

Cópuas Arquimedianas

Davi - 14168042 - davi.chaves@ime.usp.br
Douglas - 13192420 - ds.antonioli@gmail.com
Felipe - 14153376 - felipe3@ime.usp.br
Júlia - 14477673 - jherzc2212@gmail.com

16 de fevereiro de 2023

- 1 Introdução
- 2 Propriedades
- 3 Ordenação e casos limitantes
- 4 Famílias de cópulas de dois parâmetros
- 5 Principais famílias (Gumbel, Clayton e Frank)
- 6 Aplicação
- 7 Bibliografia

Definição

Uma cópula bivariada é uma função $C : [0, 1]^2 \mapsto [0, 1]$ com as seguintes propriedades:

- 1 $C(u, v)$ é crescente em cada componente;
- 2 $C(u, 0) = 0 = C(0, v)$, para todo $u, v \in [0, 1]$;
- 3 $C(u, 1) = u$ e $C(1, v) = v$, para todo $u, v \in [0, 1]$;
- 4 para todo $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$, tal que $u_1 \leq u_2$ e $v_1 \leq v_2$, temos que $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$.

Teorema (Teorema de Sklar)

Seja H uma função de distribuição conjunta com distribuições marginais $F(x)$ e $G(y)$. Então, existe uma cópula C tal que, para todo $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (1)$$

Se F e G forem contínuas, então C é única; caso contrário, C é unicamente determinada em $\text{Im}(F) \times \text{Im}(G)$.

Uma importante classe de cópuas é a Arquimediana. Este tipo de cópula é altamente utilizada por vários motivos, dentre eles:

- ① são fáceis de construir;
- ② há uma grande variedade de cópuas que pertencem a esta classe;
- ③ apresentam muitas propriedades interessantes.

Uma cópula bivariada é chamada de Arquimediana se ela puder ser escrita da seguinte maneira

$$C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v)) , \quad (2)$$

em que $\phi : [0, 1] \mapsto [0, \infty] \in \Omega$, o conjunto de funções **contínuas, estritamente decrescentes** e **convexas** e $\phi^{[-1]}$ é a inversa generalizada de ϕ .

A função ϕ é chamada de **função geradora** da cópula $C(u, v)$. Se $\phi(0) = \infty$, dizemos que ϕ é uma função gerador estrita e, neste caso, a função inversa generalizada por ser substituída pela inversa, ou seja, $\phi^{[-1]} = \phi^{-1}$.

Analogamente, uma cópula multivariada $n \geq 3$ é chamada de Arquimediana se ela puder ser escrita da seguinte maneira

$$C(\mathbf{u}) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2) + \cdots + \phi(u_n)) , \quad (3)$$

em que $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\phi : [0, 1] \mapsto [0, \infty]$ é uma função contínua, estritamente decrescente tal que $\phi(1) = 0$, convexa e $\phi^{[-1]}$ é **completamente monotônica**, ou seja, é contínua e possui derivadas de todas as ordens cujos sinais alternam

Exemplo: cópula W^n

A extensão da cópula bivariada correspondente ao limite inferior de Fréchet-Hoeffding é

$$W^n(\mathbf{u}) = \max(u_1 + u_2 + \cdots + u_n - n + 1, 0) . \quad (4)$$

A função geradora é $\phi(t) = 1 - t$, que é contínua, estritamente decrescente e convexa. Porém, não é completamente monotônia. Logo, W^n não é uma cópula caso $n > 2$.

Teorema

Seja C uma cópula Arquimediana com função geradora ϕ . Então

- ① C é simétrica, ou seja, $C(u, v) = C(v, u)$ para todo $u, v \in [0, 1]$;*
- ② C é associativa, ou seja, $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$ para todo u, v e $w \in [0, 1]$;*
- ③ seja $c > 0$ uma constante qualquer, $c\phi$ também é uma função geradora de C .*

Pode-se mostrar que a seção diagonal δ_C de uma cópula Arquimediana satisfaz $\delta_C(u) < u$ para todo $u \in (0, 1)$.

O teorema a seguir mostra que essa propriedade em conjunto com a associatividade caracterizam uma cópula Arquimediana.

Teorema

Seja C uma cópula associativa tal que $\delta_C(u) < u$ para todo $u \in (0, 1)$. Então, C é Arquimediana.

Algumas famílias de cópulas Arquimedianas muito utilizadas são as de:

- Clayton;
- Gumbel-Hougaard;
- Frank;
- Ali-Mikhail-Haq.

O termo "Arquimediana"

Lembremos que o axioma Arquimediano para dois reais positivos diz que, se a e b são números reais positivos, então, existe um inteiro n tal que $na > b$.

As cópulas Arquimedianas apresentam uma propriedade semelhante. Para enunciá-la, precisamos da definição de cópula-potência.

Definição

Para todo $u \in [0, 1]$, a cópula-potência, u_C^n , é definida recursivamente como:

$$u_C^1 = u \quad \text{e} \quad u_C^{n+1} = C(u, u_C^n) . \quad (5)$$

O termo "Arquimediana"

Teorema

Seja C uma cópula Arquimediana com função geradora ϕ convexa e estritamente decrescente. Então, para todo $u, v \in [0, 1]$, existe um inteiro positivo n tal que $u_C^n < v$.

Logo, as cópulas Arquimedianas satisfazem a versão do axioma Arquimediano para (I, C) . Portanto, este termo foi utilizado para representá-las.

