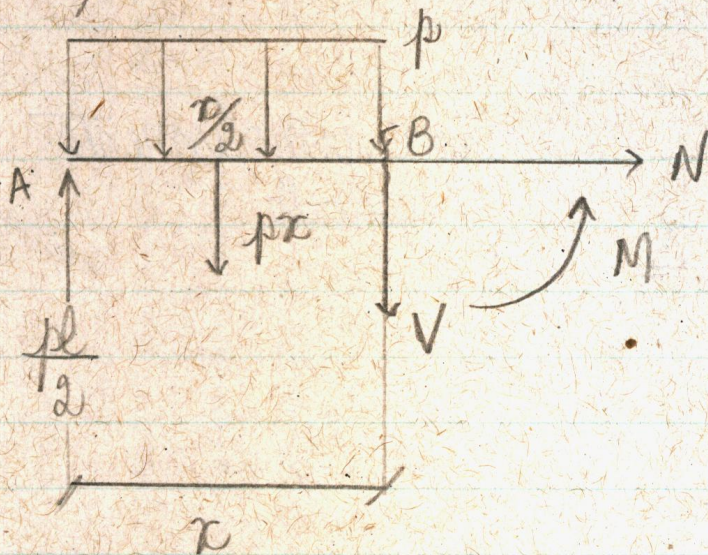
$$\curvearrowright \cdot \sum M_A = 0 \rightarrow -\frac{pl^2}{2} + lY_B = 0 \rightarrow Y_B = \frac{pl}{2} //$$

$$\uparrow \cdot \sum Y = 0 \rightarrow Y_A + \frac{pl}{2} - pl = 0 \rightarrow Y_A = \frac{pl}{2} //$$

• Verificação: $\sum M_B = 0 \rightarrow -Y_A \cdot l + \frac{pl^2}{2} = 0 \rightarrow Y_A = \frac{pl}{2} //$ (ok!)



→ Esforços Solicitantes - Teorema de Corte



$\rightarrow \cdot \Sigma X = 0 \rightarrow N = 0$

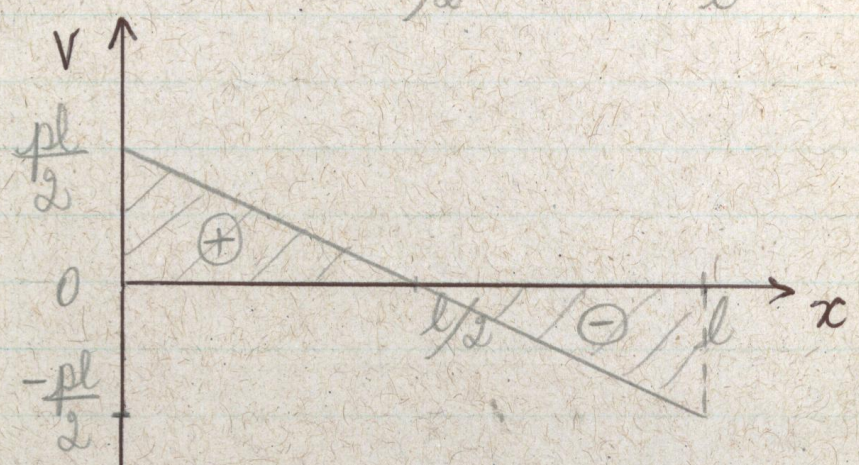
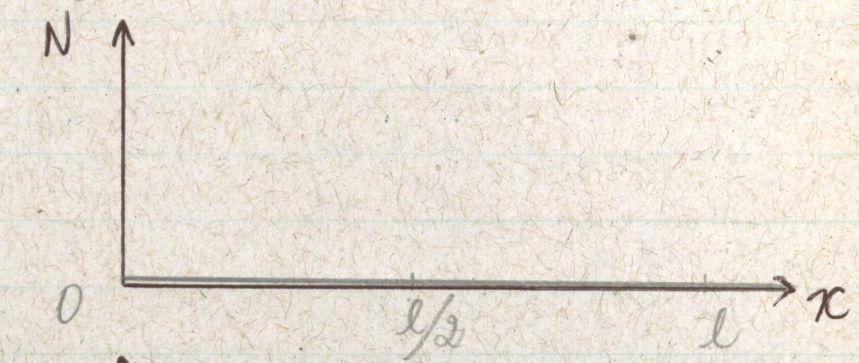
$\uparrow \cdot \Sigma Y = 0 \rightarrow \frac{pl}{2} - px - V = 0 \rightarrow V = p \left(\frac{l}{2} - x \right) = \frac{pl}{2} - px$

$\oplus \cdot \Sigma M_B = 0 \rightarrow M + \frac{px^2}{2} - \frac{plx}{2} = 0 \rightarrow M = -\frac{px^2}{2} + \frac{plx}{2}$

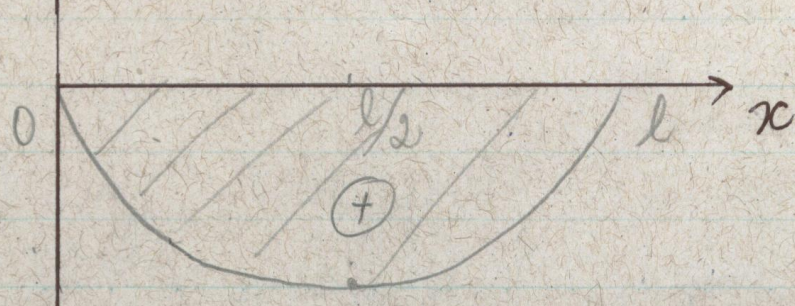
Teoremas: a) $\frac{dV}{dx} = -p$, com $V \rightarrow$ força cortante
 $p \rightarrow$ força distribuída (carga)

b) $\frac{dM}{dx} = V$, com $V \rightarrow$ força cortante
 $M \rightarrow$ momento (fleitor)

Diagramas dos Esforços Solicitantes



$V(0) = \frac{pl}{2}$
 $V(l) = -\frac{pl}{2}$

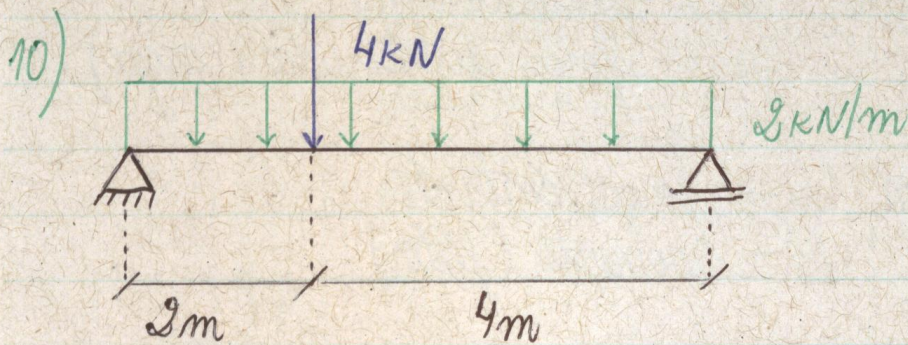


$M(0) = 0$
 $M(l) = 0$
 $M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{pl^2}{8}$

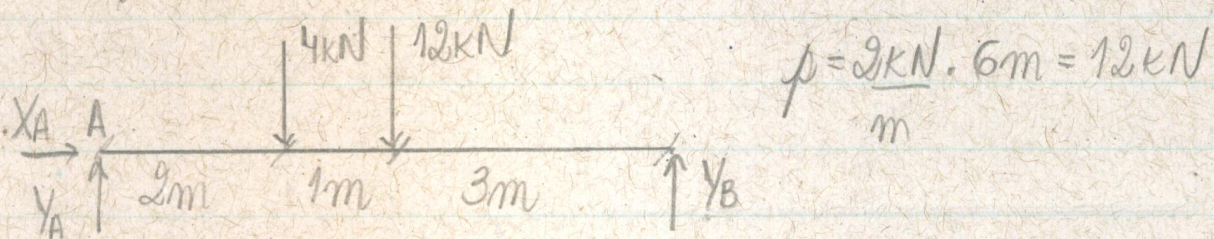
Essa estrutura pode simbolizar a Ponte Rio-Antônio.

São Paulo, 14 de março de 2008.

Continuação - Exercícios
Lista P1-A



1) Diagrama de Corpo Livre



1,1) $\rightarrow \oplus: \sum X = 0 \rightarrow X_A = 0$

1,2) $\curvearrowright \oplus: \sum M_A = 0 \rightarrow -4 \cdot 2 - 12 \cdot 3 + 6 Y_B = 0$

$$6 Y_B = 36 + 8$$

$$Y_B = \frac{44}{6} = \frac{22}{3} \text{ kN} \approx 7,33 \text{ kN}$$

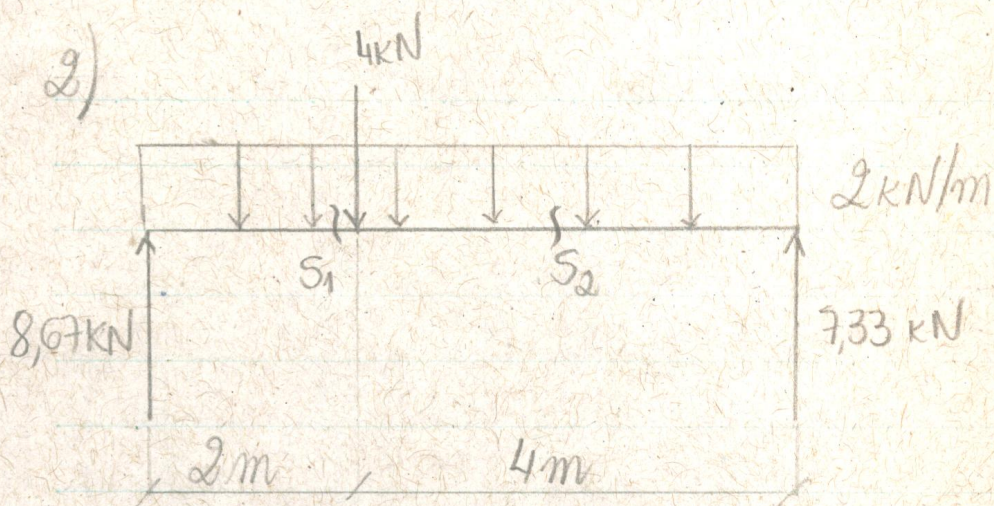
1,3) $\uparrow \oplus: \sum Y = 0 \rightarrow Y_A + Y_B = 16$

$$Y_A = 16 - \frac{22}{3} = \frac{26}{3} \text{ N} \approx 8,67 \text{ kN}$$

1,4) Correção $\curvearrowright \oplus \sum M_B = 0 \rightarrow -6 Y_A + 4 \cdot 4 + 12 \cdot 3 = 0$

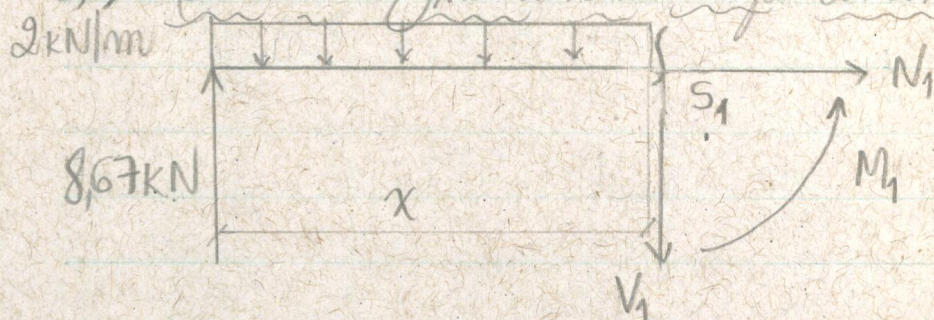
(cond necessária)

$$Y_A = \frac{50}{6} = \frac{26}{3} \approx 8,67 \text{ kN} \text{ (ok!)}$$



3) Esforços Solicitantes - Teorema do Corte

3.1) Corte 1 → Análise sem carga concentrada ($x \in [0, 2]$)



Observações: São necessários vários cortes para cada segmento de uma viga poligonal.

$$\begin{aligned} \rightarrow \cdot \sum X = 0 & \quad N_1 = 0 \\ \uparrow \cdot \sum Y = 0 & \quad 8,67 - 2x - V_1 = 0 \\ & \quad \boxed{V_1 = 8,67 - 2x} \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \swarrow V(0) = 8,67 \text{ kN} \\ & \searrow V(2) = 4,67 \text{ kN} \end{aligned}$$

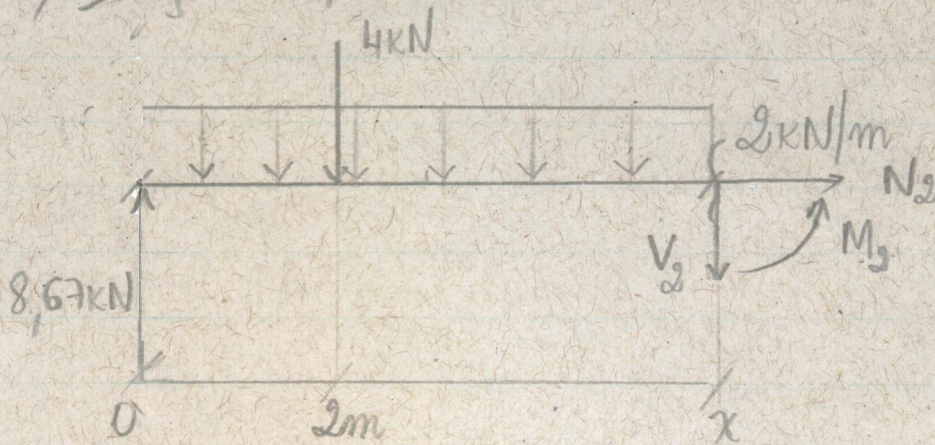
$$\begin{aligned} \odot \cdot \sum M_{S_1} = 0 & \quad M_1 - 8,67x + 2x \left(\frac{x}{2} \right) = 0 \\ & \quad \boxed{M_1 = -x^2 + 8,67x} \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \swarrow M_1(0) = 0 \\ & \searrow M_1(1) = 7,67 \text{ kN}\cdot\text{m} \\ & \searrow M_1(2) = 13,34 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

→ Conferência de resultados

$$\frac{dV}{dx} = -p \quad \frac{dM}{dx} = V$$

$$\frac{dV}{dx} = -2 \quad \frac{dM}{dx} = -2x + 8,67$$

3,2) Seção S_2 , com $2 \leq x \leq 6$.



$$\cdot \begin{matrix} \oplus \\ \rightarrow \end{matrix} \Sigma X = 0 \rightarrow N_2 = 0$$

$$\cdot \begin{matrix} \oplus \\ \uparrow \end{matrix} \Sigma Y = 0 \rightarrow 8,67 - V_2 - 4 - 2x = 0$$

$$V_2 = 4,67 - 2x$$

$$V_2(2) = 0,67 \text{ kN}$$

$$V_2(6) = -7,33 \text{ kN}$$

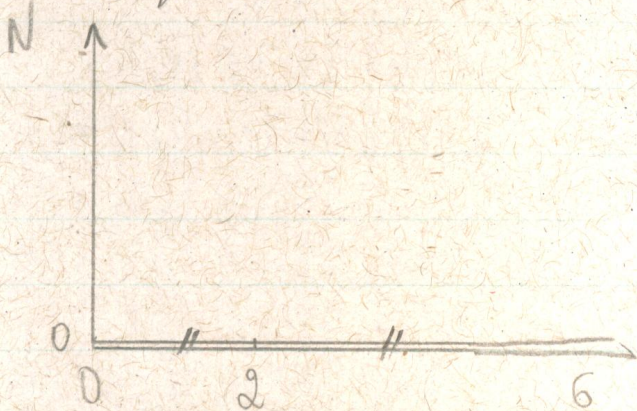
$$\cdot \begin{matrix} \oplus \\ \curvearrowright \end{matrix} \Sigma M_{S_2} = 0 \rightarrow M_2 + 4(x-2) + 2x \left(\frac{x}{2} \right) - 8,67x = 0$$

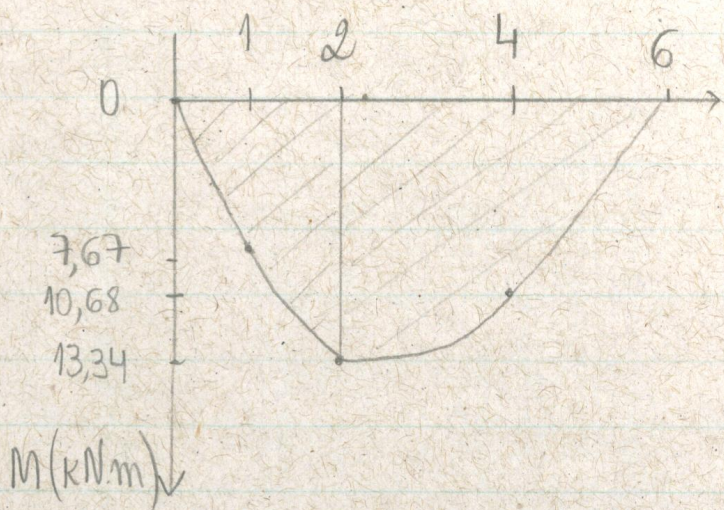
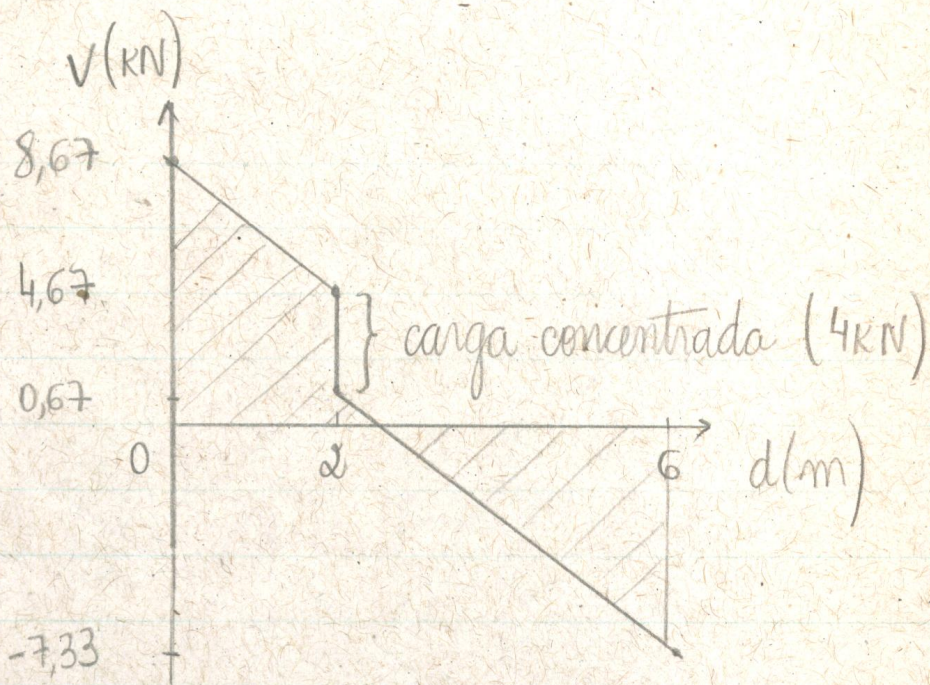
$$M_2 = -x^2 - 4x + 8 + 8,67x$$

$$M_2 = -x^2 + 4,67x + 8$$

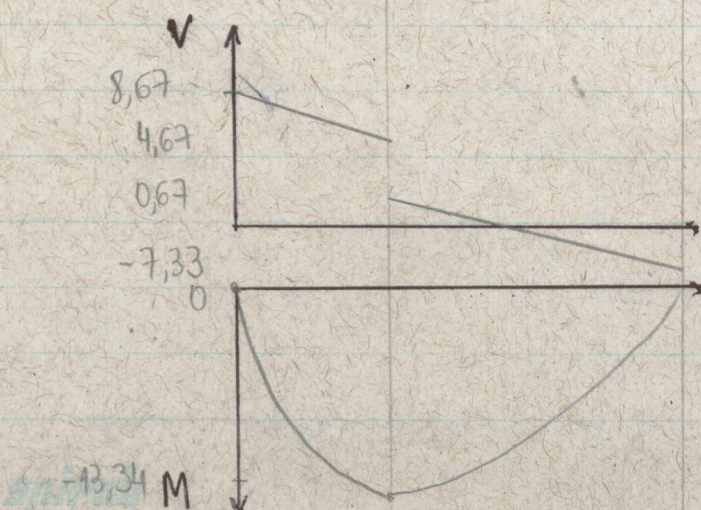
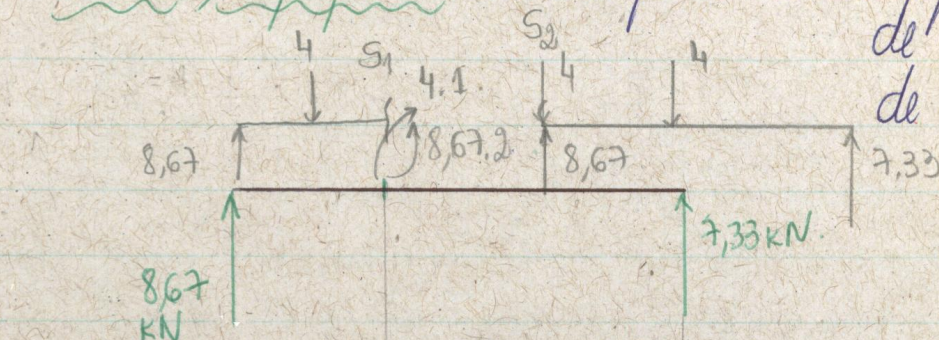
$$M_2(2) = 13,34 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad M_2(4) = 10,68 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad M_2(6) = 0 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

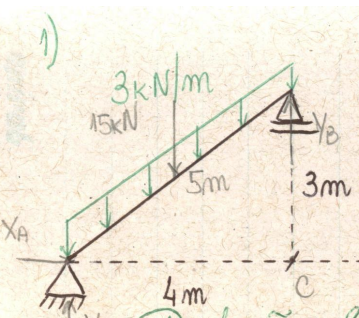
4) Diagrama dos Esforços Solicitantes





→ Forma simplificada: Transferência de forças até o ponto de corte e contabilização de momentos adicionais que mantêm a peça em equilíbrio.