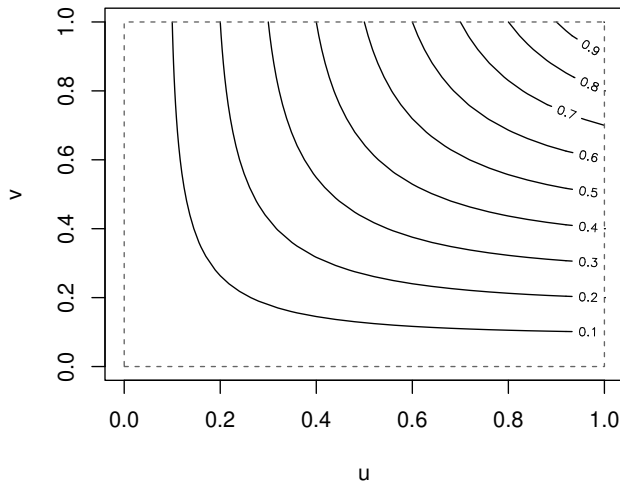
Os conjuntos de nível de uma cópula C são dados por $\{(u, v) \in [0, 1]^2 \mid C(u, v) = t\}$.

No caso de uma cópula Arquimediana e para $t > 0$, o conjunto é composto pelos pontos na curva de nível $\phi(u) + \phi(v) = \phi(t)$ que conectam os pontos $(1, t)$ e $(t, 1)$. Além disso, o seguinte teorema é válido.

Teorema

As curvas de nível de uma cópula Arquimediana são convexas.

Curvas de nível – Cópula de Frank com $\alpha = 3$



Distribuição de $C(U, V)$

Abaixo, destacamos dois resultados quais nos permitirão mais adiante efetuar o cálculo de $\mathbb{E}[C(U, V)]$.

Teorema

Seja C uma cópula Arquimediana gerada por $\phi \in \Omega$, temos que K_C denota a C -medida do conjunto $\{(u, v) \in [0, 1]^2 \mid C(u, v) \leq t\}$ ou do conjunto $\{(u, v) \in [0, 1]^2 \mid \phi(u) + \phi(v) \geq \phi(t)\}$, logo $\forall t \in [0, 1]$

$$K_C(t) = t - \frac{\phi(t)}{\phi'(t^+)}$$

Corolário

Sejam U e V variáveis aleatórias uniformemente distribuídas tal que a distribuição conjunta destas é a cópula Arquimediana C gerada por $\phi \in \Omega$, temos que K_C é então a função de probabilidade acumulada da variável aleatória $T = C(U, V)$.

Definição

Sejam C_1 e C_2 cópulas distintas, podemos dizer que C_1 é menor que C_2 , e assim escrever $C_1 \prec C_2$, se $C_1(u, v) \leq C_2(u, v) \forall u, v \in I = [0, 1]$.

Definição

Uma família de cópulas $\{C_\theta\}$ parametrizada por $\theta \in \Theta$ é dita ser 'ordenada positivamente' se, $\theta_1 \leq \theta_2 \Rightarrow C_{\theta_1} \prec C_{\theta_2}$.

Nota-se que a ordenação de $\{C_\theta\}$ é suscetível a reparametrizações, isto é, se $\{C_\theta\}$ é ordenada positivamente com $\theta \in (0, \infty)$, logo a família $\{C_\alpha\}$, onde $\alpha = 1/\theta$, é ordenada negativamente.

Exemplo

A família de Ali-Mikhail-Haq é uma família positivamente ordenada de cópulas arquimedianas, com $\theta \in [-1, 1)$.

$$C_{\theta}(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)}$$

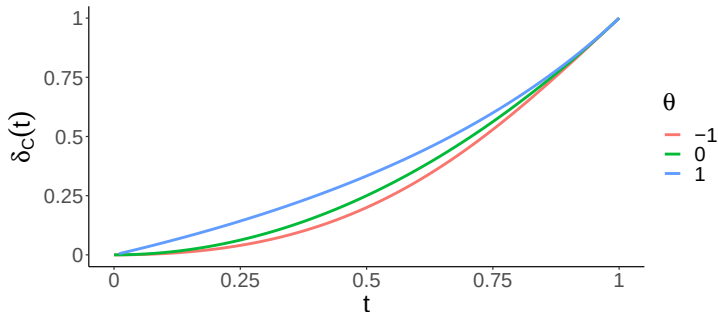


Figura: Seção diagonal da cópula de Ali-Mikhail-Haq.

Demonstrar de forma explícita que $C_1 \prec C_2$ pode ser impraticável em alguns contextos, porém existem outras abordagens para isto demonstrar, pautadas no conceito de subaditividade

Definição

Uma função $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ é dita ser **subaditiva** se, $\forall x, y \in [0, 1]$, é verdadeiro que

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

Disto, é possível apresentar o seguinte Teorema

Teorema

Sejam C_1 e C_2 cópulas Arquimedianas com funções geradoras $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$, respectivamente. Desta forma $C_1 \prec C_2$ se, e somente se, a composição $\phi_1 \circ \phi_2^{[-1]}$ for subaditiva.

Embora isto possa parecer tão difícil quanto demonstrar diretamente que $C_1 \prec C_2$, as funções geradoras de cópulas Arquimedianas dispõe de um conjunto de propriedades qual facilita demonstrar que $\phi_1 \circ \phi_2^{[-1]}$. Apresentamos aqui três abordagens.

Corolários de Ordenação

Corolário

Se a composição $\phi_1 \circ \phi_2^{[-1]}$ for côncava, logo $C_1 \prec C_2$.

Corolário

Se a razão $\frac{\phi_1}{\phi_2}$ for não decrescente em $(0, 1)$, logo $C_1 \prec C_2$.

Corolário

Se ϕ_1 e ϕ_2 forem diferenciáveis em $(0, 1)$, e a razão $\frac{\phi_1'}{\phi_2'}$ for não decrescente em $(0, 1)$, logo $C_1 \prec C_2$.

Todos estes resultados são relacionados ao Teorema anterior, e consistem em demonstrar a subaditividade da composição.

Exemplo

Tratamos da seguinte família de cópulas indexada por $\theta \in [2, \infty)$

$$C_{\theta}(u, v) = \max \left\{ 1 + \frac{\theta}{\log(\exp\{\theta/(u-1)\} + \exp\{\theta/(v-1)\})}, 0 \right\}.$$

Sua função geradora é dada por $\phi(t) = \exp\{\theta/(t-1)\}$. Para demonstrar que $C_{\theta}(u, v)$ é positivamente ordenada, basta fazer o seguinte, definido $\theta_1 < \theta_2$

$$\begin{aligned} \frac{\phi_1}{\phi_2} &= \exp\{(\theta_1 - \theta_2)/(t-1)\} \\ &= \exp\{d/(t-1)\} \end{aligned}$$

Uma vez que $d < 0$, e sabemos por suposto que $\exp\{d/(t-1)\}$ é não decrescente em $(0, 1)$, concluímos aqui que esta família é positivamente ordenada por θ .

Passamos então aos limites de cópulas Arquimedianas

Teorema

Seja $\{C_\theta | \theta \in \Theta\}$ uma família de cópulas com função geradora diferenciável ϕ_θ , logo $C = \lim C_\theta$ é uma cópula Arquimediana se, e somente se, existe uma função estritamente convexa e diferenciável $\phi : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ tal que para todo $s \in [0, 1]$, com $t \in (0, 1)$

$$\lim_{\theta} \frac{\phi_\theta(s)}{\phi'_\theta(t)} = \frac{\phi(s)}{\phi'(t)}$$

Onde $\lim_{\theta}$ indica o limite unilateral aplicado sob θ em um dos bordos de Θ . Por exemplo se $\Theta = [0, 1)$, os limites poderiam ser aplicados em 0 ou 1.

Retomamos a família Ali-Mikhail-Haq de cópulas arquimedianas positivamente ordenadas, com seguinte fórmula

$$C_{\theta}(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)}.$$

Esta cópula apresenta os seguintes casos limites

$$\lim_{\theta \rightarrow -1} C_{\theta}(u, v) = \frac{uv}{2 - u - v + uv} \quad \text{e} \quad \lim_{\theta \rightarrow 1} C_{\theta}(u, v) = \frac{uv}{u + v - uv}.$$

Uma vez que esta família é positivamente ordenada, sabemos então que

$$\frac{uv}{2 - u - v + uv} \leq C_{\theta}(u, v) \leq \frac{uv}{u + v - uv}.$$

O emprego do resultado anterior é limitado os casos limites em quais as cópulas resultantes eram Arquimedianas. Este resultado pode então ser estendido para incluir a cópula comonotônica M , como segue

Teorema

Seja $\{C_\theta | \theta \in \Theta\}$ uma família de cópulas com função geradora diferenciável ϕ_θ , logo $\lim C_\theta = M$ se, e somente se, dado $t \in (0, 1)$

$$\lim_{\theta} \frac{\phi_\theta(t)}{\phi'_\theta(t)} = 0$$

Onde $\lim$ indica o limite unilateral aplicado sob θ em um dos bordos de Θ .

Exemplo

A família de Clayton é uma família arquimediana positivamente ordenada, com $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$, com a seguinte fórmula

$$C_{\theta}(u, v) = \left[\max \left\{ u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0 \right\} \right]^{-1/\theta}.$$

Sua função geradora, e respectiva derivada, são dadas a seguir

$$\phi_{\theta}(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1) \quad \text{e} \quad \phi'_{\theta}(t) = -t^{-\theta-1}.$$

Temos que a razão dos dois termos é dado como segue

$$\frac{\phi_{\theta}(t)}{\phi'_{\theta}(t)} = \frac{1}{\theta}(t^{\theta+1} - t)$$

Calculamos então a distribuição limitante para $\theta \in \{-1, 0, \infty\}$:

$$\lim_{\theta \rightarrow -1} \frac{\phi_{\theta}(t)}{\phi_{\theta}(t)'} = \lim_{\theta \rightarrow -1} \frac{1}{\theta} (t^{\theta+1} - t) = t - 1$$

Por suposto, sabemos que a cópula contramonotônica W possui função geradora $\phi_W(t) = 1 - t$, com derivada $\phi'_W(t) = -1$, logo, ao aproximar-se do limite em $\theta \rightarrow -1$, temos que a cópula de Clayton se aproxima à cópula contramonotônica

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\phi_{\theta}(t)}{\phi_{\theta}(t)'} = \lim_{\theta \rightarrow -1} \frac{1}{\theta} (t^{\theta+1} - t) = t - 1$$

Exemplo

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\phi_{\theta}(t)}{\phi_{\theta}(t)'} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} (t^{\theta+1} - t) = t \log(t)$$

Por suposto, sabemos que a cópula produto Π possui função geradora $\phi(t) = -\log(t)$, com derivada $\phi'(t) = -1/t$, logo, ao aproximar-se do limite em $\theta \rightarrow 0$, temos que a cópula de Clayton se aproxima à cópula produto. Notamos que em ambos casos, a cópula limitante é arquimediana. Por fim, temos

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\phi_{\theta}(t)}{\phi_{\theta}(t)'} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} (t^{\theta+1} - t) = 0$$

Isto é, quando $\theta \rightarrow \infty$, pelo resultado visto anteriormente, temos que a cópula de Clayton se aproxima da cópula comonotônica M , que não é arquimediana.

Famílias de cópulas de composição de potências

Tratamos aqui de uma abordagem para construção de novas famílias paramétricas de cópulas via a composição de funções geradoras por potências.