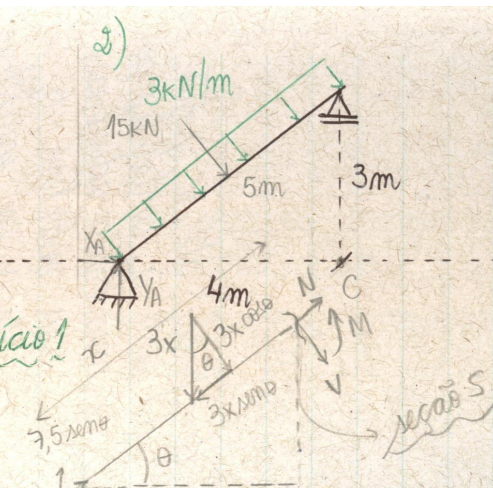
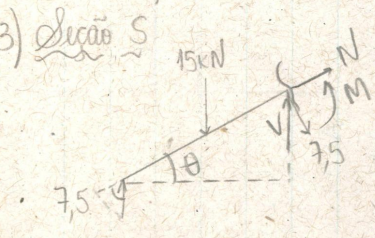
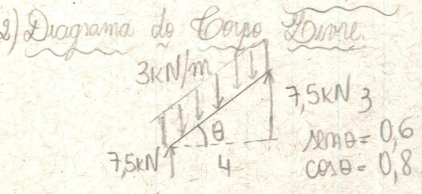




Resolução - Exercício 1

1) Reações nos apoios

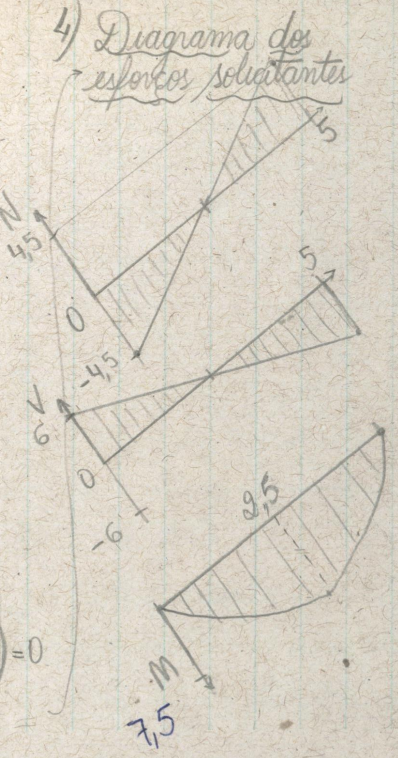
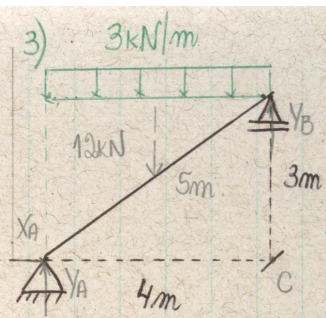
1.1) $\sum X = 0 \rightarrow X_A = 0$
 $\sum M_{(A)} = 0 \rightarrow -15 \cdot 2 + 4Y_B = 0$
 $Y_B = 7,5 \text{ kN}$
 $\sum M_{(C)} = 0 \rightarrow -4Y_A + 15 \cdot 2 = 0$
 $Y_A = 7,5 \text{ kN}$



3.1) $\sum X = 0 \rightarrow 7,5 \cos \theta - 3x \cos \theta + N = 0$
 $N = 3x \cos \theta - 7,5 \cos \theta$
 $N = (3x - 7,5) \cdot 0,8$
 $N = 1,8x - 4,5$

3.2) $\sum Y = 0 \rightarrow 7,5 \sin \theta - 3x \sin \theta - V = 0$
 $V = (7,5 - 3x) \cdot 0,6$
 $V = 6 - 2,4x$

3.3) $\sum M_{(S)} = 0 \rightarrow M - 7,5x \cos \theta + 3x \left(\frac{x \cos \theta}{2} \right) = 0$
 $M = -1,2x^2 + 6x$

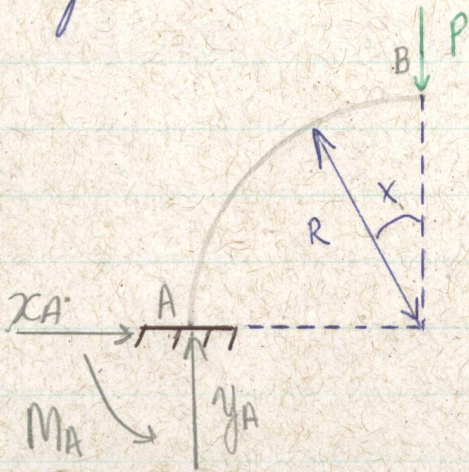


1) 2) 3)

São Paulo, 28 de março de 2008.

Exercícios - Lista P1-B
Continuação

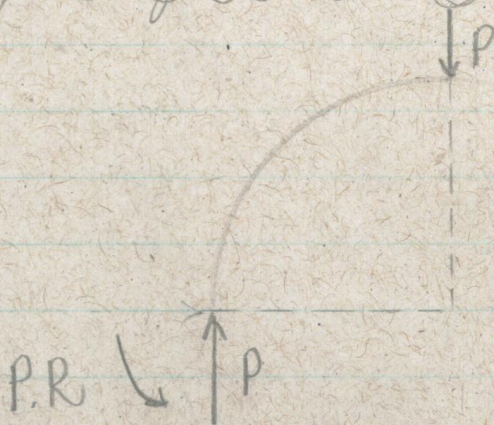
4) Riga curva.



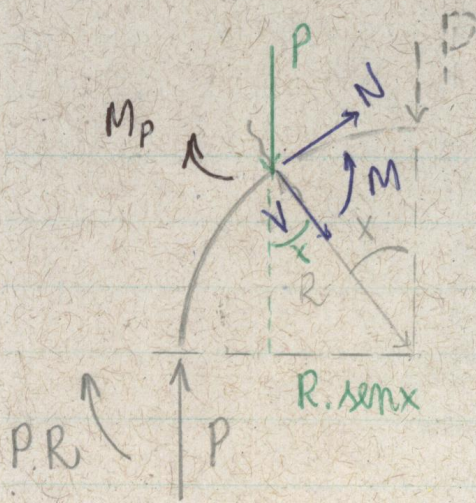
1) Reações no engastamento em A

$$\begin{aligned} \oplus \Sigma X = 0 &\rightarrow X_A = 0 \\ \oplus \uparrow \Sigma Y = 0 &\rightarrow Y_A - P = 0 \rightarrow Y_A = P \\ \oplus \curvearrowright \Sigma M_A = 0 &\rightarrow M_A - P \cdot R \rightarrow M_A = P \cdot R \end{aligned}$$

2) Diagrama do Corpo Livre

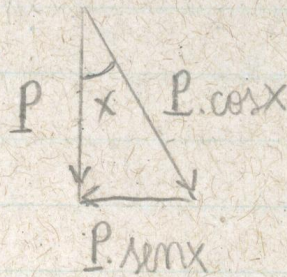
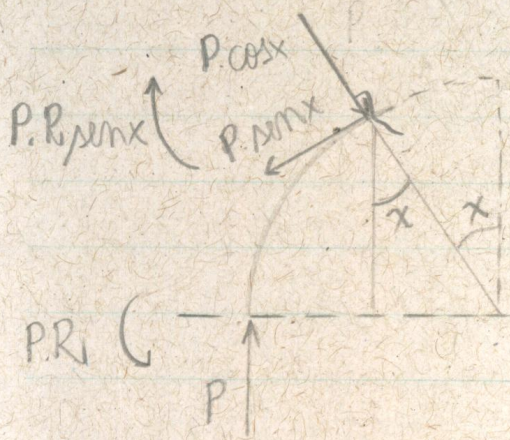


3) Determinação dos Esforços Solicitantes - Teorema de Castiglione



A inclusão de P no ponto de corte se faz necessária para retomar o equilíbrio do sistema. Como essa força não é mecanicamente equivalente à original, deve haver um momento em torno do ponto para recuperar o equilíbrio.

$$M_{P(TB)} = P \cdot R \sin x$$



Conclui-se que:

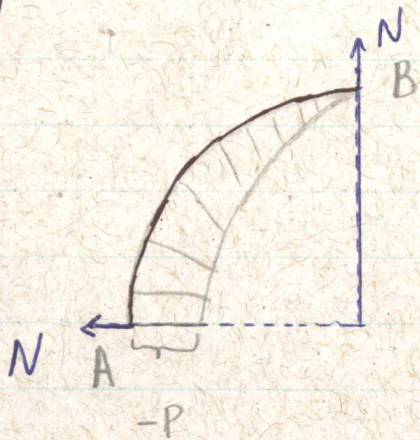
$$N = -P \sin x$$

$$V = P \cos x$$

$$M = -P \cdot R \sin x$$

4) Diagramas dos Esforços Solicitantes

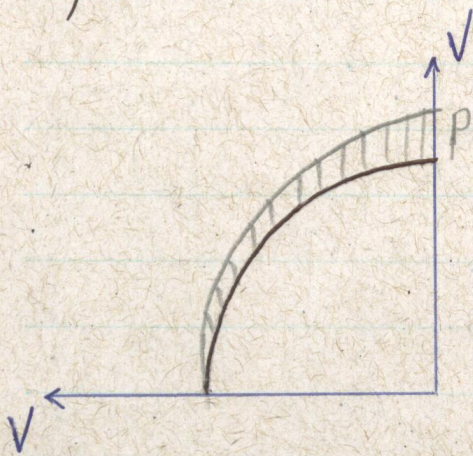
a) $N = -P \sin x$



$$N(A) = N\left(\frac{\pi}{2}\right) = -P$$

$$N(B) = N(0) = 0$$

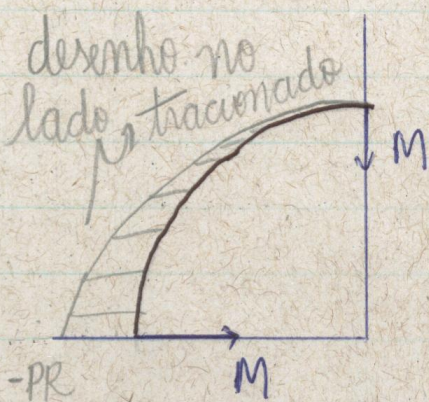
b) $V = P \cos x$



$$V(A) = V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$V(B) = V(0) = P$$

c) $M = -P \cdot R \cdot \sin x$

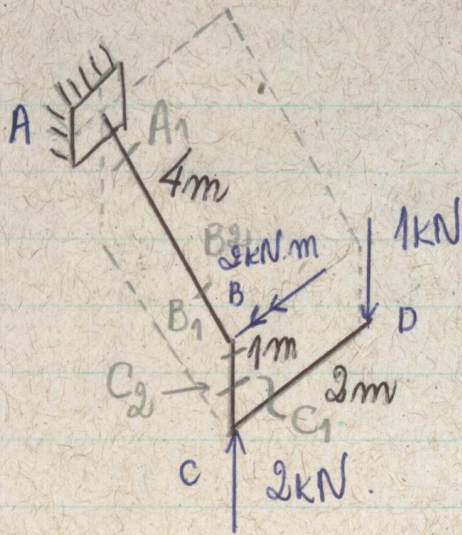


$$M(A) = M\left(\frac{\pi}{2}\right) = -PR$$

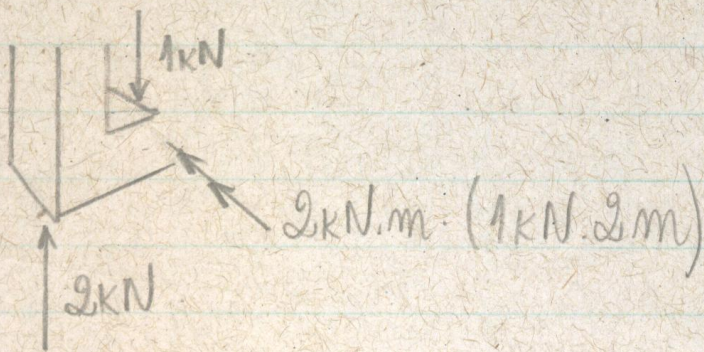
$$M(B) = M(0) = 0$$

9) Vigas espaciais. Para facilitar a visualização, é possível fazer uma "gaiola" que abrigue a viga.

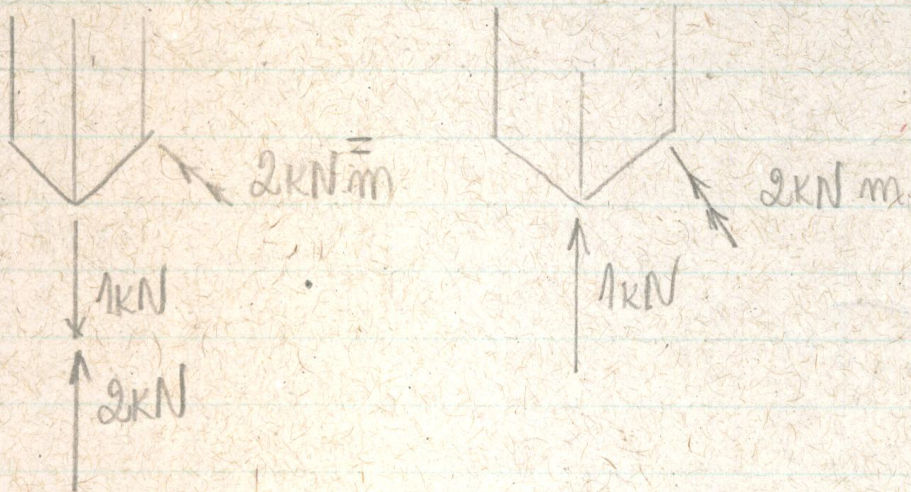
Deve-se recordar que toda força caminha para o apoio. Neste curso, estruturas espaciais terão apenas um único engastamento como apoio.



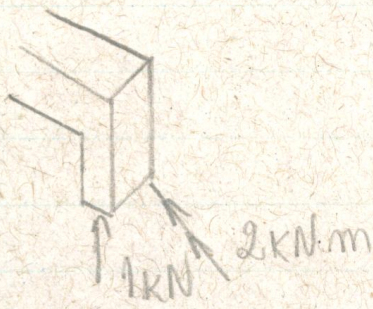
a) Seção C₁



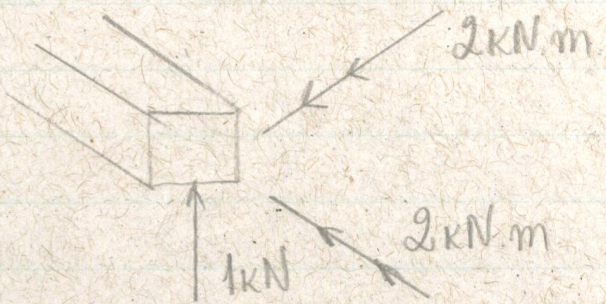
b) Seção C₂



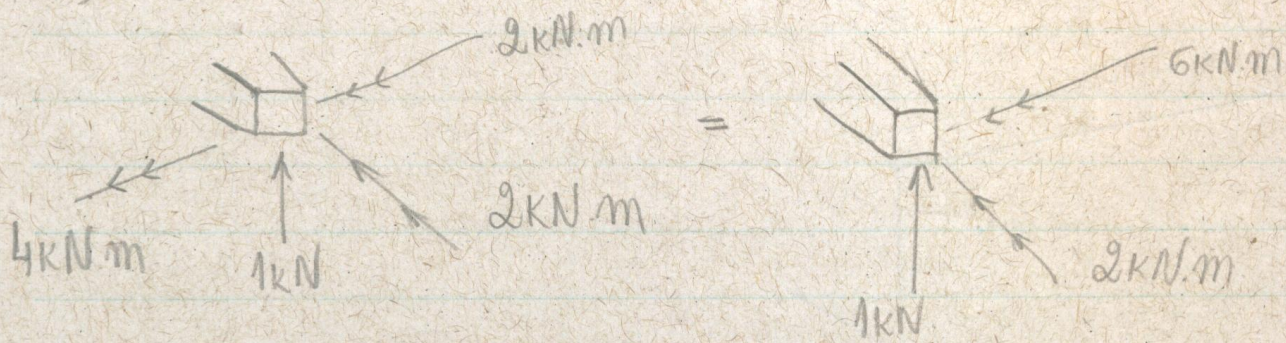
c) Seção B1



d) Seção B2

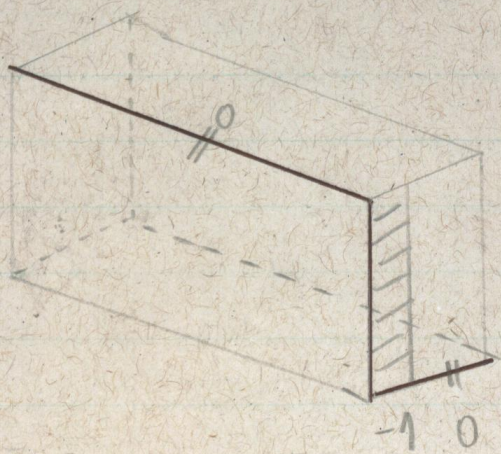


e) Seção A1

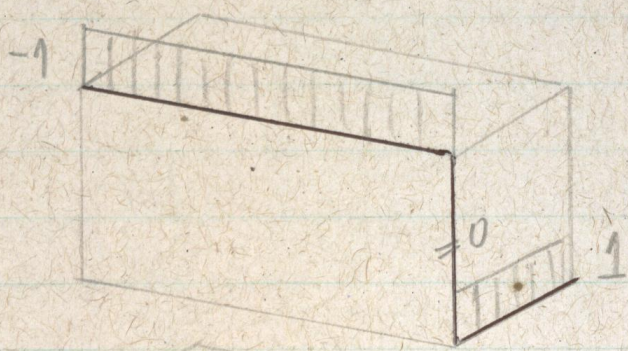


→ Diagrama dos Esforços Solicitantes

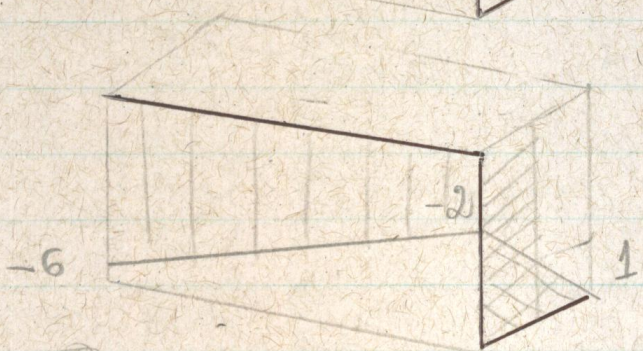
(N)



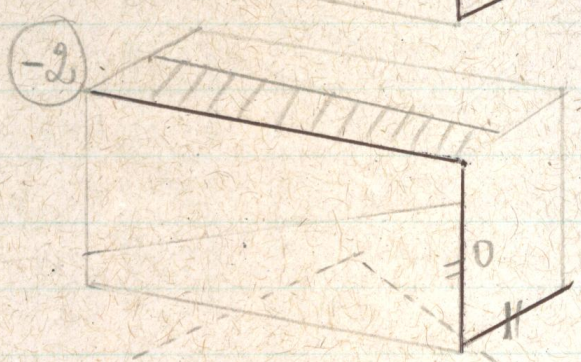
(V)