Teorema

Seja ϕ uma função candidata como geradora de cópulas arquimedianas, dados dois números reais α e β , definimos

$$\phi_{\alpha,1}(t) = \phi(t^\alpha) \text{ e } \phi_{1,\beta}(t) = [\phi(t)]^\beta.$$

- *Se $\beta \geq 1$, logo $\phi_{1,\beta} \in \Omega$.*
- *Se $\alpha \in (0, \alpha)$, logo $\phi_{\alpha,1} \in \Omega$.*
- *Se ϕ é duplamente diferenciável e $t \cdot \phi$ é não decrescente em $(0, 1)$ logo $\phi_{\alpha,1} \in \Omega$ para todo $\alpha > 0$.*

Famílias de cópulas de composição de potências

Denominaremos a família de cópulas gerada por $\phi_{\alpha,1}$ como 'família de potências **interiores**' associadas a ϕ , enquanto a família de cópulas gerada por $\phi_{1,\beta}$ será denominada 'família de potências **exteriores** associadas a ϕ '. Podemos então demonstrar casos limitantes de tais cópulas

Teorema

Seja $\phi \in \Omega$ com família de potência interior e exterior dadas por $\phi_{\alpha,1}$ e $\phi_{1,\beta}$ respectivamente, quais geram as respectivas cópulas Arquimedianas $C_{\alpha,1}$ e $C_{1,\beta}$, temos que

- *Se ϕ é diferenciável e $\phi'(t) \neq 0$, logo*

$$C_{0,1}(u, v) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} C_{\alpha,1}(u, v) = \Pi(u, v).$$



$$C_{1,\infty}(u, v) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} C_{1,\beta}(u, v) = M(u, v)$$

Famílias de cópulas de composição de potências

Temos dois resultados relevantes com respeito às cópulas de dois parâmetros

Teorema

Seja $\phi \in \Omega$ com família de potência interior e exterior dadas por $\phi_{\alpha,1}$ e $\phi_{1,\beta}$ respectivamente, quais geram as respectivas cópulas Arquimedianas $C_{\alpha,1}$ e $C_{1,\beta}$, temos que

- *Se $1 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \Rightarrow C_{1,\beta_1} \prec C_{1,\beta_2}$.*
- *Se $\phi \left([\phi^{[-1]}(t)]^\theta \right)$ for subaditivo $\forall \theta \in (0, 1)$, logo $\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow C_{\alpha_1,1} \prec C_{\alpha_2,1}$*

Teorema

Cópulas de Gumbel-Hougaard são as únicas cópulas Arquimedianas de valores extremos. Estas cópulas tem função geradora $\phi_\theta(t) = [-\log(t)]^\theta$, com $\theta \in [1, \infty)$.

Famílias de cópulas racionais

Como segunda alternativa às cópulas construídas via composição de potências, propomos as cópulas racionais, definidas como segue

Teorema

Seja uma função $C_{\alpha,\beta}$ definida em $[0, 1]^2$ por

$$C_{\alpha,\beta}(u,v) = \max \left\{ \frac{uv - \beta(1-u)(1-v)}{1 - \alpha(1-u)(1-v)}, 0 \right\},$$

é uma cópula racional Arquimediana se, e somente se, $0 \leq \beta \leq 1 - |\alpha|$.

Adicionalmente, temos o seguinte corolário

Corolário

Uma cópula arquimediana racional é estrita, se e somente se pertence à família de Ali-Mikhail-Haq, o que ocorre quando $\beta = 0$.

Famílias de cópulas racionais

Notamos que, entre outros casos limitantes, $C_{0,0} = \Pi$ e $C_{0,1} = W$.

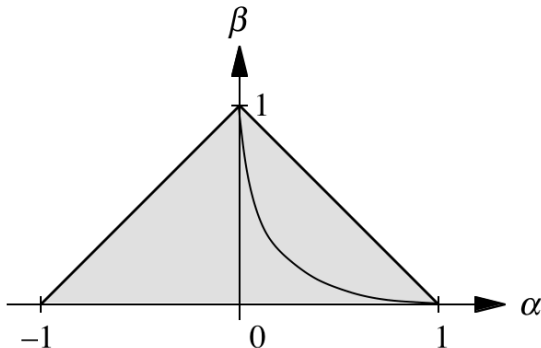


Figura: Espaço paramétrico de β e α para uma cópula Arquimediana racional.

Função geradora:

$$\phi_{\theta}(t) = [-\log t]^{\theta}.$$

Dada pela expressão:

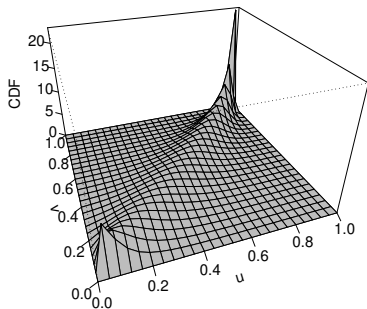
$$C_{\theta}(u, v) = \exp \left\{ -[(-\log u)^{\theta} + (-\log v)^{\theta}]^{1/\theta} \right\}.$$

Onde $\theta \in [1, \infty)$. É estrita.

Aplicação: A copula arquimediana de Gumbel é usada para modelar relações de dependência negativas mais fortes. Ela é adequada para modelar relações lineares, onde uma variação na primeira variável gera uma variação proporcionalmente menor na segunda variável.

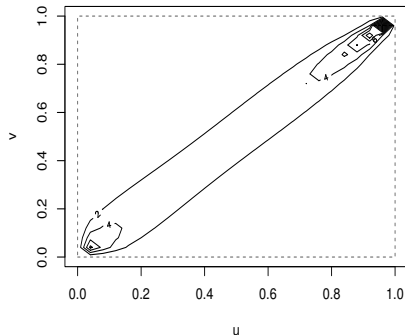
Cópula de Gumbel ($\alpha = 4$) - Função densidade

Cópula de Gumbel ($\alpha = 4$) - Densidade



(a) Função densidade

Cópula de Gumbel ($\alpha = 4$) - Densidade



(b) Curvas de nível

Figura: Cópula de Gumbel ($\alpha = 4$) - Função densidade

Temos aqui que, seja $C(u, v)$ uma cópula de Gumbel e dadas U, V variáveis aleatórias distribuídas uniformemente, logo

$$\mathbb{E}[C(U, V)] = \frac{2\theta - 1}{4\theta}.$$

Logo, o Tau de Kendall associado a esta cópula é dado por

$$\tau(X, Y) = \frac{\theta - 1}{\theta}.$$

Observa-se que, quando $\theta = 1 \Rightarrow \tau(X, Y) = 0$ e quando $\theta \rightarrow \infty \Rightarrow \tau(X, Y) = 1$.

Cópula de Clayton

Função geradora:

$$\phi_{\theta}(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1).$$

Dada pela expressão:

$$C_{\theta}(u, v) = [\max\{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0\}]^{-1/\theta}.$$

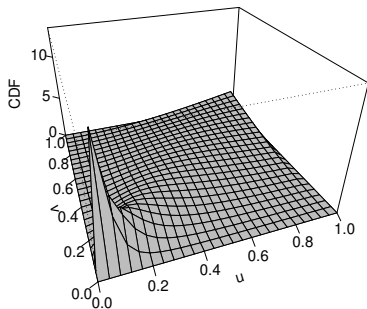
Onde $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$. É estrita em $\theta \geq 0$.

Nota-se que apesar de ser estrita somente quando $\theta \geq 0$ podemos notar que $\phi'_{\theta}(0^+) = -\infty$ e que $\phi''_{\theta}(t) > \theta$ para qualquer outro θ pertencente ao intervalo, mostrando que qualquer membro das cópulas de Clayton é absolutamente contínuo.

Aplicação: A cópula Arquimediana de Clayton é usada para modelar relações de dependência positivas mais fortes. Ela é adequada para modelar relações não lineares, onde uma variação na primeira variável gera uma variação proporcionalmente maior na segunda variável.

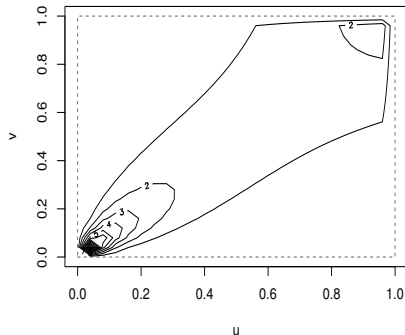
Cópula de Clayton ($\alpha = 2$) - Função densidade

Cópula de Clayton ($\alpha = 2$) – Densidade



(a) Função densidade

Cópula de Clayton ($\alpha = 2$) – Densidade



(b) Curvas de nível

Figura: Cópula de Clayton ($\alpha = 2$) - Função densidade

Temos aqui que, seja $C(u, v)$ uma cópula de Clayton e dadas U, V variáveis aleatórias distribuídas uniformemente, logo

$$\mathbb{E}[C(U, V)] = \frac{\theta + 1}{2(\theta + 2)}.$$

Logo, o Tau de Kendall associado a esta cópula é dado por

$$\tau(X, Y) = \frac{\theta}{\theta + 2}.$$

Observa-se que, quando $\theta = -1 \Rightarrow \tau(X, Y) = -1$, quando $\theta = 0 \Rightarrow \tau(X, Y) = 0$ e quando $\theta \rightarrow \infty \Rightarrow \tau(X, Y) = 1$.

Cópula de Frank

Função geradora:

$$\phi_{\theta}(t) = -\log \left(\frac{\exp\{-\theta t\} - 1}{\exp\{-\theta\} - 1} \right).$$

Dada pela expressão:

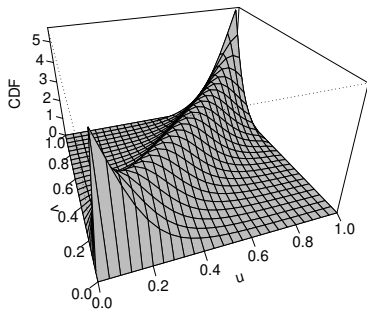
$$C_{\theta}(u, v) = -\frac{1}{\theta} \log \left(1 + \frac{(\exp\{-\theta u\} - 1)(\exp\{-\theta v\} - 1)}{\exp\{-\theta\} - 1} \right).$$

Onde $\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$. É estrita.

Aplicação: A cópula Arquimediana de Frank é usada para modelar relações de dependência positivas e negativas mais fracas. Ela é adequada para modelar relações de dependência não lineares, mas não tão fortes quanto as relações modeladas pela cópula de Clayton ou pela cópula de Gumbel.

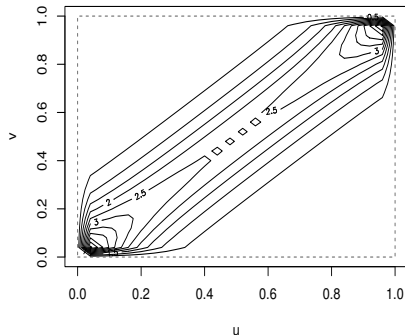
Cópula de Frank ($\alpha = 10$) - Função densidade

Cópula de Frank ($\alpha = 10$) – Densidade



(a) Função densidade

Cópula de Frank ($\alpha = 10$) – Densidade



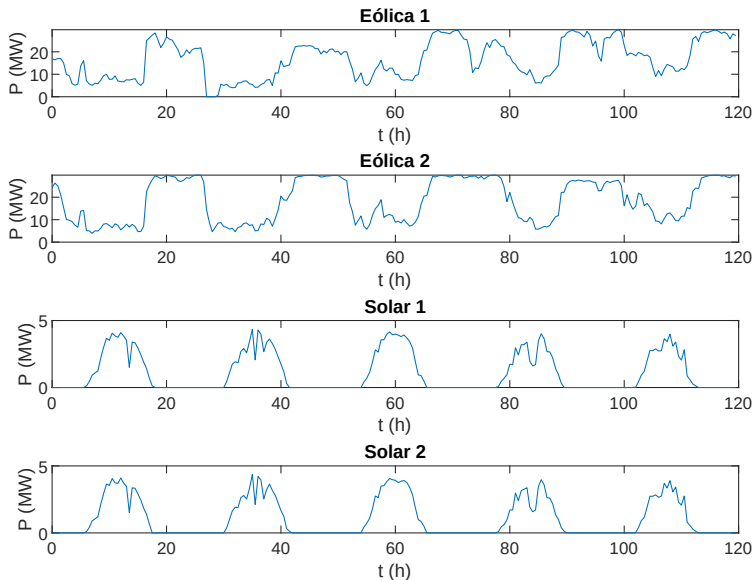
(b) Curvas de nível

Figura: Cópula de Frank ($\alpha = 10$) - Função densidade

A Usina selecionada para o estudo é o Parque híbrido Tacaratu, localizado em Pernambuco, que consiste em:

- Pau Ferro → Eólica 1
- Pedra do Gerônimo → Eólica 2
- Fontes Solar I → Solar 1
- Fontes Solar II → Solar 2

Séries Temporais de Geração Eólica e Solar



Consiste em avaliar a disponibilidade de energia (geração) para atendimento à carga (consumidores) por meio dos seguintes índices:

- LOLP (Loss of Load Probability) - Probabilidade de perda de carga

$$LOLP = \sum_{i \in S} p_i$$

onde p_i é a probabilidade do estado i do sistema e S é o conjunto de todos os estados do sistema associados com corte de carga.

- LOLE (Loss of Load Expectation) - Número esperado de horas de déficit de potência

$$LOLE = \sum_{i \in S} p_i T = T \sum_{i \in S} p_i$$

A LOLE é o número de horas médio em um dado período T (normalmente um ano) no qual espera-se que o pico de carga horário excede a capacidade de geração disponível. Se o período T considerado for um ano ($T=8760$ horas), a LOLE é dada em [horas/ano] e corresponde a:

$$LOLE = 8760 \times LOLP$$

- EPNS (Expected Power Not Supplied) - Valor esperado de potência não suprida [MW]

$$EPNS = \sum_{i \in S} C_i p_i$$

onde C_i é o corte de carga no estado i do sistema.

- EENS (Expected Energy Not Supplied) - Valor esperado de energia não suprida [MWh]

$$EENS = \sum_{i \in S} C_i F_i D_i = 8760 \times \sum_{i \in S} C_i p_i$$

onde D_i é a duração do estado i do sistema. Ou seja:

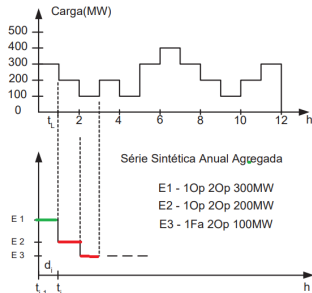
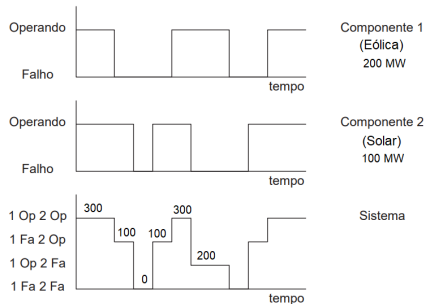
$$EENS = 8760 \times EPNS$$

Índices são calculados por meio de Simulação Monte Carlo.

Motivação do estudo: SMC Sequencial de um sistema de grande porte não é viável computacionalmente e o SMC Não-Sequencial amostra espaço de estados sem considerar a correlação e complementariedade entre os eventos (neste caso: geração eólica e solar).

Por meio de cópulas, amostrar valores coerentes entre si de geração eólica e solar.

Confiabilidade NH0 de Sistemas de Potência



Gráficos de Dispersão e Histogramas (Correlação dos Dados)

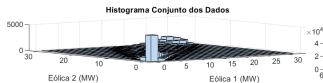
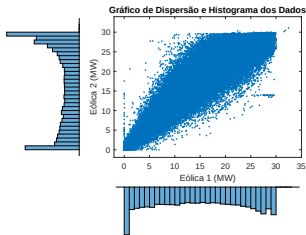


Figura: Correlação
Eólica-Eólica.

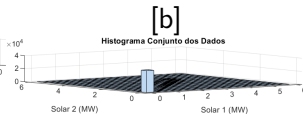
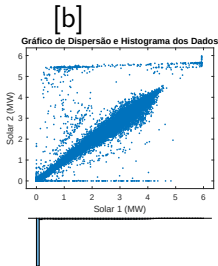


Figura: Correlação
Solar-Solar.

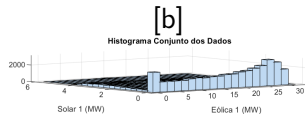
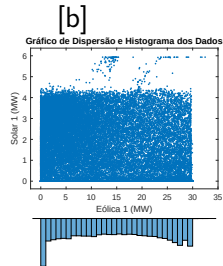


Figura: Correlação
Eólica-Solar.

Correlação Eólica-Eólica

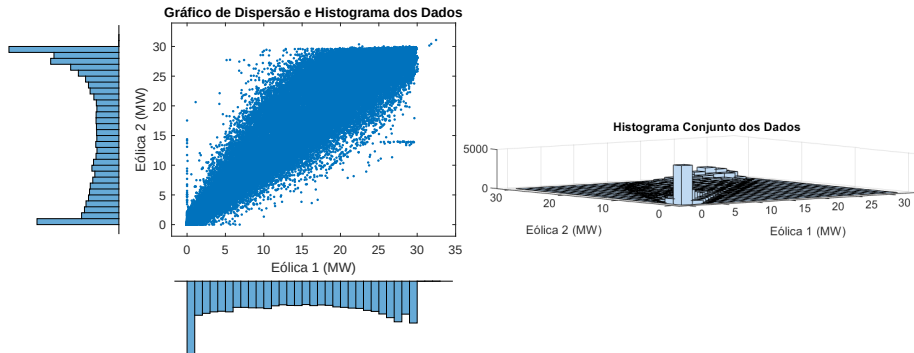


Figura: Gráfico de Dispersão e Histogramas para verificação da correlação eólica-eólica.