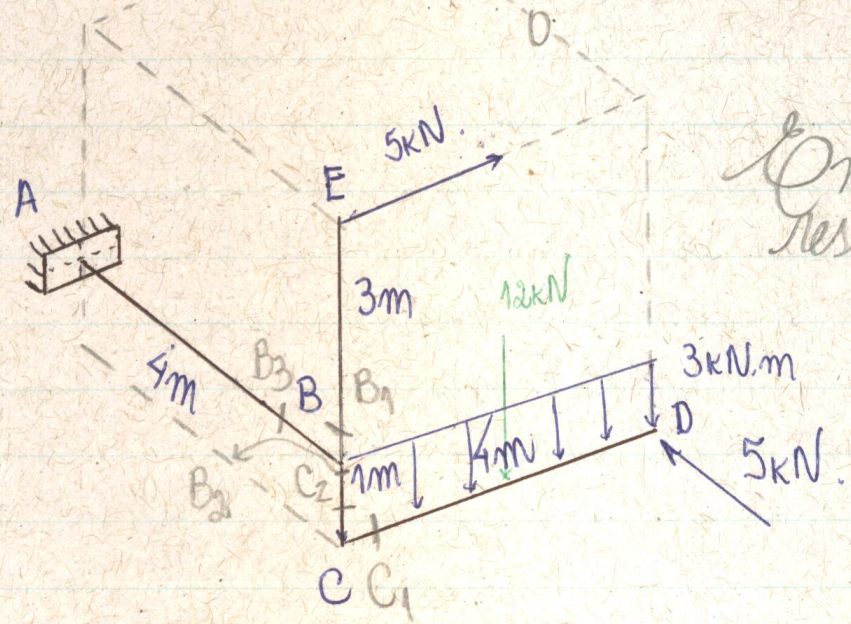
(M)



(T)

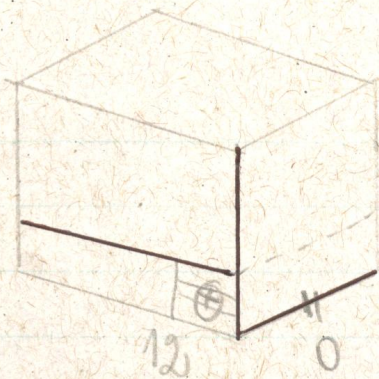


10)



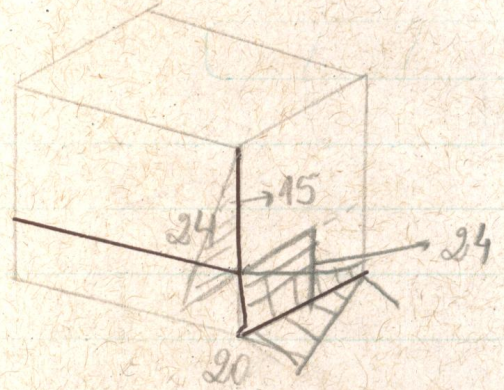
*Exercício com
Resolução incompleta.*

(N)

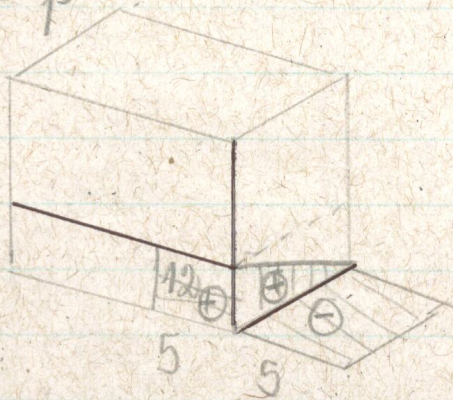


$$\frac{dM}{dx} = V$$

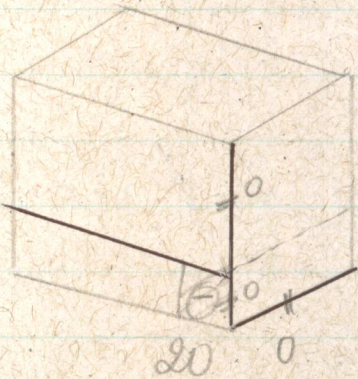
(M)



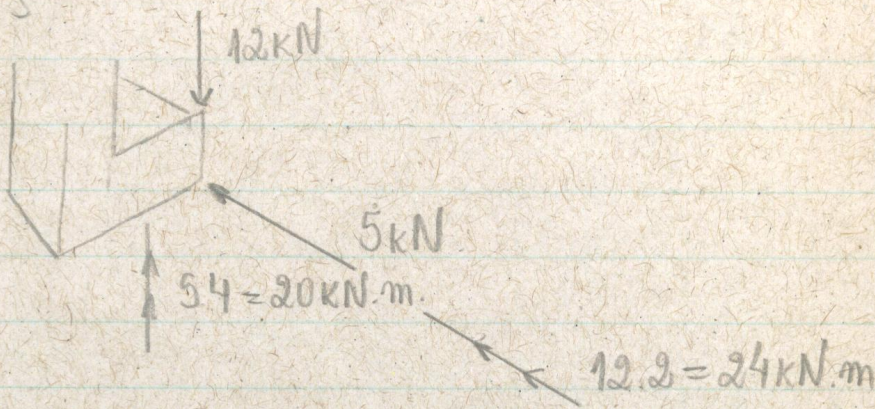
$$(V) \frac{dV}{dx} = -p$$



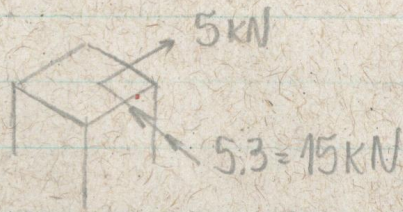
(T)



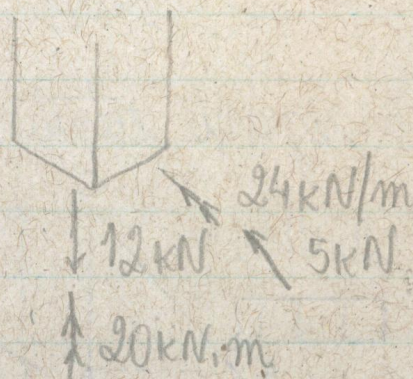
(a) Seção C1



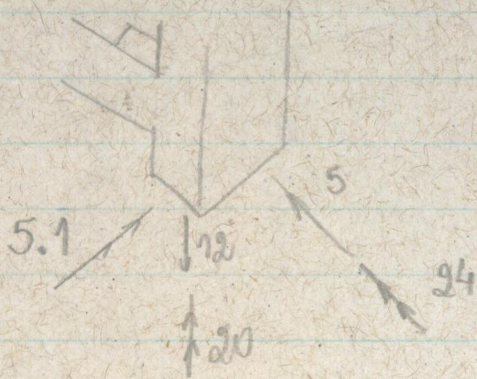
(b) Seção B1



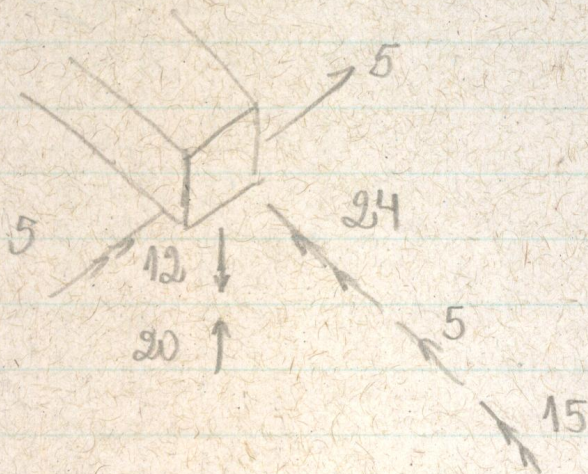
(c) Seção C2



(d) Seção B₂:



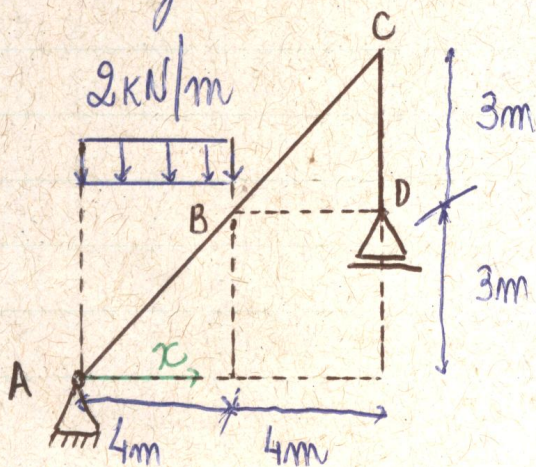
(e) Seção B₃



São Paulo, 10 de abril de 2008.

Exercícios

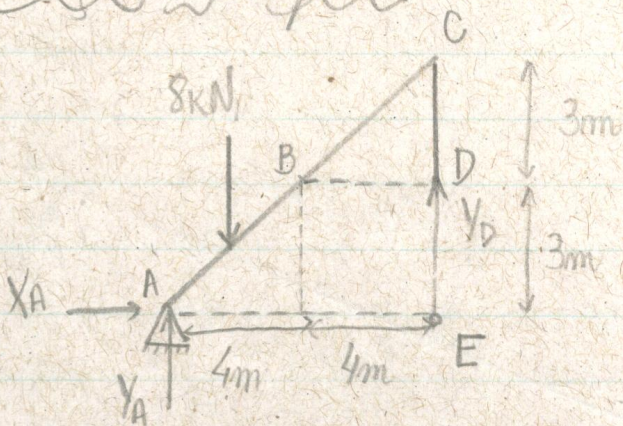
1) Seja a seguinte estrutura:



Determinar:

- a) As reações em A e D
- b) As equações dos esforços solicitantes no trecho AB.

a) 1) Reações nos apoios



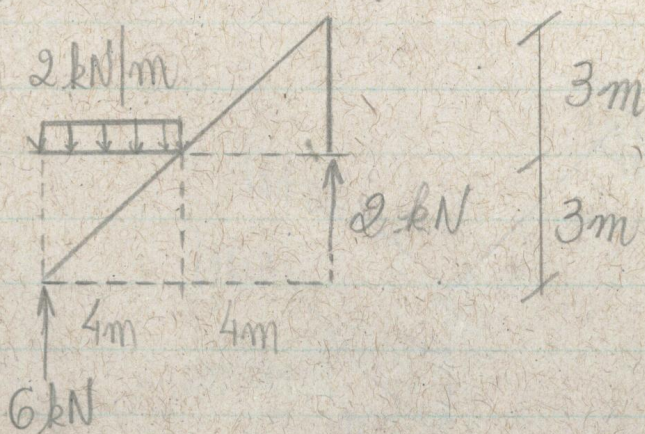
$$\oplus \rightarrow \sum X = 0 : X_A = 0$$

$$\oplus \curvearrowright \sum M(A) = 0 : -8 \cdot 2 + 8 Y_D = 0$$
$$Y_D = 2 \text{ kN}$$

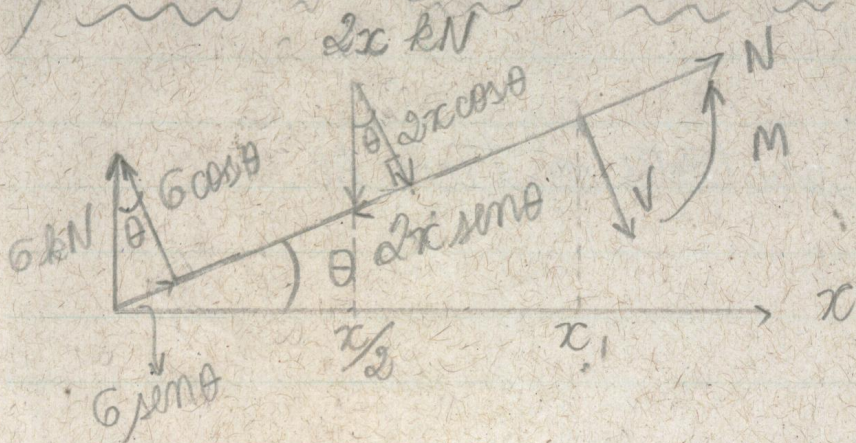
$$\ominus \curvearrowright \sum M(E) = 0 : -8 Y_A + 8 \cdot 6 = 0$$
$$Y_A = 6 \text{ kN}$$

$$\oplus \uparrow \sum Y = 0 : Y_A + Y_D = 8 \text{ (ok!)}$$

b) 2) Diagrama de Corpo Livre

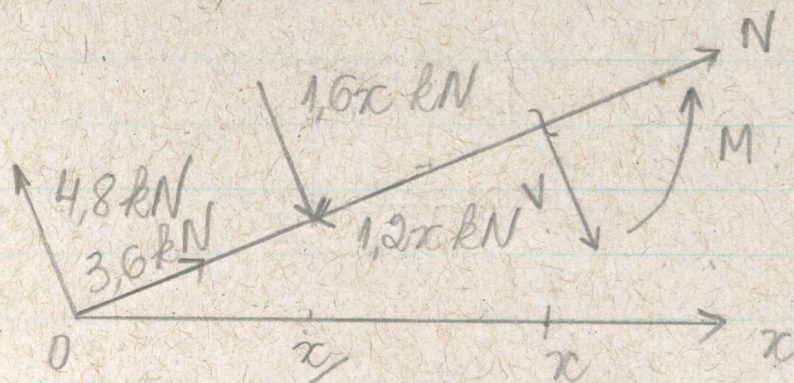


3) Teorema do Corte - Barra AB



$$\begin{aligned} \sin \theta &= 0,6 \\ \cos \theta &= 0,8 \end{aligned}$$

Sistema Equivalente

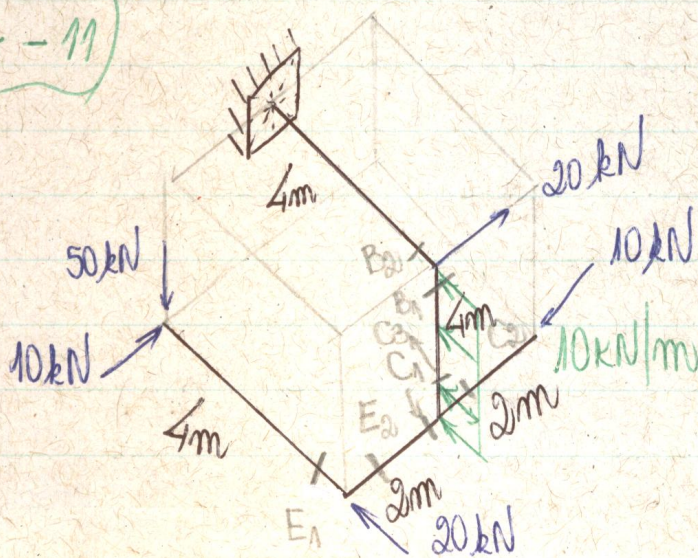


$$\begin{aligned} \oplus \sum X = 0: \quad & 3,6 - 1,2x + N = 0 \\ & \boxed{N = 1,2x - 3,6} \end{aligned}$$

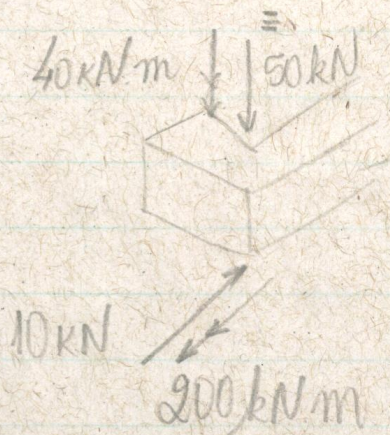
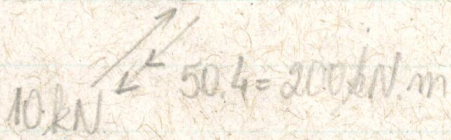
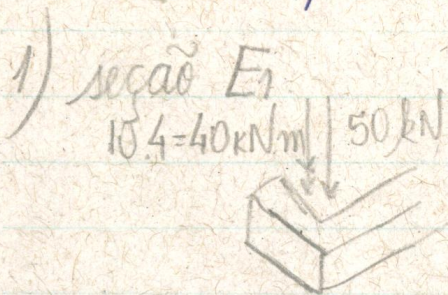
$$\begin{aligned} \oplus \sum Y = 0: \quad & 4,8 - 1,6x - V = 0 \\ & \boxed{V = 4,8 - 1,6x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oplus \sum M(x) = 0: \quad & M + (1,6x \cdot x) - 4,8x = 0 \\ & \boxed{M = -0,8x^2 + 4,8x} \end{aligned}$$

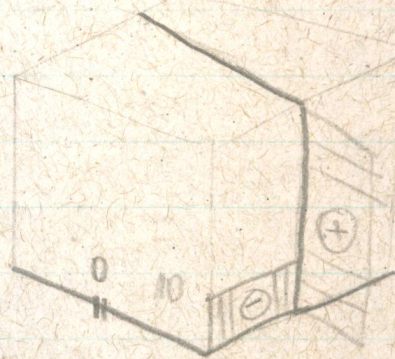
Lista P1b - 11)



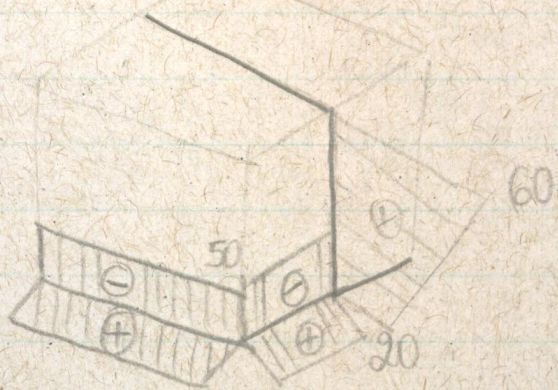
Pede-se para determinar os esforços solicitantes em BC.



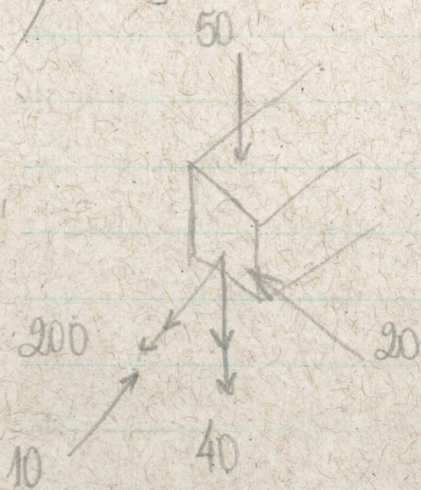
(N)



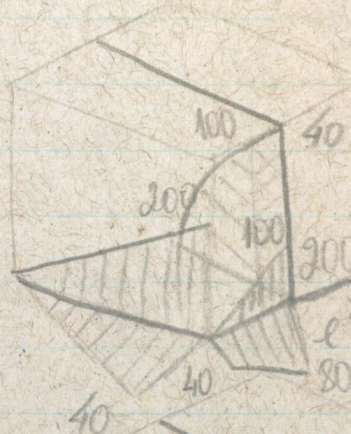
(V)



2) seção E_2



(M)

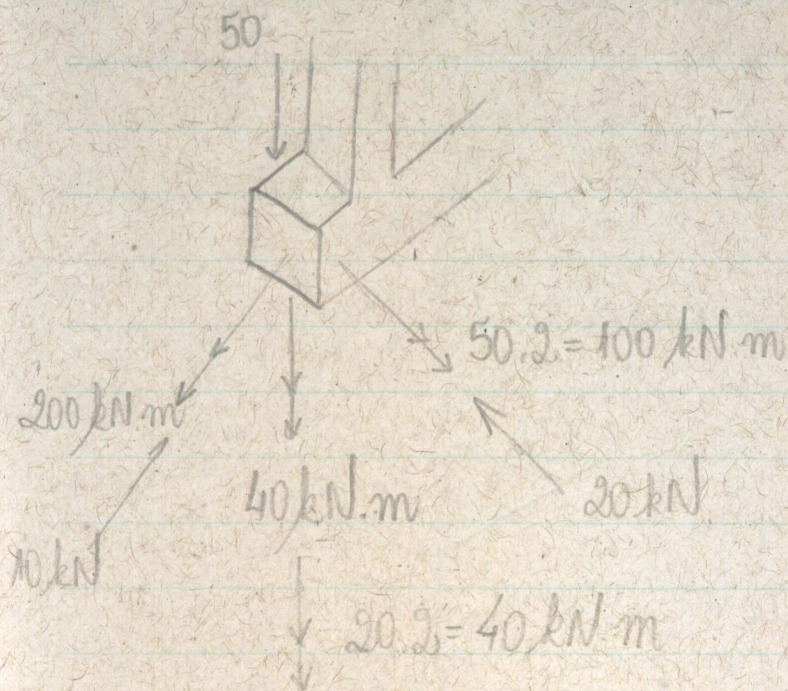


(T)

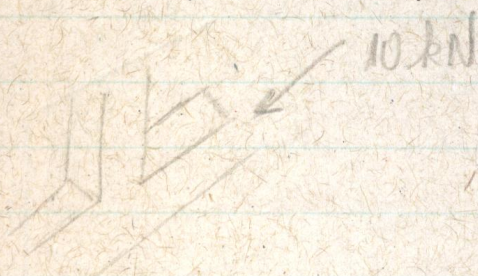


(desenho na
futura
tracenada)
R.M.D: a barra
é deformada de
acordo com o
movimento
da mão.
⊕ → sai
da figura