Correlação Solar-Solar

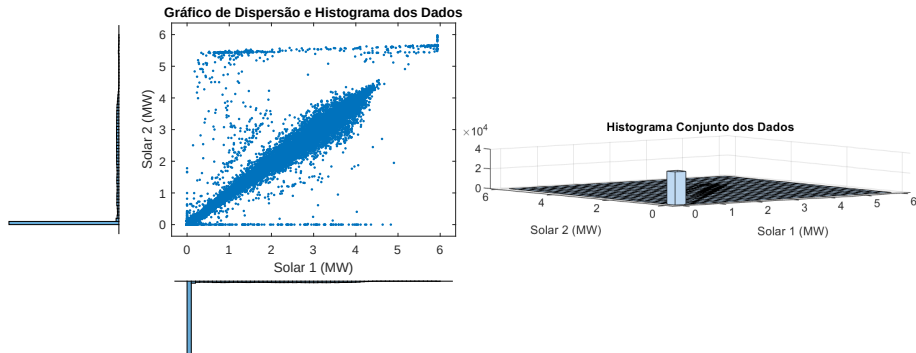


Figura: Gráfico de Dispersão e Histogramas para verificação da correlação solar-solar.

Correlação Eólica-Solar

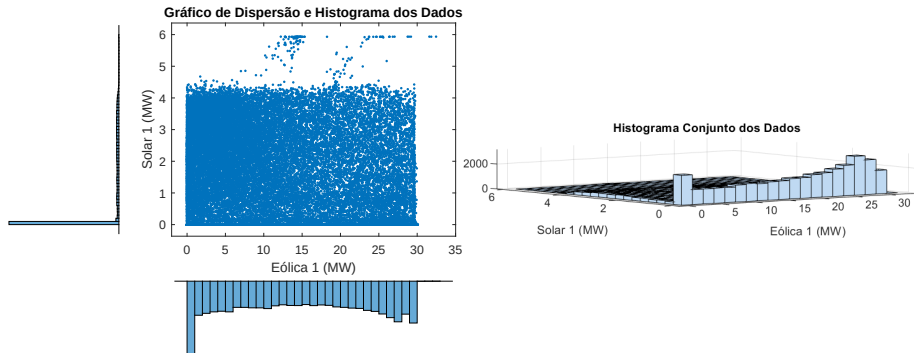


Figura: Gráfico de Dispersão e Histogramas para verificação da correlação eólica-solar.

Tabela: Coeficiente de correlação τ de Kendall da distribuição empírica conjunta.

	Eólica 1	Eólica 2	Solar1	Solar2
Eólica1	1.0000	0.7877	-0.2297	-0.2257
Eólica2	0.7877	1.0000	-0.2918	-0.2866
Solar 1	-0.2297	-0.2918	1.0000	0.9568
Solar2	-0.2257	-0.2866	0.9568	1.0000

Existem fórmulas fechadas que relacionam o Tau de Kendall aos parâmetros das cópulas arquimedianas.

Modelo para Estudo de Caso

Análise da Confiabilidade NH0

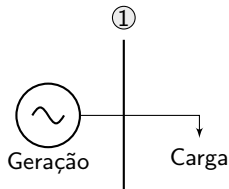
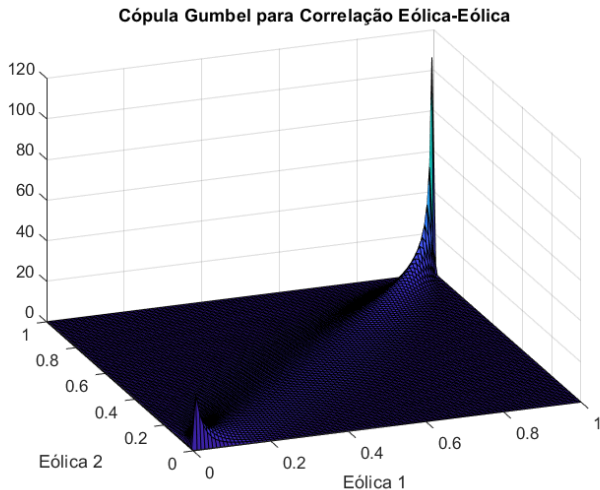


Figura: Sistema Considerado

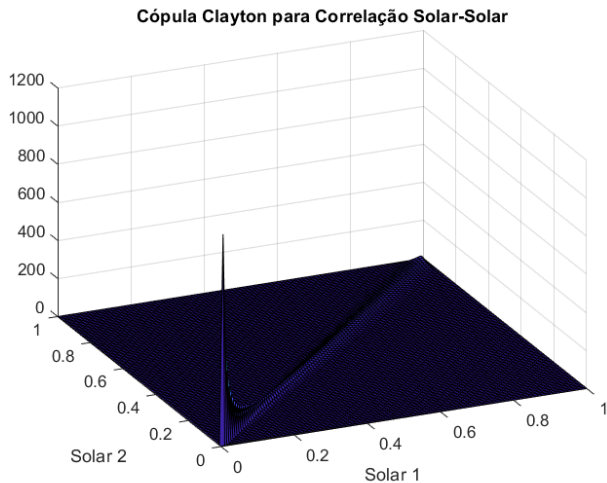
Geração $\rightarrow$ 2 Usinas Eólicas + 2 Usinas Fotovoltaicas

Carga $\rightarrow L = 24\text{MW}$

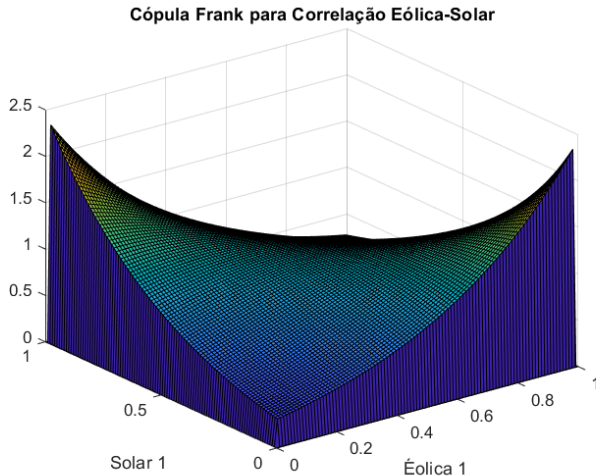
- Correlação Eólica 1- Eólica 2
- Correlação Solar 1 - Solar 2
- Correlação e Complementariedade - Eólica 1 e Solar 1



Seleção da Cópula



Seleção da Cópula



Simulação Monte Carlo Eólica-Solar

- Utilizando modelo de cópula Frank para modelar correlação Eólica1 - Solar1;
- Carga $\rightarrow$ 12 MW

Tabela: Índices de Confiabilidade por Simulação Monte Carlo para Geração Eólica-Solar.

Índice	Não-Sequencial (S/ Correlação)	Não-Sequencial (C/ Correlação)	Sequencial
	N = 984	N = 999	
LOLP (%)	38.01 ± 1.55	39.04 ± 1.54	39.66 ± 1.22
LOLE (h)	3329.51 ± 139.23	3419.82 ± 135.21	3775.67 ± 115.74
EPNS (MW)	2.23 ± 0.11	2.42 ± 0.11	2.41 ± 0.08
EENS (MWh)	19500.09 ± 974.03	21156.71 ± 974.08	22973.71 ± 716.96

Simulação Monte Carlo Eólica-Eólica

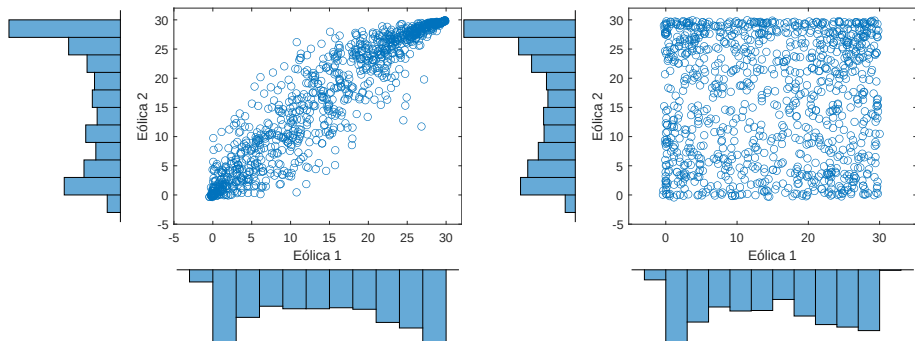


Figura: Geração de 1000 amostras aleatórias a partir da cópula eólica-eólica e sem correlação.

Simulação Monte Carlo Eólica-Eólica

- Utilizando modelo de cópula Gumbel para modelar correlação Eólica1 - Eólica2;
- Carga $\rightarrow$ 20 MW

Tabela: Índices de Confiabilidade por Simulação Monte Carlo para Geração Eólica-Eólica.

Índice	Não-Sequencial (S/ Correlação)	Não-Sequencial (C/ Correlação)	Sequencial
	N = 2020	N = 1093	
LOLP (%)	23.22 ± 0.94	33.94 ± 1.43	34.49 ± 1.07
LOLE (h)	2033.88 ± 120.31	2973.43 ± 125.47	3283.17 ± 101.93
EPNS (MW)	2.01 ± 0.20	3.98 ± 0.20	4.07 ± 0.10
EENS (MWh)	17599.62 ± 1743.20	34867.77 ± 1742.97	38788.65 ± 952.75

Simulação Monte Carlo Solar-Solar

- Utilizando modelo de cópula Clayton para modelar correlação Solar1 - Solar2
- Carga $\rightarrow$ 2 MW

Tabela: Índices de Confiabilidade por Simulação Monte Carlo para Geração Solar-Solar.

Índice	Não-Sequencial (S/ Correlação)	Não-Sequencial (C/ Correlação)	Sequencial
	N = 469	N = 243	
LOLP (%)	54.58 ± 2.30	65.84 ± 3.04	65.94 ± 1.54
LOLE (h)	4781.58 ± 242.94	5767.90 ± 266.50	6277.67 ± 146.26
EPNS (MW)	0.79 ± 0.06	1.16 ± 0.06	1.22 ± 0.03
EENS (MWh)	6893.04 ± 506.12	10142.75 ± 505.33	11617.84 ± 253.32

1. Nota Técnica EPE - Estudos de Planejamento da Expansão da Geração - Avaliação da Geração de Usinas Híbridas Eólico-Fotovoltaicas - Proposta metodológica e estudos de caso (2017)
2. M. Yang, W. Liu, X. Yin, Z. Cui and W. Zhang, "A Two-Stage Scenario Generation Method for Wind- Solar Joint Power Output Considering Temporal and Spatial Correlations," 2021 6th Asia Conference on Power and Electrical Engineering (ACPEE), 2021, pp. 415-423, doi: 10.1109/ACPEE51499.2021.9437026.
3. Pan C, Wang C, Zhao Z, Wang J, Bie Z. A copula function based Monte Carlo simulation method of multivariate wind speed and PV power spatio-temporal series.
4. Gorecki, Jan Hofert, Marius Holena, Martin. (2020). Hierarchical Archimedean Copulas for MATLAB and Octave : The HACopula Toolbox. Journal of Statistical Software. 93. 10.18637/jss.v093.i10.
5. Roger B. Nelsen - An Introduction to Copulas

Gratidão!

davi.chaves@ime.usp.br

felipe3@ime.usp.br

jujuherz@poli.urfj.br

ds.antonioli@gmail.com