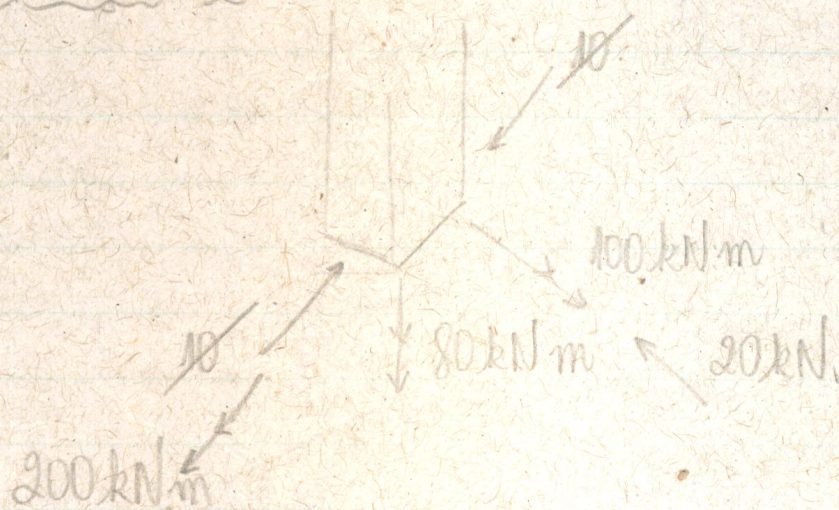
3) Seção C₁



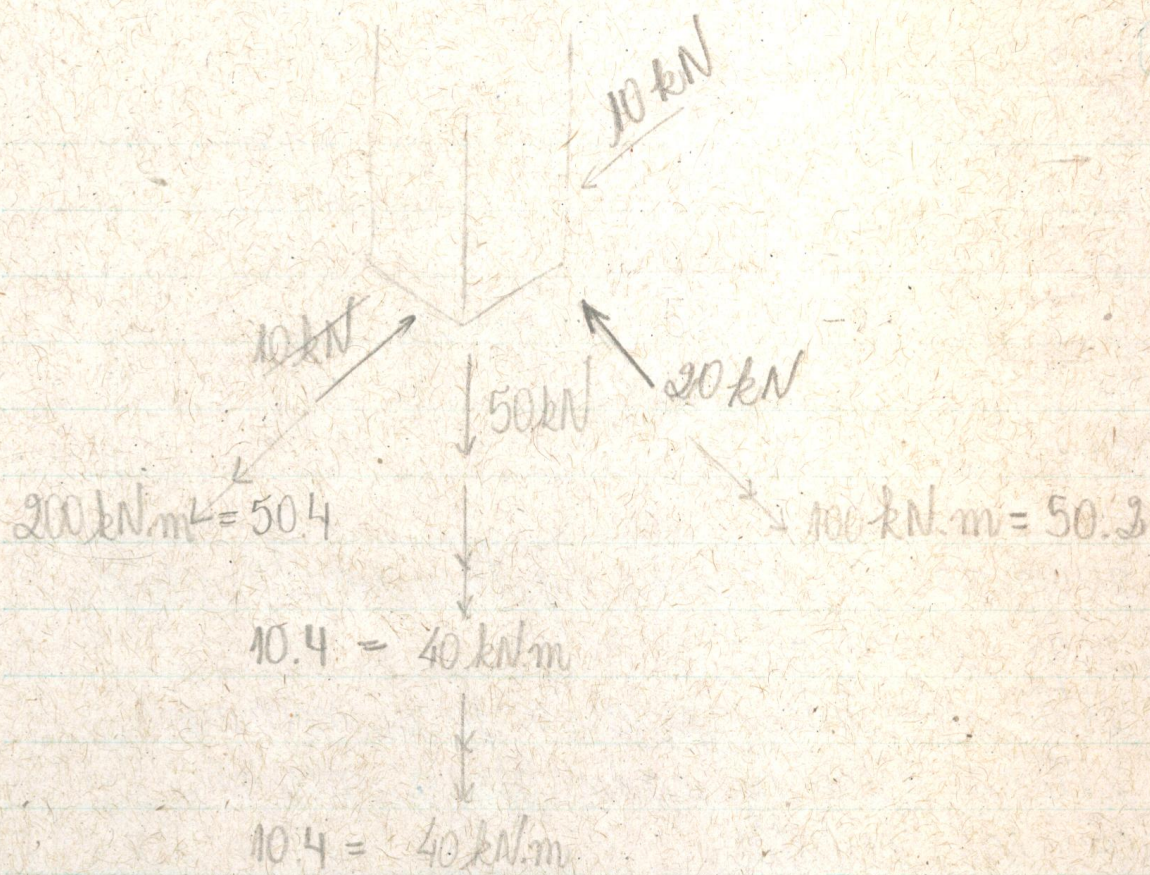
4) Seção C₂



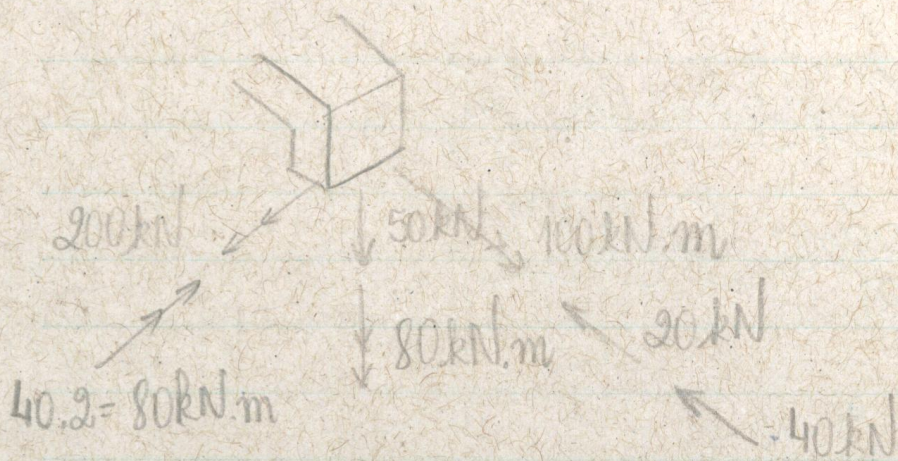
5) Seção C₃



Esta etapa poderia ser diretamente obtida dos pontos F, E e D tomando-se os braços convenientes.



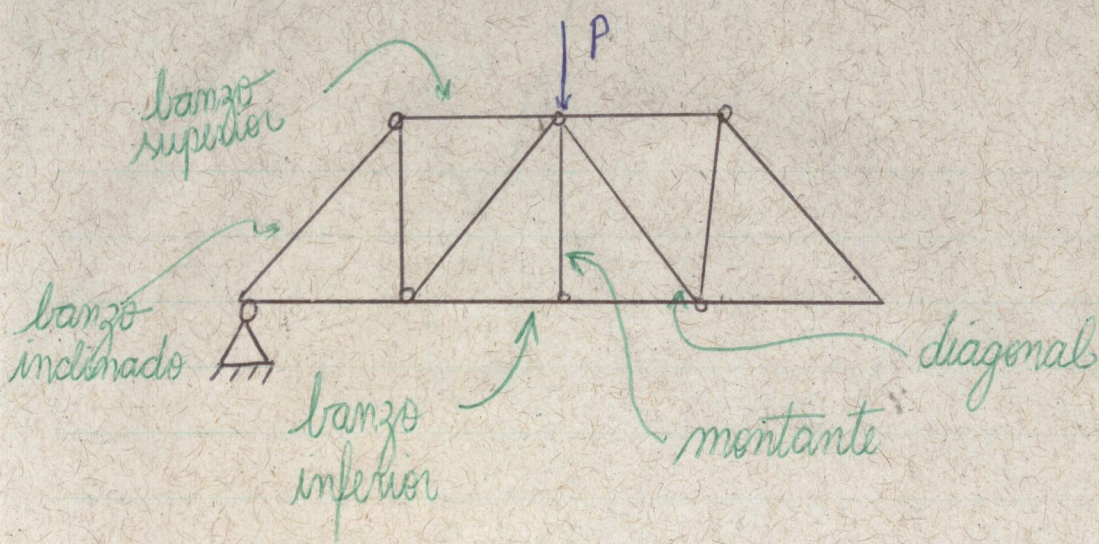
⑥ Seção B1



São Paulo, 18 de abril de 2007.

Trilças

São estruturas formadas por barras articuladas nas extremidades.



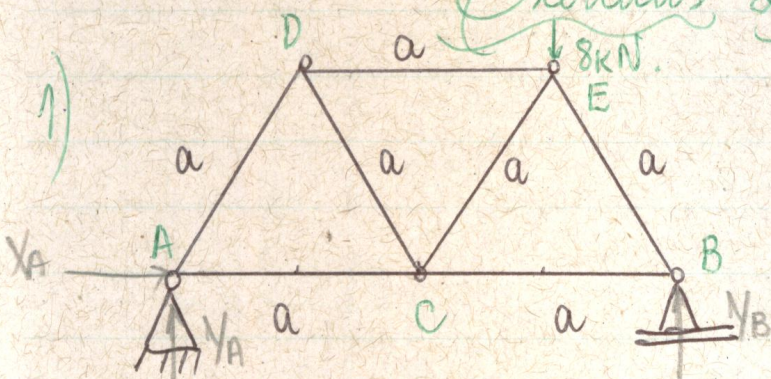
Serão assumidas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- as treliças são isostáticas.
- as barras estão submetidas apenas a forças normais.
- os esforços externos estão aplicados apenas nos nós.
- as articulações são perfeitas.

As treliças foram difundidas devido à redução do uso de material. Por outro lado, a criação de nós se torna muito complicada.

Método do Equilíbrio dos Nós

Exercícios - Lista P1c



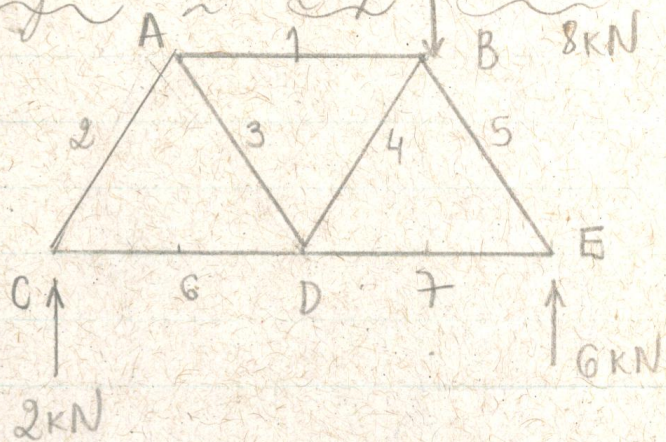
1) Reações nos apoios

$$\oplus \sum X = 0 \rightarrow X_A = 0$$

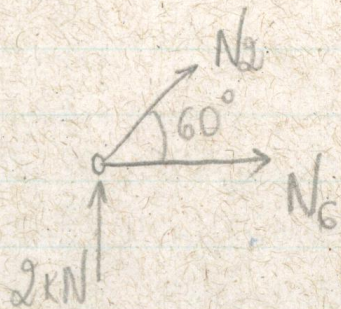
$$\oplus \sum M(B) = 0 \rightarrow \frac{8a}{2} - 2aY_A \rightarrow Y_A = 2 \text{ kN} //$$

$$\oplus \sum M(A) = 0 \rightarrow -\frac{8 \cdot 3a}{2} + 2aY_B \rightarrow Y_B = 6 \text{ kN} //$$

2) Diagrama de Corpo Livre



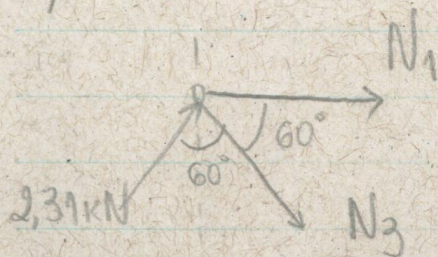
a) nó C



$$\sum Y = 0: 2 + N_2 \sin 60^\circ = 0 \rightarrow N_2 = -\frac{4}{\sqrt{3}} = -2,31 \text{ kN (compressão)}$$

$$\sum X = 0: N_2 \cos 60^\circ + N_6 = 0 \rightarrow N_6 = 2,31 \cdot \frac{1}{2} \cong 1,15 \text{ kN (tração)}$$

b) nó A



$$\sum X = 0: 2,31 \sin 30^\circ + N_1 + N_3 \sin 30^\circ = 0$$

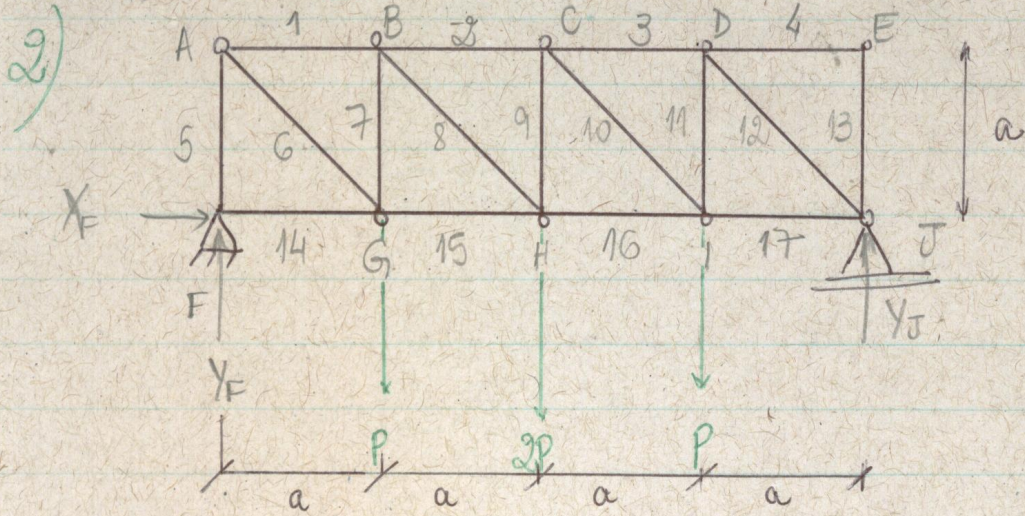
$$N_1 = -2,31 \text{ kN (compressão)}$$

$$\sum Y = 0: 2,31 \cos 30^\circ - N_3 \cos 30^\circ = 0$$

$$N_3 = 2,31 \text{ kN (tração)}$$

São Paulo, 25 de abril de 2008.

Exercícios - Lista P1C



Como não há esforços horizontais, ambos os apoios só possuem reações verticais. Pode-se fazer a análise do problema em apenas metade da estrutura devido a simetria dos apoios, dos esforços e da estrutura.

1) Reações nos apoios.

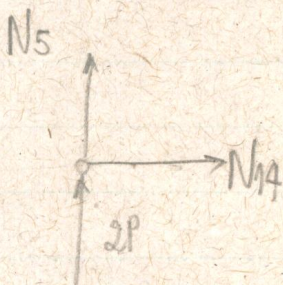
$$\oplus \rightarrow \sum X = 0 \rightarrow X_F = 0$$

$$\oplus \uparrow \sum Y = 0 \rightarrow Y_F + Y_J = 4P$$

Simetria: $Y_F = Y_J = 2P$

2) Equilíbrio dos Nós

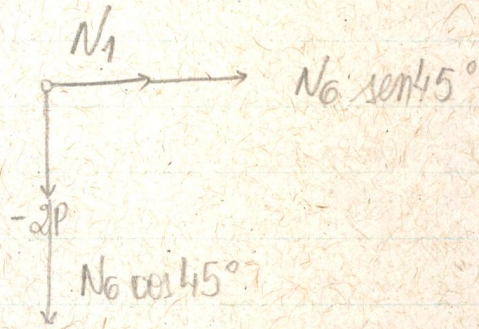
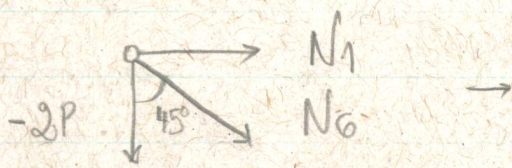
a) Nó E



$$N_{14} = 0$$

$$N_5 = -2P \text{ (compressão)}$$

b) Nó A



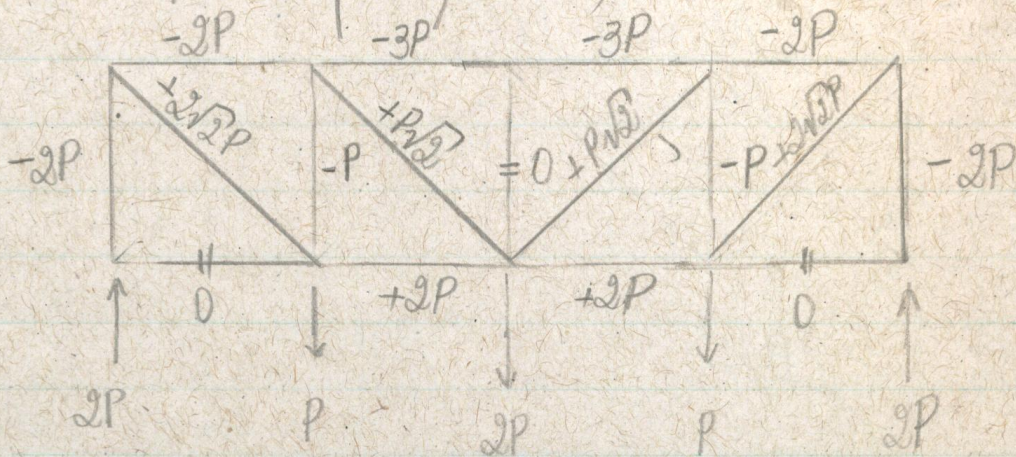
$$N_6 \cos 45^\circ - 2P = 0$$

$$N_6 = \frac{2P \cdot 2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}P \text{ (tração)}$$

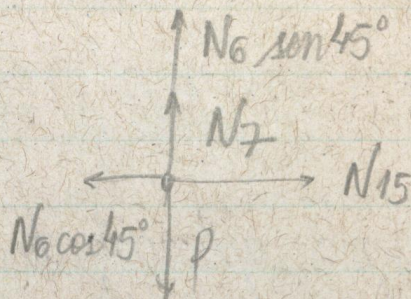
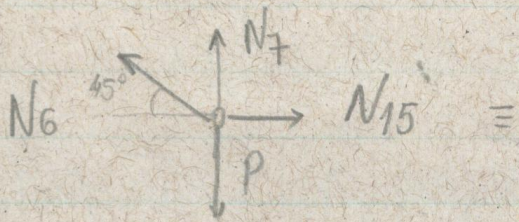
$$N_1 + N_6 \sin 45^\circ = 0$$

$$N_1 + \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}P}{2} = 0$$

$$N_1 = -2P \text{ (compressão)}$$



c) Nó G



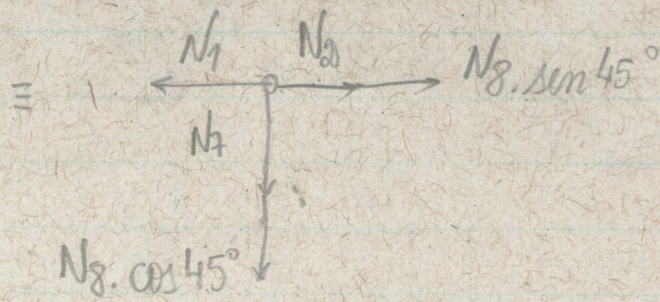
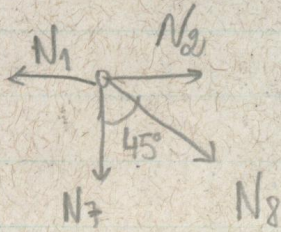
$$N_{15} = N_6 \cos 45^\circ$$

$$N_{15} = +2P \text{ (tração)}$$

$$N_6 \sin 45^\circ + N_7 = P$$

$$N_7 = P - 2P = -P \text{ (compressão)}$$

d) Nó B



• $N_7 + N_8 \cos 45^\circ = 0$

$N_8 = \frac{-N_7}{\cos 45^\circ}$

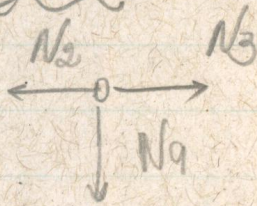
$N_8 = P\sqrt{2}$
(tração)

• $N_1 = N_2 + N_8 \sin 45^\circ$

$-2P = N_2 + P$

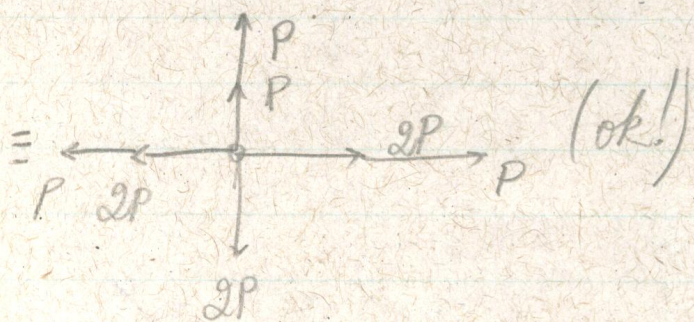
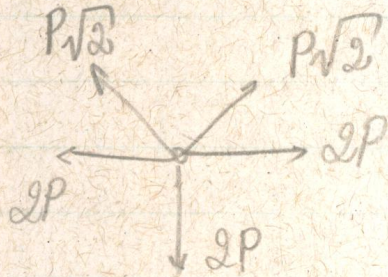
$N_2 = -3P$
(compressão)

e) Nó C



$N_2 = N_3$ (ok!)
 $N_9 = 0$

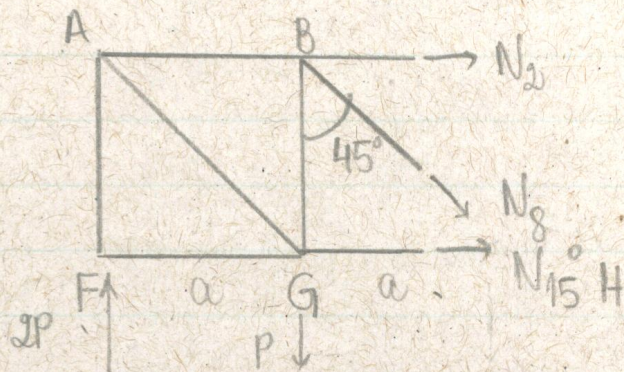
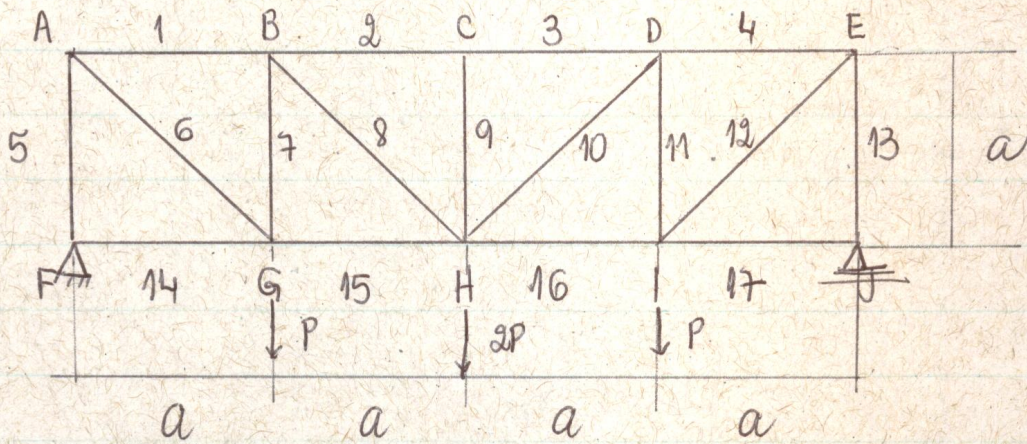
Verificação - nó H



Método de Ritter ou das Seções

É uma aplicação do Teorema do Corte feita para se detectar forças em alguma(s) barra(s).

Exercício: Determinar as forças de tração/compressão nas barras 2, 8 e 15.



$$M = (P-0) \wedge \vec{r}$$

$$M_{N_2} = (0, a) \wedge (N_2, 0) = -N_2 a \vec{k}$$

$$\oplus \sum M(H) = 0 \rightarrow +P \cdot a - 2P \cdot 2a - N_2 \cdot a = 0$$

$$N_2 = -3P$$

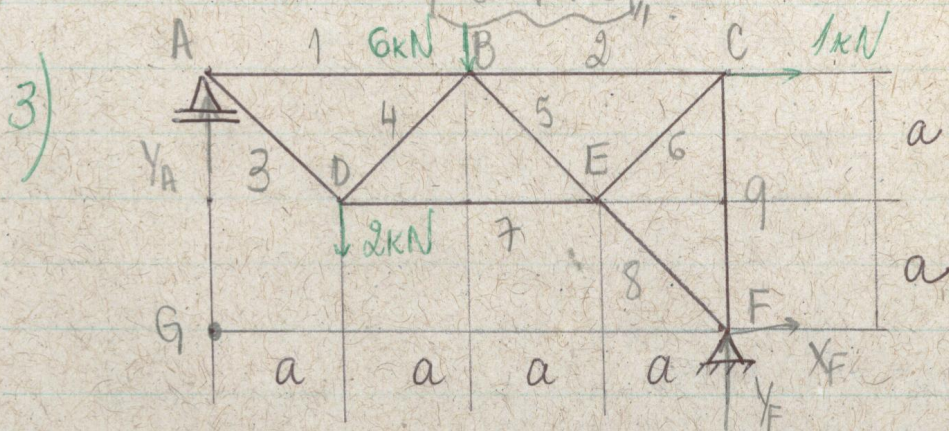
$$\oplus \sum M(B) = 0 \rightarrow -2P \cdot a + N_{15} \cdot a = 0$$

$$M_{N_{15}(B)} = (a, -a) \wedge (N_{15}, 0) = N_{15} \cdot a \vec{k}$$

$$N_{15} = 2P$$

$$\oplus \uparrow \sum Y = 0 \rightarrow P = N_8 \cdot \cos 45^\circ$$

$$N_8 = P\sqrt{2}$$



1) Reações nos apoios

$$\oplus \sum X = 0 \rightarrow X_F = -1 \text{ kN}$$

$$\oplus \sum M_{(F)} = 0 \rightarrow -Y_A \cdot 4a + 2a \cdot 3 + 2a \cdot 6 - 1 \cdot 2a = 0$$

$$4Y_A = 16$$

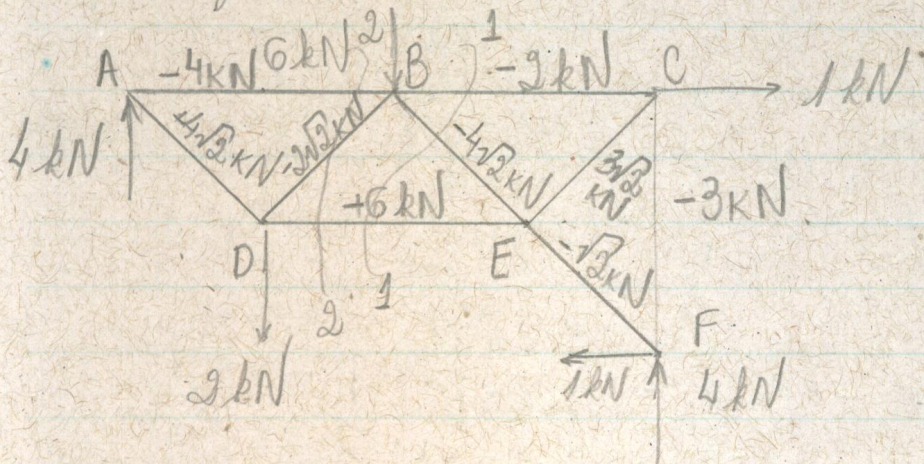
$$Y_A = 4 \text{ kN}$$

$$\oplus \sum M_{(G)} = 0 \rightarrow -2a - 6 \cdot 2a - 1 \cdot 2a + 4a Y_F = 0$$

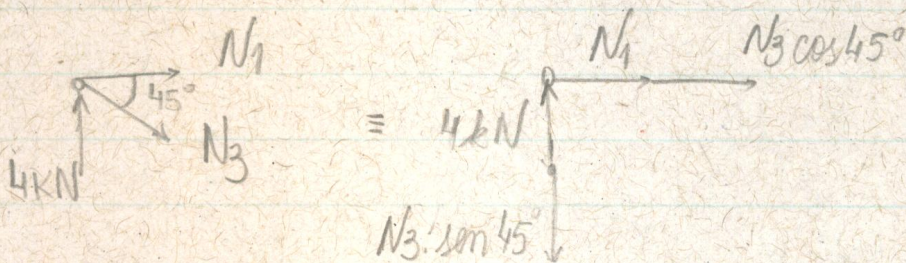
$$4Y_F = 16$$

$$Y_F = 4 \text{ kN}$$

2) Diagrama do Corpo Livre



a) nó A

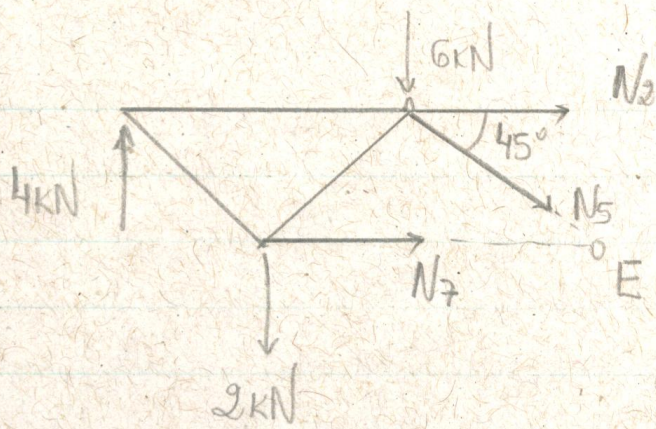


$$N_3 = \frac{4}{\sin 45^\circ} = 4\sqrt{2} \text{ kN (tração)}$$

$$N_1 = -N_3 \cos 45^\circ$$

$$N_1 = -4 \text{ kN (compressão)}$$

b) Corte 1-1



$$\oplus \uparrow \sum Y = 0: 4 - 2 - 6 - N_5 \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$N_5 = \frac{-4}{\sin 45^\circ} = -4\sqrt{2} \text{ kN (compressão)}$$

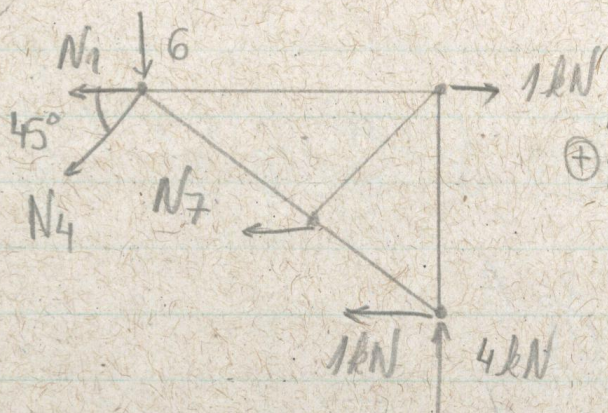
$$\oplus \curvearrowright \sum M(B) = 0: N_7 \cdot a + 2 \cdot a - 4 \cdot 2a = 0$$

$$N_7 = +6 \text{ kN (tração)}$$

$$\oplus \curvearrowright \sum M(E) = 0: -N_2 \cdot a + 6 \cdot a + 2 \cdot 2a - 4 \cdot 3a = 0$$

$$N_2 = -2 \text{ kN (compressão)}$$

c) Corte 2-2

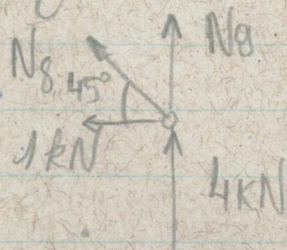


$$\oplus \uparrow \sum Y = 0$$

$$-N_4 \cdot \sin 45^\circ + 4 - 6 = 0$$

$$N_4 = -2\sqrt{2} \text{ kN (compressão)}$$

d) Nó F



$$\oplus \curvearrowright \sum X = 0$$

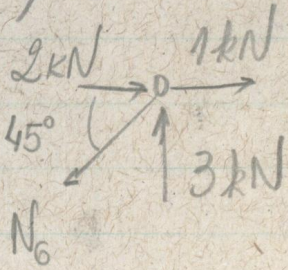
$$-N_8 \cdot \sin 45^\circ - 1 = 0$$

$$N_8 = -\sqrt{2} \text{ kN (compressão)}$$

$$\oplus \uparrow \sum Y = 0: 4 + N_9 + N_8 \cos 45^\circ = 0$$

$$N_9 = -4 + 1 = -3 \text{ kN (compressão)}$$

e) Nó C

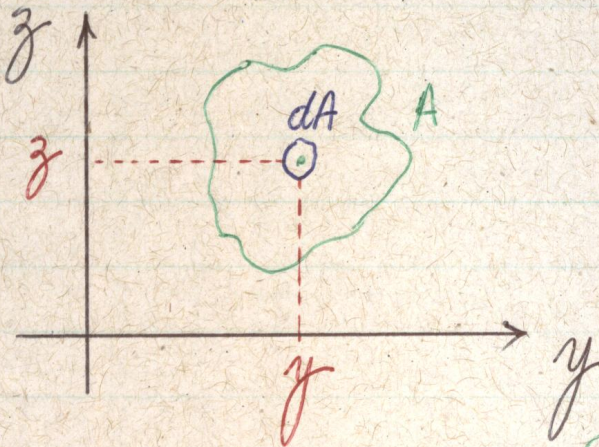


$$\oplus \uparrow \sum Y = 0 \rightarrow -N_6 \cdot \cos 45^\circ + 3 = 0$$
$$N_6 = 3\sqrt{2} \text{ kN}$$

São Paulo, 09 de maio de 2008.

Características das Figuras Planas

1) Momento Estático e Centro de Gravidade



• Momento Estático em Torno do Eixo "y" (S_y)

$$S_y = \int_A z dA = z_G \cdot A$$

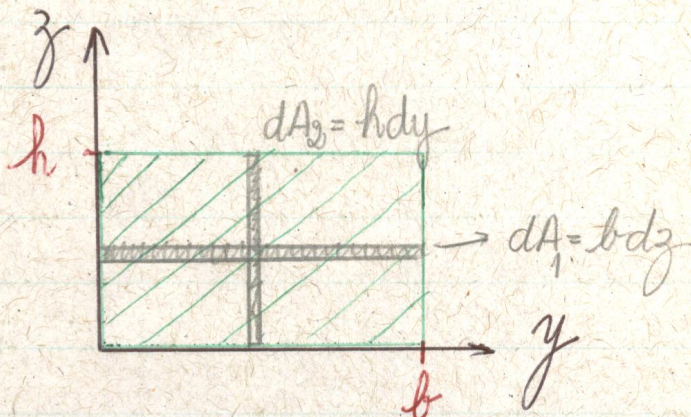
"z" do centro de gravidade

• Momento Estático em Torno do Eixo "z" (S_z)

$$S_z = \int_A y dA = y_G \cdot A$$

"y" do centro de gravidade

Exemplos 1) Determinar os momentos estáticos da seguinte figura e as coordenadas de seu centro de gravidade.



• Momentos estáticos

$$S_{y_{A_1}} = \int_{A_1} z dA_1 = \int_0^h z b dz = \frac{bh^2}{2}$$

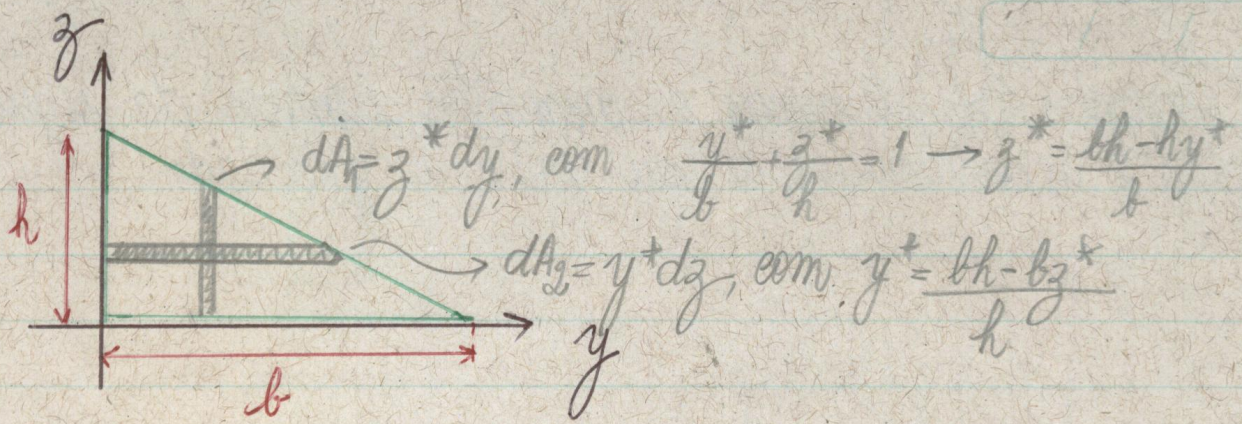
$$S_{z_{A_2}} = \int_{A_2} y dA_2 = \int_0^b y h dy = \frac{b^2 h}{2}$$

• Centro de gravidade

$$z_G = \frac{S_{y_{A_1}}}{A} = \frac{bh^2}{2bh} = \frac{h}{2}$$

$$y_G = \frac{S_{z_{A_2}}}{A} = \frac{b^2 h}{2bh} = \frac{b}{2}$$

2) Determinar os momentos estáticos e a posição do centro de gravidade da seguinte figura plana:



→ Momentos estáticos

$$S_z = \int_A y dA = \int_0^b \frac{(bh - by)}{b} y dy = \int_0^b \frac{bhy - hy^2}{b} dy$$

$$S_z = \frac{bhy^2}{2b} \Big|_0^b - \frac{hy^3}{3b} \Big|_0^b$$

$$S_z = \frac{b^2h}{2} - \frac{b^2h}{3} = \frac{b^2h}{6} \quad \checkmark$$

$$S_y = \int_A z dA = \int_0^h \frac{(bh - bz)}{h} z dz = \int_0^h bz dz - \int_0^h \frac{bz^2}{h} dz$$

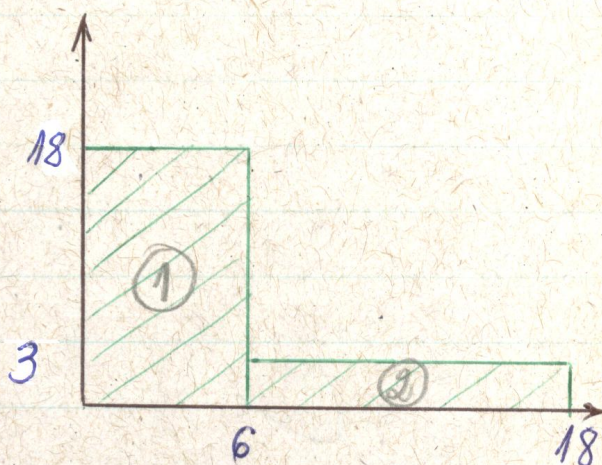
$$S_y = \frac{bh^2}{2} - \frac{bh^3}{3h} = \frac{bh^2}{6} \quad \checkmark$$

→ Centros de Gravidade

$$y_G = \frac{S_z}{A} = \frac{b^2h}{6} \cdot \frac{2}{bh} = \frac{b}{3} \quad \checkmark$$

$$z_G = \frac{S_y}{A} = \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{2}{bh} = \frac{h}{3} \quad \checkmark$$

3) Determinar o centro de gravidade da seguinte figura:



$$A = A_1 + A_2 = 18 \cdot 6 + 3 \cdot 12 = 108 + 36 = 144$$

$$S_{y1} = A_1 z_{G1} + A_2 z_{G2}$$

$$S_{y1} = 108 \cdot 9 + 36 \cdot 1,5$$

$$S_{y1} = 972 + 54 = 1026$$

$$z_G = \frac{S_{y1}}{A} \approx 7,13$$

$$S_{z1} = A_1 y_{G1} + A_2 y_{G2}$$

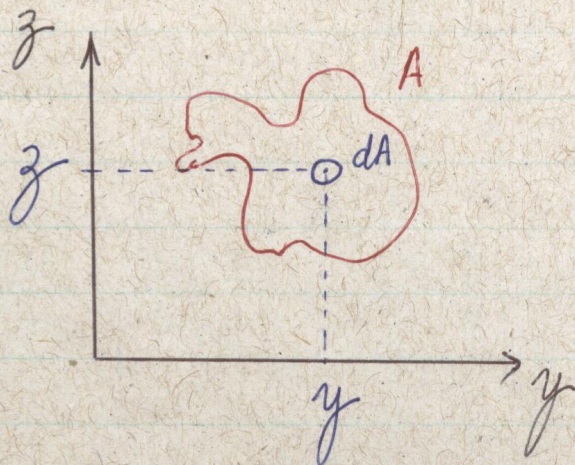
$$S_{z1} = 108 \cdot 3 + 36 \cdot 6$$

$$S_{z1} = 324 + 216$$

$$S_{z1} = 540$$

$$y_G = \frac{S_{z1}}{A} = \frac{540}{144} = 3,75$$

2) Momentos de Inércia



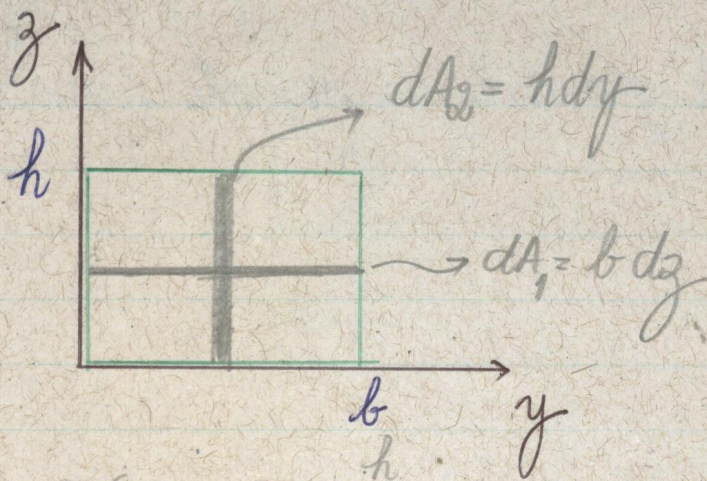
• Momento de Inércia em relação ao eixo y

$$I_y = \int z^2 dA$$

• Momento de Inércia em relação ao eixo z

$$I_z = \int y^2 dA$$

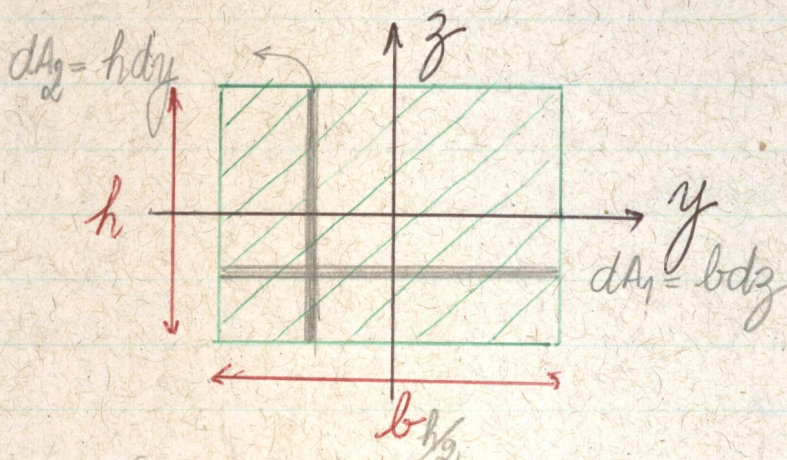
Exemplos: Calcular os momentos de inércia da seguinte figura plana.



$$I_y = \int_A z^2 dA_1 = \int_0^h b z^2 dz = \frac{b h^3}{3} \quad \checkmark$$

$$I_z = \int_A y^2 dA_2 = \int_0^b h y^2 dy = \frac{b^3 h}{3} \quad \checkmark$$

2) Calcular os momentos de inércia da seguinte figura plana:



$$I_y = \int z^2 dA_1 = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} b z^2 dz = \frac{b z^3}{3} \Big|_{-0,5b}^{0,5b} = \frac{b h^3}{24} + \frac{b h^3}{24} = \frac{b h^3}{12} \quad \checkmark$$

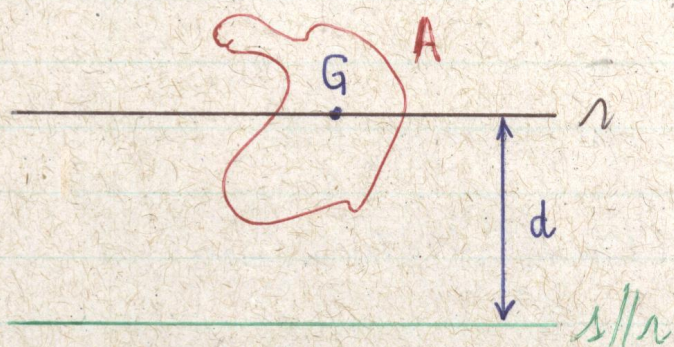
$$I_z = \int y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} h y^2 dy = \frac{h y^3}{3} \Big|_{-0,5h}^{0,5h} = \frac{b^3 h}{12} \quad \checkmark$$

Fisicamente, o momento de inércia indica a tendência natu-

ral de giro em relação a um dado eixo.

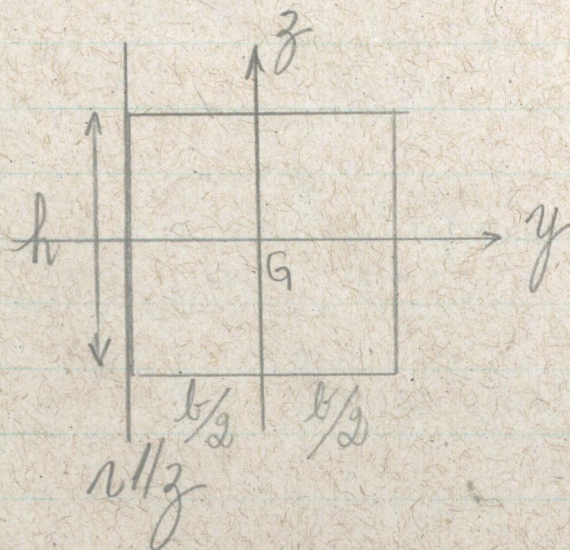
3) Teorema de Steiner

O teorema de Steiner afirma que o momento de inércia em relação a um certo eixo se relaciona ao momento de inércia da mesma figura em relação a um eixo paralelo àquele que passe pelo centro de gravidade.



$$I_s = I_n + A d^2$$

Exemplo. Mostre o resultado do exemplo 1,1 a partir do resultado de 2,1.



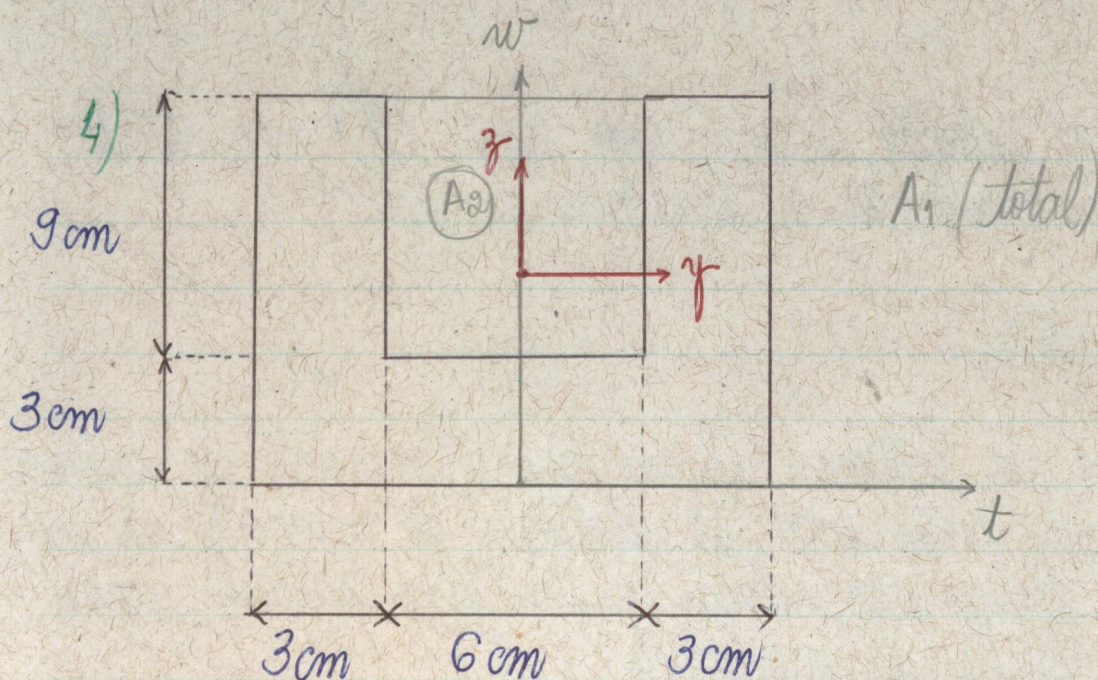
$$I_n = I_z + A \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$I_n = \frac{b^3 h}{12} + \frac{bh \cdot b^2}{4}$$

$$I_n = \frac{b^3 h}{12} + \frac{b^3 h}{4}$$

$$I_n = \frac{4b^3 h}{12} = \frac{b^3 h}{3} \quad \checkmark$$

Exercícios - Lista P2A



→ Centro de Gravidade

$$x_G = 0 \text{ (simetria)}$$

$$y_G = \frac{A_1 \cdot w_{G1} - A_2 \cdot w_{G2}}{A_1 - A_2} = \frac{144 \cdot 6 - 54 \cdot 7,5}{144 - 54} \approx 5,1$$

→ Teorema de Steiner

$$I_y = \left(\frac{12 \cdot 12^3}{12} + 12 \cdot 12 \cdot (6 - 5,1)^2 \right) - \left(\frac{6 \cdot 9^3}{12} + 6 \cdot 9 \cdot (7,5 - 5,1)^2 \right)$$

$$I_y = 1844,64 - 675,54$$

$$I_y = 1169,1 \text{ cm}^4$$

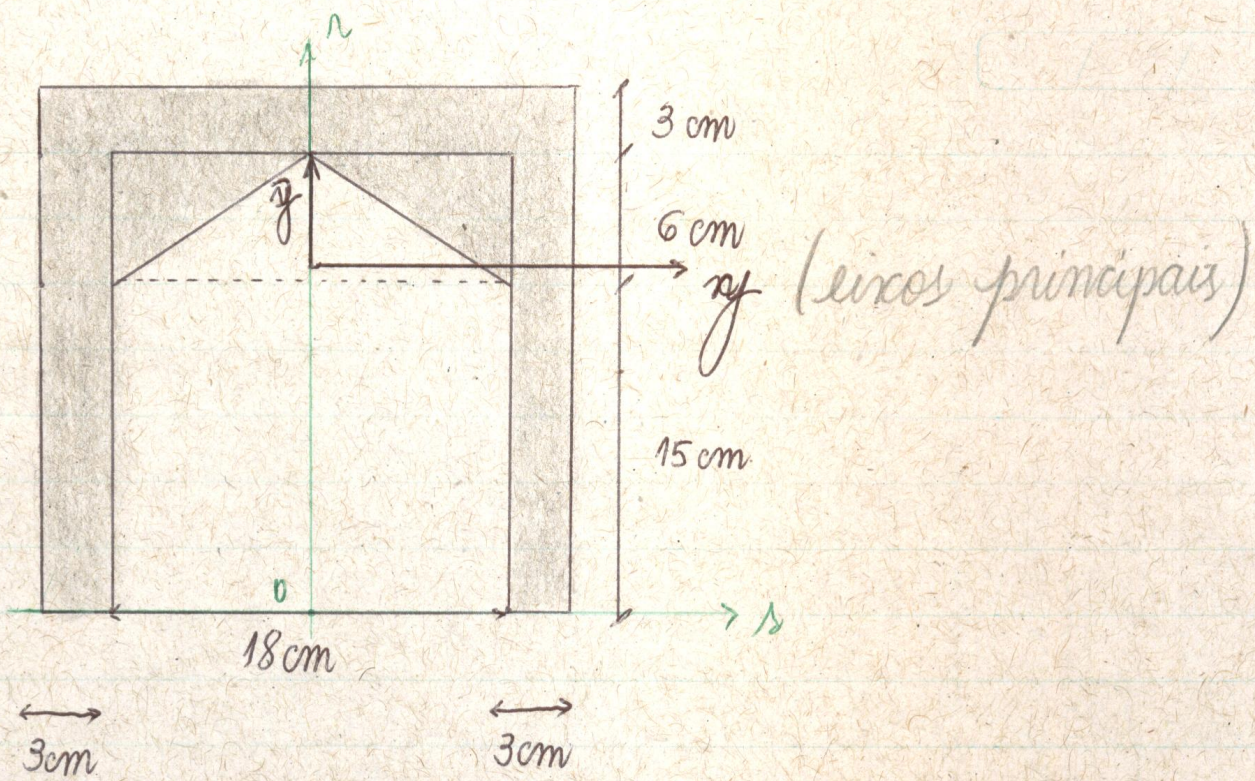
maior tendência
de giro em torno de y
($I_y < I_z$)

$$I_z = \frac{12 \cdot 12^3}{12} - \frac{9 \cdot 6^3}{12} = 1728 - 162 = 1566 \text{ cm}^4$$

São Paulo, 14 de maio de 2008.

Continuação - Lista P2A

5)



a) $\Delta_{CG} = 0$

$$\Delta_{CG} = \text{[shaded square]} \cdot \Delta_{G_{\text{sq}}} - \text{[triangle]} \cdot \Delta_{G_{\text{tri}}} - \text{[unshaded square]} \cdot \Delta_{G_{\text{sq}}}$$

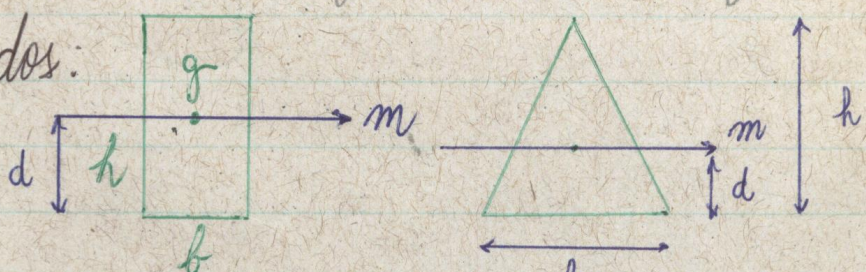
$$24 \cdot 24 \cdot 12 - 15 \cdot 18 \cdot 7,5 - \left(\frac{18 \cdot 6}{2} \right) \cdot 17$$

$$\Delta_{CG} = \frac{24 \cdot 24 - 15 \cdot 18 - 9 \cdot 6}{\dots}$$

$\Delta_{CG} = 15,75 \text{ cm}$

b) Tomar sistema (x, y) no centro de gravidade

Dados:



$$I_m = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_m = \frac{bh^3}{36}$$

$I_r = I_m + Ad^2$

$$\cdot I_y = \left(\frac{24 \cdot 24^3}{12} + 24^2 (15,75 - 12)^2 \right) - \left(\frac{18 \cdot 15^3}{12} + 18 \cdot 15 \cdot (7,5 - 15,75)^2 \right) - \left(\frac{18 \cdot 6^3}{36} + 9 \cdot 6 \cdot (17 - 15,75)^2 \right)$$

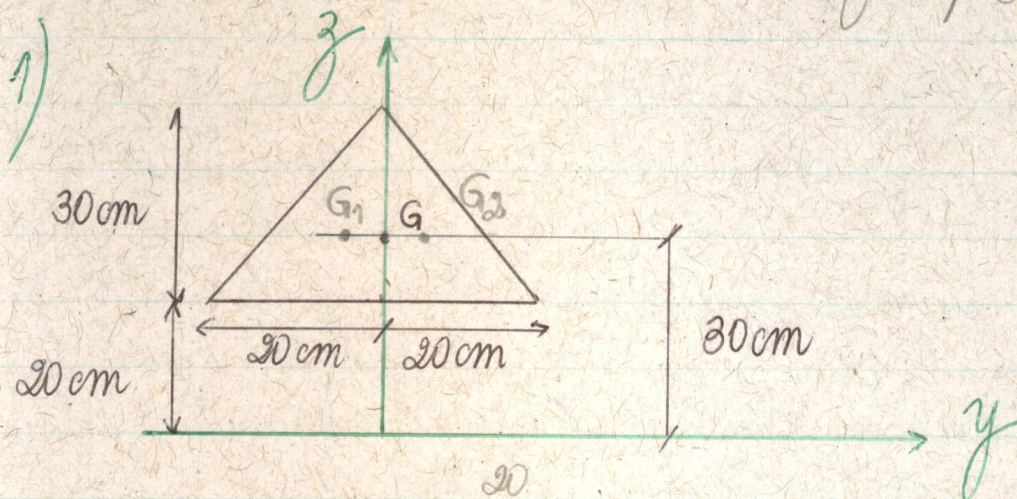
$$I_y = 35748 - 23439,375 - 192,375$$

$$I_y = 12116,25 \text{ cm}^4$$

$$\cdot I_z = \left(\frac{24 \cdot 24^3}{12} \right) - \left(\frac{15 \cdot 18^3}{12} \right) - 2 \left(\frac{6 \cdot 9^3}{36} + \frac{6 \cdot 9}{2} (9 - 6)^2 \right)$$

$$I_z = 27648 - 7290 - 729$$

$$I_z = 19629 \text{ cm}^4 \rightarrow \text{Indica maior estabilidade em torno do eixo "z" (peça dentada)}$$



$$\cdot I_y = \frac{40 \cdot 30^3}{36} + \frac{40 \cdot 30}{2} \cdot 900 = 570.000 \text{ cm}^4$$

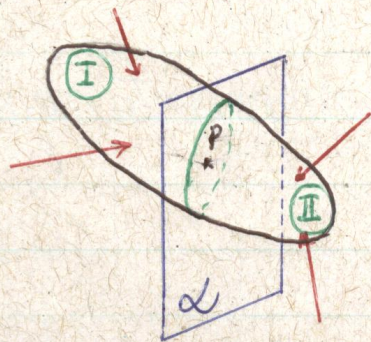
$$\cdot I_z = 2 \cdot \left(\frac{30 \cdot 20^3}{36} + \frac{30 \cdot 20}{2} \cdot \left(\frac{20}{3} \right)^2 \right)$$

$$I_z = 40000 \text{ cm}^4 \text{ (menor estabilidade)}$$

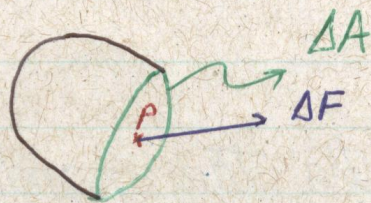
Tensões e Deformações

1) Tensões

Considere a seguinte figura:



O plano α corta o sólido geométrico em dois hemisférios. Pelo Teorema do Corte, existe uma força resultante aplicada à seção transversal.



Supondo que tal força seja ΔF e que a seção transversal tenha área ΔA , define-se que a **tensão média em P**, no plano α na área ΔA é dada por:

$$\vec{p}_m = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

A tensão aplicada em P é expressa pela seguinte relação.

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \vec{f}_m$$

A tensão \vec{p} pode ser dividida em duas componentes distintas:

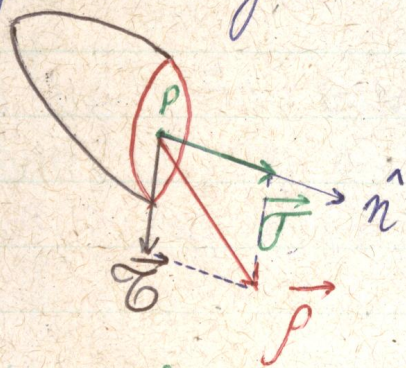
• Tensão normal ($\vec{\sigma}$): É a componente normal ao plano de corte.

$$\vec{\sigma} = \sigma \hat{n}$$

• Tensão Tangencial ($\vec{\tau}$): É a componente paralela ao plano de corte.

$$\vec{\tau} \in \mathcal{L}$$

A figura a seguir ilustra tais grandezas:

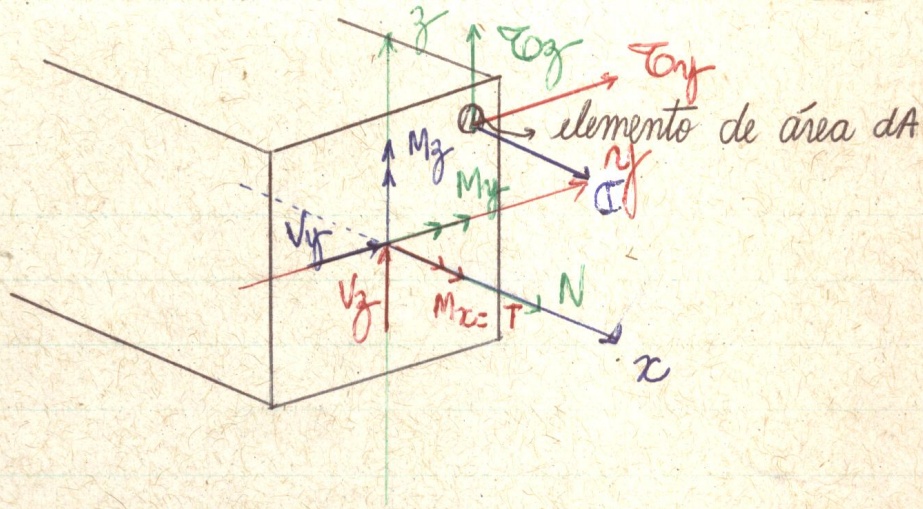


Conferir-se que

$$\vec{p} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$$

2) Esforços Solicitantes e Tensões

Considere a ilustração a seguir:

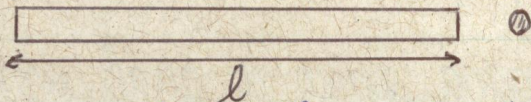


Podem ser mostradas as seguintes relações:

$\bullet N = \int_A \sigma dA$	$\bullet M_y = \int_A \sigma_z dA$
$\bullet V_y = \int_A \tau_{yz} dA$	$\bullet M_z = - \int_A \tau_{xy} dA$
$\bullet V_z = \int_A \tau_{xz} dA$	$\bullet T = \int_A (-\tau_{xy} z + \tau_{xz} y) dA$

3) Deformação Longitudinal

Considere uma barra com seção transversal circular e comprimento l :



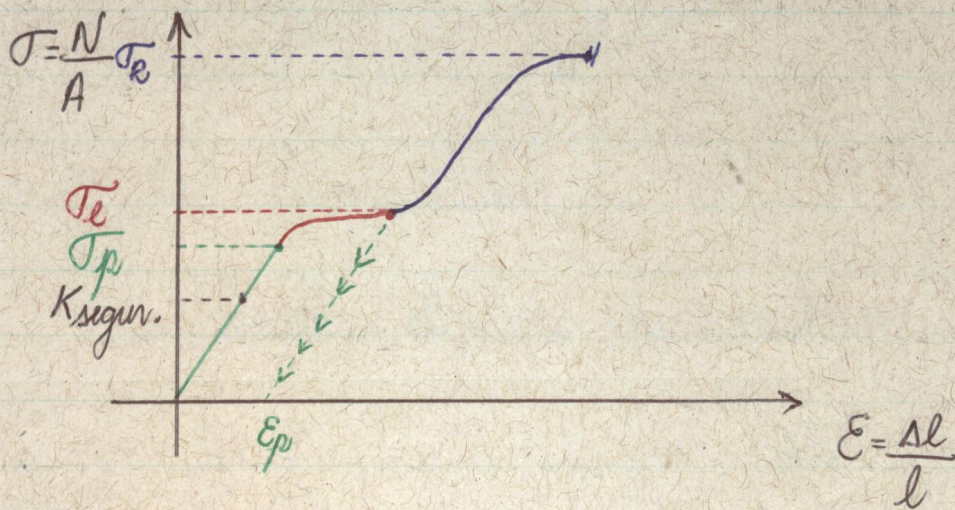
Se se aplicar força de tração, a mesma se deforma de Δl . Define-se como deformação específica da estrutura (ϵ):



4) Lei de Hooke

A lei de Hooke pode ser traduzida no seguinte grá-

fico:



Podem ser caracterizados os seguintes pontos notáveis:

• σ_p: Tensão de Proporcionalidade

É a tensão máxima para a qual o material se comporta elasticamente, ou seja, quaisquer deformações são restauradas quando o carregamento é cessado.

Existe linearidade entre σ e ϵ .

• σ_e: Tensão de Escoamento

É a tensão máxima para a qual uma estrutura se restaura quando um carregamento é cessado. Nesse caso, forma-se uma deformação residual (ϵ_p).

• σ_r: Tensão de Ruptura

É a tensão para a qual a estrutura sofre fratura.

É comum definir um coeficiente de segurança de tensão máxima abaixo de σ_p .

10) inglês Robert Hooke (1635-1703) descobriu o comportamento dos materiais em 1660.

- anagrama (1660): c e i i n o s s t u r
- 1678: Ut tensio sic vis (alonga-se com a força).

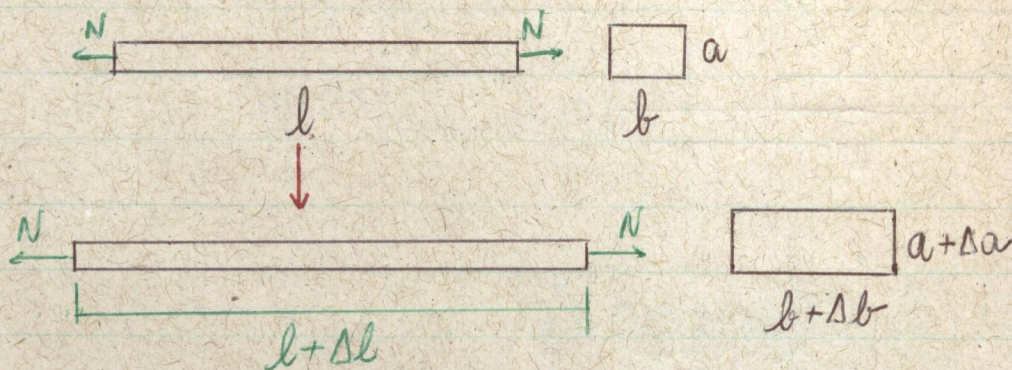
A equação que descreve o trecho linear da curva é:

$$\sigma = E \epsilon$$

A constante E é denominada módulo de Young, módulo de elasticidade ou deformação longitudinal.

- Exemplos
- a) aço: $E = 2100000 \text{ kgf/cm}^2 = 210.000 \text{ MPa}$
 - b) concreto: $E = 210.000 \text{ kgf/cm}^2 = 21.000 \text{ MPa}$
 - c) solo: $E = 3000 \text{ kgf/cm}^2 = 3.000 \text{ MPa}$

5) Deformação Transversal



$$\epsilon_t = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} \quad (\text{deformação longitudinal})$$

$$\nu = \frac{\epsilon_t}{\epsilon} \quad (\text{deformação transversal}), \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

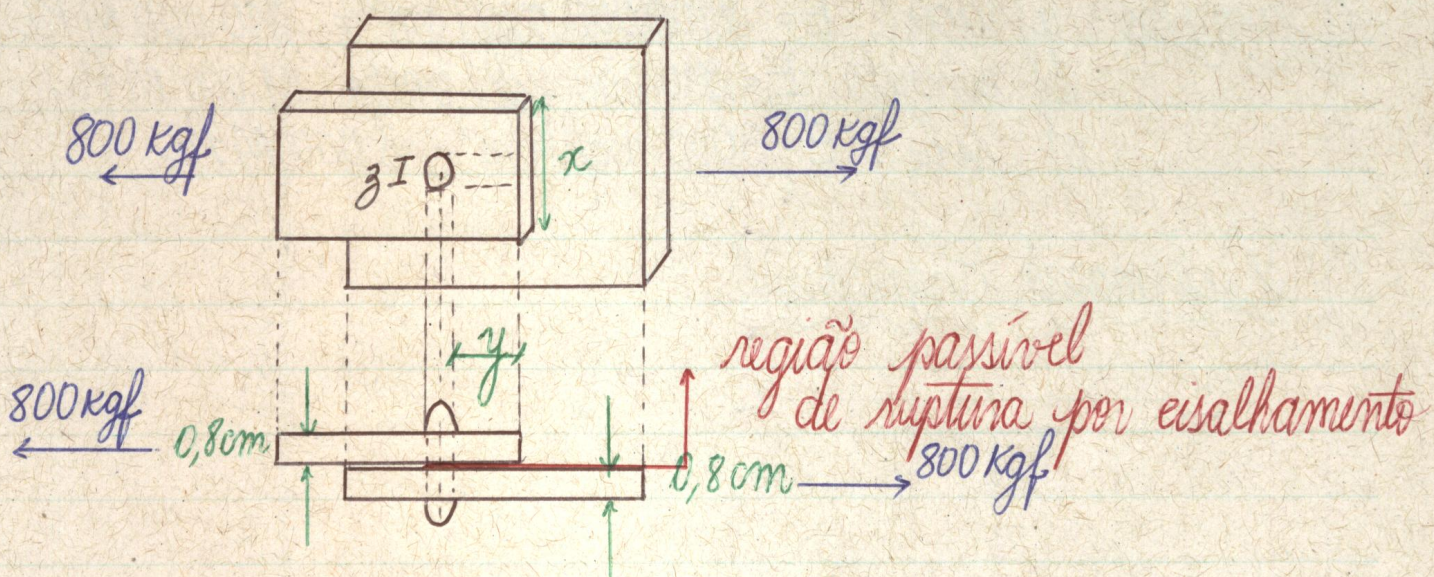
Exemplos: Vaco: 0,33
Vconcreto: 0,2

São Paulo, 06 de junho de 2008.

Continuação - Tensões e Deformações

6) Exemplo

Projetar a ligação das chapas. (Dados: $s=1,5$, $T_R=3000 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$, $T_R=1200 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$) com rebite ($s=2$, $T_R=1200 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$).



→ Coefficiente de Segurança (s)

Segurança é uma medida do afastamento de situação de ruptura em relação às condições de utilização da estrutura. A tensão admissível, também denominada reduzida ou de serviço, é obtida a partir da tensão de ruptura ou de escoamento:

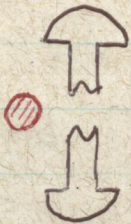
$$\tau_{\text{admissível}} = \frac{\tau_R \text{ ou } \tau_E}{s}, \text{ com } s \text{ sendo o coeficiente de segurança}$$

A tabela a seguir exibe valores usuais de coeficientes de segurança para vários materiais:

material	s	τ_R (kgf/cm ²)	$\tau_{\text{tração}}$ (kgf/cm ²)	$\tau_{\text{compressão}}$ (kgf/cm ²)
aço	1,6 a 3	3700	1200 a 1800	1200 a 1800
concreto	2,5 a 3	100 a 700	(não resiste)	60 a 100
granito	8 a 10	(produto natural)	4 a 6	40 a 60

10) coeficiente de segurança reflete o rigor do controle de qualidade do processo de fabricação do material.

6,1) Cisalhamento de Rebite

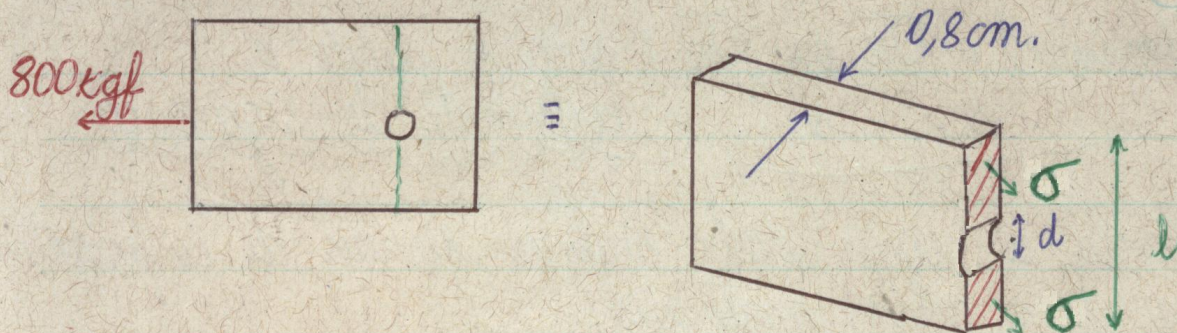


$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{800}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq \tau_{\text{reb}} = \frac{\tau_R}{s} = \frac{1200}{2}$$

$$\frac{800}{\pi d^2} \leq 600 \cdot \frac{1}{4}$$

$$d^2 \geq \frac{32}{6\pi} \rightarrow \boxed{d \geq 1,3 \text{ cm}}$$

6,2) Ruptura da Chapa por Tração



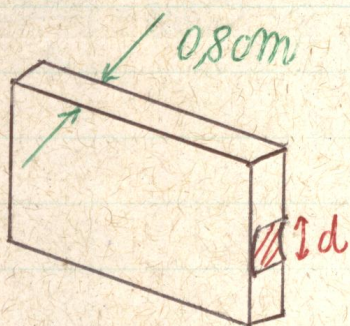
$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{800}{(l-d) \cdot 0,8} \leq \bar{\sigma}_{\text{chapa}} = \frac{\sigma_R}{s} = \frac{3000}{1,5}$$

Substituindo:

$$\frac{1000}{(l-d)} \leq 2000$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(l-d) \geq 1 \\ l \geq d + 0,5 \end{array} \right\}$$

6,3) Esmagamento da Chapa



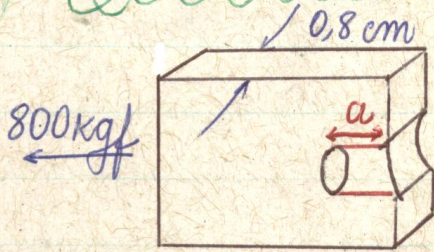
$$\sigma = \frac{800}{0,8d} \leq \bar{\sigma} = \frac{\sigma_R}{s} = \frac{3000}{1,5}$$

$$\frac{1000}{d} \leq 2000$$

$$\left\{ d \geq 0,5 \text{ cm} \right\}$$

Deve-se ressaltar que tal valor já está inserido nas exigências a serem cumpridas para evitar a ruptura do rebite por cisalhamento.

6,4) Qualhamento da Chapa



$$\tau = \frac{F}{2 \cdot 0,8 \cdot a} \leq \tau_{chapa} = \frac{1200}{1,5}$$

⚡
dois cortes

$$\frac{800}{1,6a} \leq 800$$

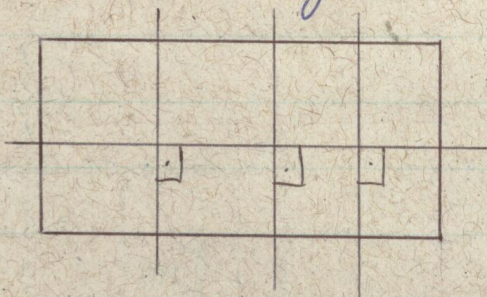
$$a \geq 0,63 \text{ cm}$$

6,5) Resultados Finais

- $d \geq 1,3 \text{ cm}$.
- $l \geq 1,8 \text{ cm}$.
- $a \geq 0,63 \text{ cm}$.

7) Hipótese de Navier

Considere a seguinte ilustração:



As seções planas permanecem planas após a deformação.

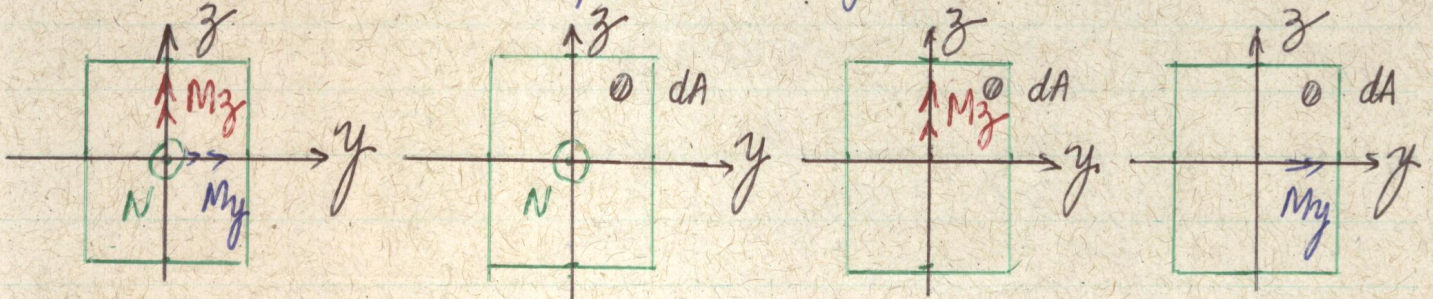


As seções permanecem perpendiculares ao eixo deformado da barra.

8) Expressão das Tensões Normais

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

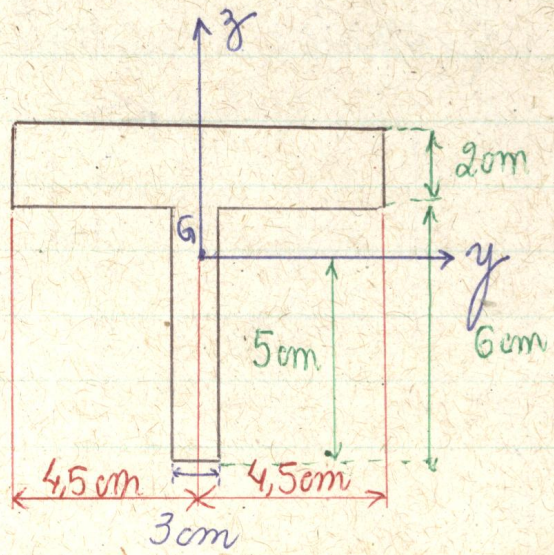
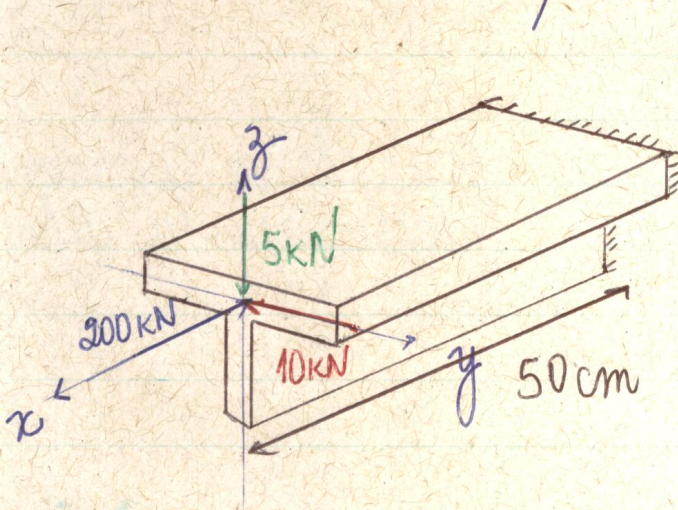
Considere o esquema a seguir:



$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

9) Exemplo

Determinar a expressão das tensões normais na seção mais solicitada do corpo abaixo:



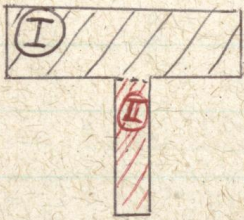
9.1) Características da seção transversal.

$$A = 6.3 + 2.9$$

$$A = 36 \text{ cm}^2$$

• Momentos de inércia.

a) I_y



$$I_y = \frac{9 \cdot 2^3}{12} + 9 \cdot 2 \cdot (3-1)^2 + \frac{3 \cdot 6^3}{12} + 6 \cdot 3 \cdot (5-3)^2$$

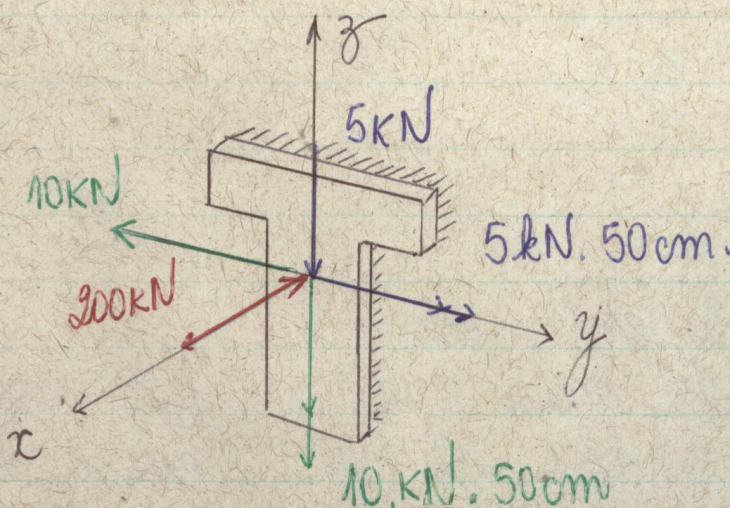
$$I_y = 204 \text{ cm}^4$$

b) I_z

$$I_z = \frac{2 \cdot 9^3}{12 \cdot 6} + \frac{6 \cdot 3^3}{12 \cdot 2} = 135 \text{ cm}^4$$

9.2) Esforços Solicitantes na seção mais solicitada (apóio)

Aplicando o Teorema do Corte:



$$\begin{aligned} N &= -200 \text{ kN} \\ M_y &= +250 \text{ kN} \cdot \text{cm} \\ M_z &= -500 \text{ kN} \cdot \text{cm} \\ |V_y| &= 10 \text{ kN} \\ |V_z| &= 5 \text{ kN} \\ T &= 0 \\ M &= (P \cdot 0) \wedge \vec{R} \end{aligned}$$

9,3) Expressão da Tensão Normal

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

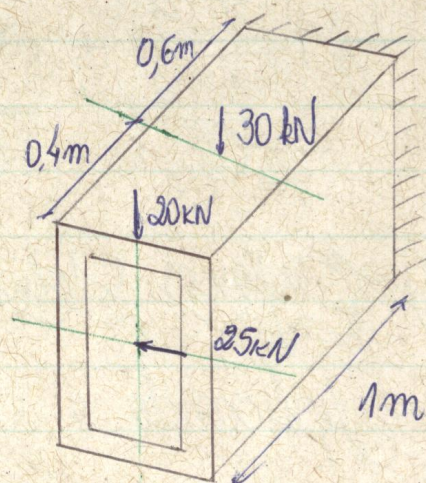
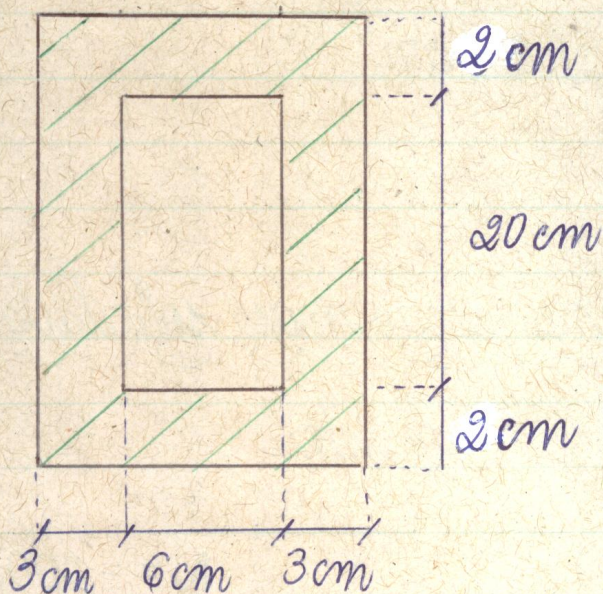
$$\sigma = -\frac{200}{36} + \frac{500}{135} y + \frac{250}{204} z$$

$$\sigma = -5,56 + 3,70 y + 1,23 z \quad \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

São Paulo, 13 de junho de 2008.

Exercícios - Lista P2-B

5)



Determinar:

- Os esforços solicitantes extremos
- A posição da linha neutra na seção mais solicitada
- As tensões normais extremas (σ_{\max} e σ_{\min}).

1) Características geométricas da seção transversal

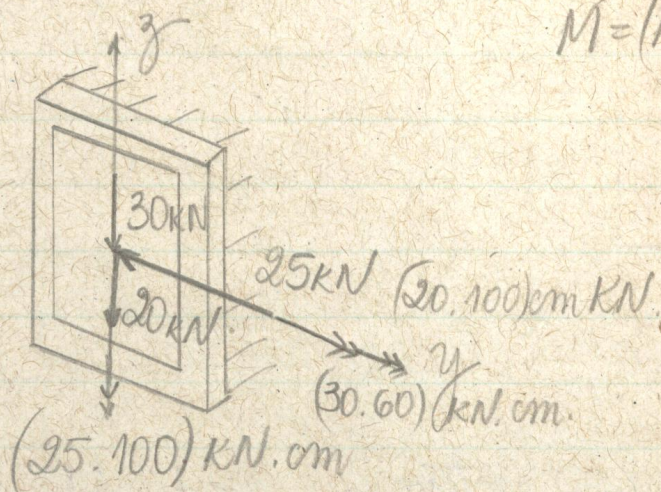
$$a) A = 24 \cdot 12 - 20 \cdot 6 = 288 - 120 = 168 \text{ cm}^2$$

$$b) I_y = \frac{12 \cdot 24^3}{12} - \frac{6 \cdot 20^3}{12} = 9824 \text{ cm}^4$$

$$c) I_z = \frac{24 \cdot 12^3}{12} - \frac{20 \cdot 6^3}{12} = 3096 \text{ cm}^4 \text{ (menor tendência de giro)}$$

2) No Engastamento - Esforços Solicitantes

$$\vec{M} = (P \cdot O) \wedge \vec{R}$$



$$a) N = 0$$

$$|V_y| = 25 \text{ kN}$$

$$|V_z| = 50 \text{ kN}$$

$$M_y = 3800 \text{ kN.cm}$$

$$M_z = -2500 \text{ kN.cm}$$

$$T = 0$$

3) Equação da Tensão Normal no Engastamento

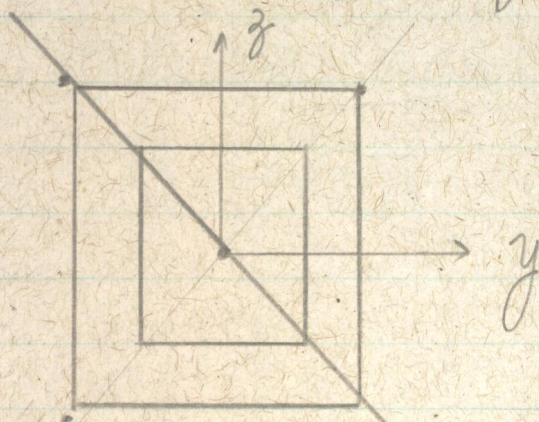
$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

$$\sigma = \frac{2500}{3096} y + \frac{3800}{9824} z$$

$$\sigma = 0,807 y + 0,387 z$$

b) Linha Neutra $\sigma = 0$

$$0,807 y = -0,387 z$$
$$z = -2,085 y //$$

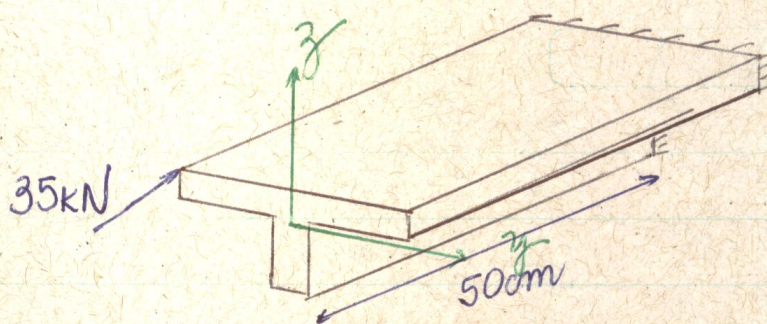
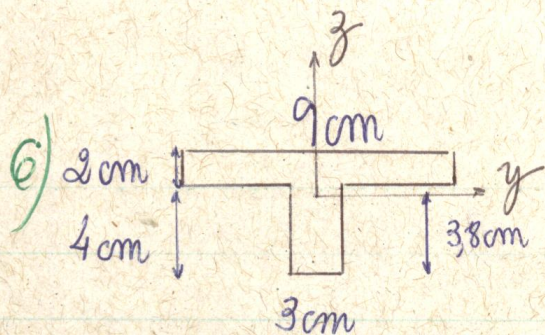


tensões máximas linha neutra

e) Linha de tensões extremas: $z = +2,085 y$
Pontos mais afastados da LN.

$$\sigma_{\text{máx}}(6, 12) = 0,807 \cdot 6 + 0,387 \cdot 12$$
$$\sigma_{\text{máx}} = 9,486 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{mín}} = \sigma(-6, -12) = -\sigma_{\text{máx}} = -9,486 \text{ kN/cm}^2$$



a) 1) Características geométricas da seção transversal.

$$a) A = 2 \cdot 9 + 4 \cdot 3$$

$$A = 30 \text{ cm}^2$$

$$b) I_y = \frac{9 \cdot 2^3}{12} + 18 \cdot (1,2)^2 + \frac{3 \cdot 4^3}{12} + 12 \cdot (1,8)^2$$

$$I_y = 31,92 + 16 + 38,88$$

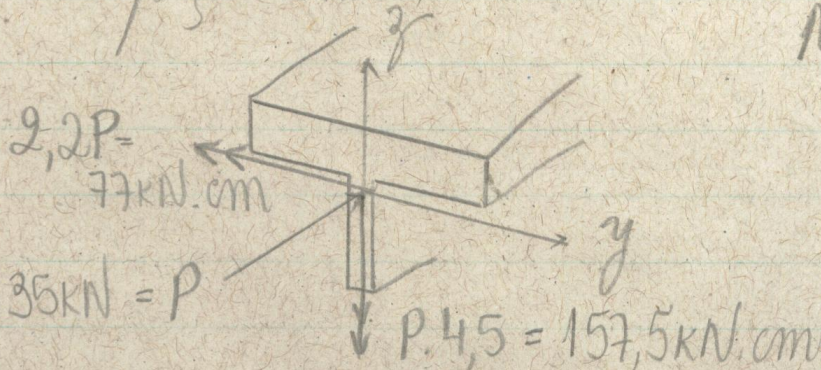
$$I_y = 86,80 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{2 \cdot 9^3}{12} + \frac{4 \cdot 3^3}{12} = 130,5 \text{ cm}^4$$

2) Esforços na posição mais solicitada

a) Na "Extremidade Livre" e nas demais seções (por ser força normal)

$$\vec{M} = (P \cdot 0) \wedge \vec{e}$$



$$N = -35 \text{ kN}$$

$$M_y = -77 \text{ kN.cm}$$

$$T = |V_y| = |V_z| = 0$$

$$M_z = -157,5 \text{ kN.cm}$$

3) Tensão Normal

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

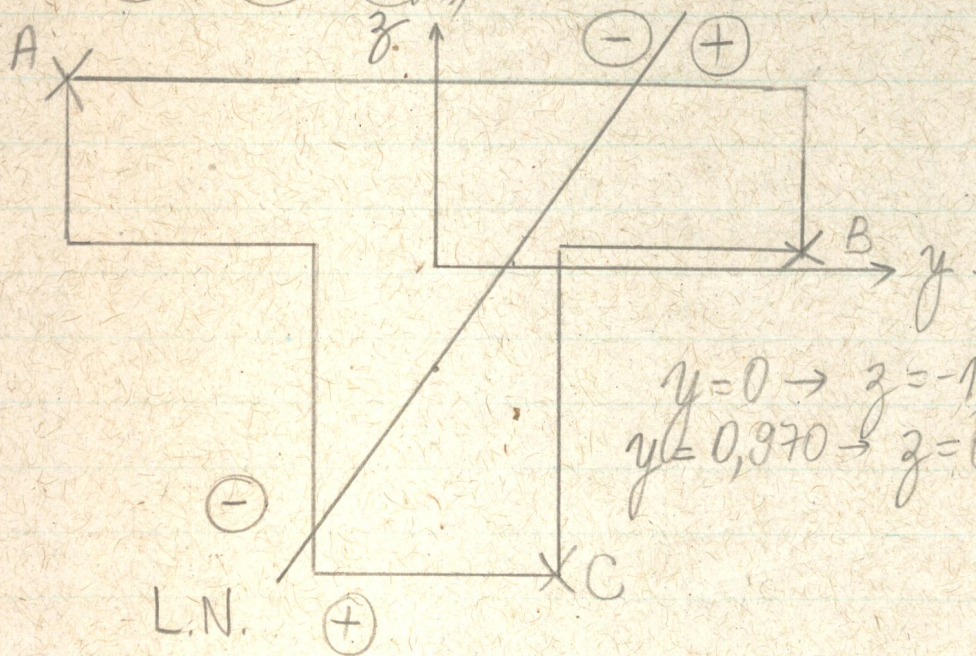
$$\sigma = \frac{-35}{30} + \frac{157,5y}{130,5} - \frac{77z}{86,8}$$

$$\sigma = -1,167 + 1,207y - 0,887z$$

b) Linha Neutra

$$z = \frac{-1,167}{0,887} + \frac{1,207}{0,887} y$$

$$z = -1,316 + 1,361y$$



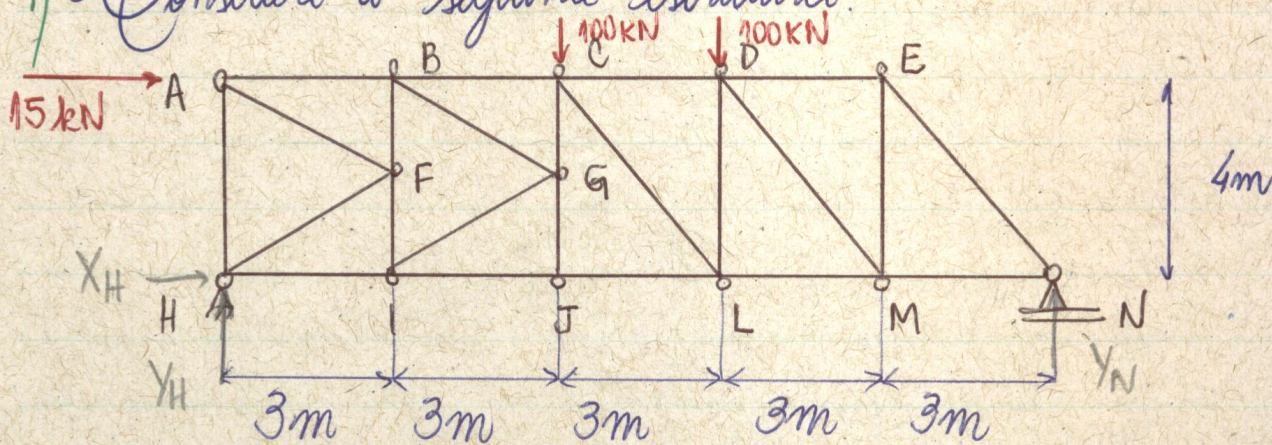
c) Tensões Máximas

$$\begin{aligned} \sigma_A (y = -4,5; z = +2,2) &= -8,57 \text{ kN/cm}^2 \text{ (mínimo)} \\ \sigma_B (y = +4,5; z = +0,2) &= +4,10 \text{ kN/cm}^2 \text{ (máximo)} \\ \sigma_C (y = +1,5; z = -3,8) &= +4,02 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

São Paulo, 27 de junho de 2008.

Exercícios

1) Considere a seguinte estrutura:



Determinar:

- Reações de apoio
- N_{CG} por Ritter
- N_{EM} por equilíbrio de nós

a) Reações nos apoios

$$1) \oplus \sum X = 0 \Rightarrow X_H = -15 \text{ kN}$$

$$\oplus \sum M_{(H)} = 0 \Rightarrow -15 \cdot 4 - 100 \cdot 6 - 100 \cdot 9 + 15 Y_N = 0$$

$$15 Y_N = 1560$$

$$Y_N = 104 \text{ kN}$$

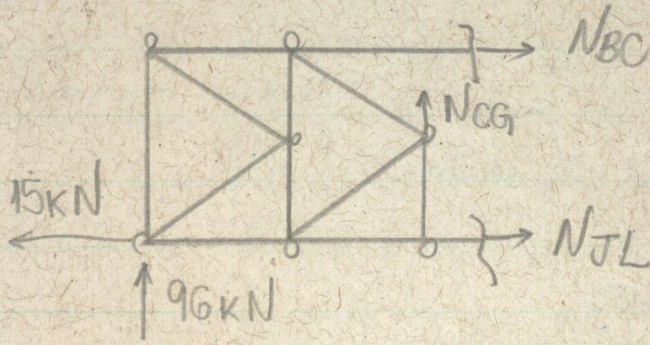
$$\oplus \sum M_{(N)} = 0 \Rightarrow 100 \cdot 6 + 100 \cdot 9 - 15 Y_H - 15 \cdot 4 = 0$$

$$15 Y_H = 1440$$

$$Y_H = 96 \text{ kN}$$

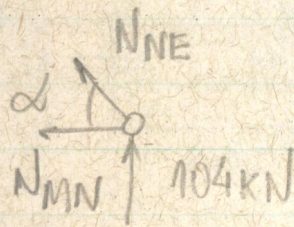
$$\textcircled{4} \sum Y = 0 \rightarrow 96 + 104 = 2(100) \text{ (ok!)}$$

b) Cortando a estrutura:

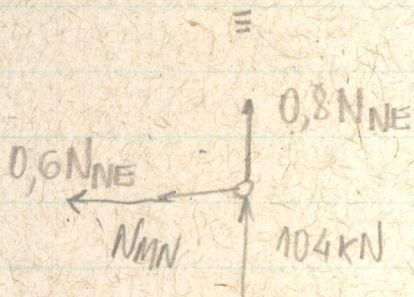


$$\textcircled{+} \sum Y = 0 : \underline{N_{CG} = -96 \text{ kN}}$$

c) Nó N



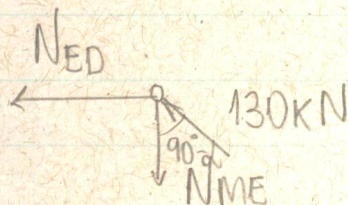
$$\begin{aligned} \cos \alpha &= 0,6 \\ \sin \alpha &= 0,8 \end{aligned}$$

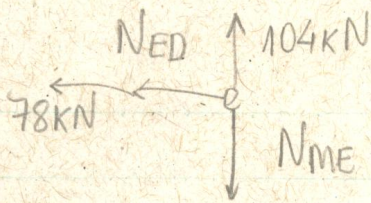


$$\begin{aligned} 0,8 N_{NE} &= -104 \\ \underline{N_{NE} = -130 \text{ kN}} & \text{ (compressão)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,6 (-130) &= - N_{MN} \\ N_{MN} &= 78 \text{ kN (tração)} \end{aligned}$$

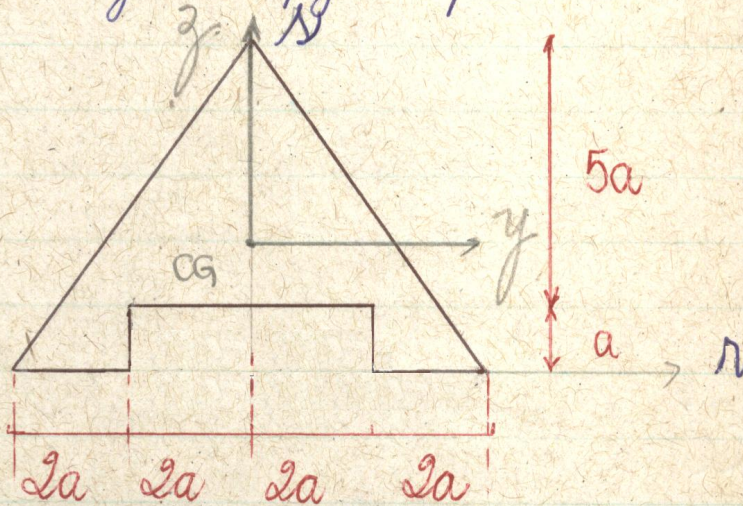
Nó E





$$N_{ME} = 104 \text{ kN (tração)}$$

2) Seja a seguinte figura plana:



Determinar:

- a) A posição do centro de gravidade (CG).
 b) Os momentos de inércia principais.

a) $x_{CG} = 0$ (simetria)

$$y_{CG} = \frac{S_{\Delta} \cdot d_{CG\Delta} - S_{\square} \cdot d_{CG\square}}{S_{\Delta} - S_{\square}}$$

$$y_{CG} = \frac{\frac{8a \cdot 6a}{2} \cdot 2a - 4a \cdot a \cdot \frac{a}{2}}{\frac{8a \cdot 6a}{2} - 4a \cdot a} = \frac{46a^3}{20a^2} = 2,3a$$

b)
$$I_{y_{\Delta}} = \left[\frac{8a \cdot (6a)^3}{36} + \frac{8a \cdot 6a}{2} \cdot (2,3a - 2a)^2 \right] - \left[\frac{4a \cdot a^3}{12} + 4a \cdot a \cdot (1,8a)^2 \right]$$

$$I_y = (48a^4 + 2,16a^4) - (0,33a^4 + 12,96a^4)$$

$$I_y = 36,87a^4$$

$$I_z = \left[2 \cdot \left(\frac{6a \cdot (4a)^3}{36} + \frac{6a \cdot 4a}{2} \cdot \left(\frac{4a}{3} \right)^2 \right) \right] - \frac{a \cdot (4a)^3}{12}$$

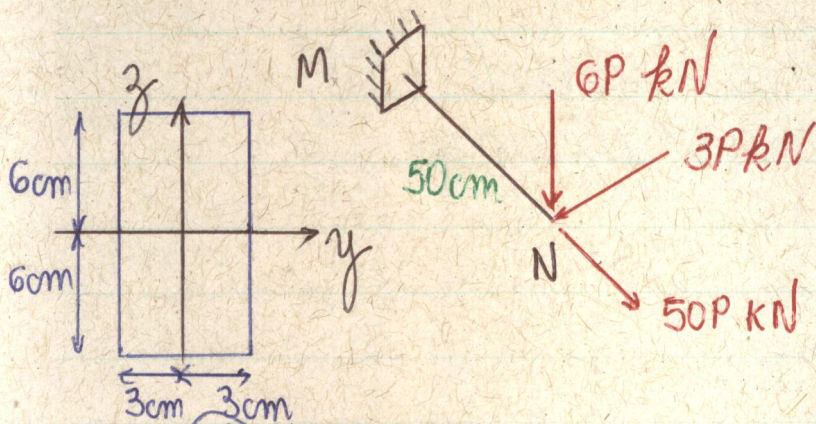
meio-triângulo retângulo retângulo

$$I_z = \left[2 \cdot \left(10,667a^4 + 12a^2 \cdot \frac{16a^2}{9} \right) \right] - \frac{16a^4}{3}$$

$$I_z = (64 - 5,333)a^4$$

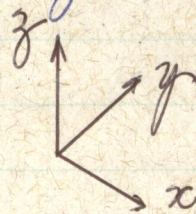
$$I_z \approx 58,67a^4 \quad (\text{maior estabilidade})$$

3) Considere a seguinte estrutura:



Dados:

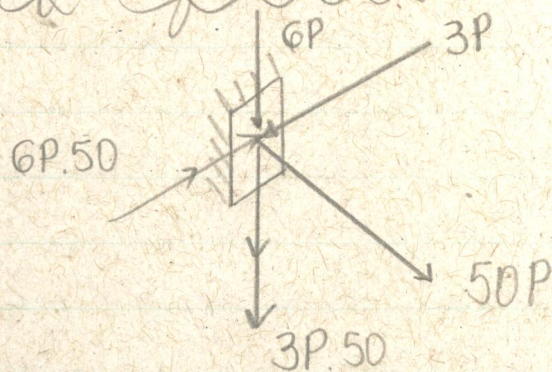
- área da seção transversal: $(A) \text{ cm}^2$
- $I_y = 12A \text{ cm}^4$
- $I_z = 3A \text{ cm}^4$



Determinar:

- a) Esforços solicitantes no engastamento.
- b) Tensões normais no engastamento.
- c) Equação da linha neutra.
- d) Tensões máximas

a) No engastamento



$$M = (P-0) \wedge R$$

$$N = 50P$$

$$|V_{ny}| = 3P$$

$$|V_{nz}| = 6P$$

$$M_{ny} = +300P$$

$$M_{nz} = -150P$$

$$T = 0$$

b) Equação da Tensão Normal

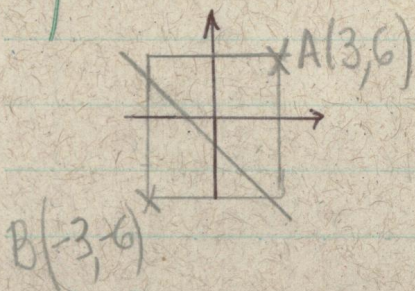
$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$

$$\sigma = \frac{+50P}{A} + \frac{150Py}{3A} + \frac{300Pz}{12A}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} (50 + 50y + 25z) \text{ kg/cm}^2$$

c) $\sigma = 0 \Rightarrow 2y + z = -2$
 $z = -2y - 2$

d) Tensões



$$\sigma_A = \frac{350P}{A}, \quad \sigma_B = -\frac{250P}{A}$$