Equação de conservação da quantidade de movimento.

Fluidos não resistem a tensões de cisalhamento.

Experimentalmente observou-se que:

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{u}{y} \qquad (*)$$

A ... área da placa em contato com o fluido.

A expressão $(*)$ sugere uma lei para descrever o processo de transporte de quantidade de movimento:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}$$ Lei da Viscosidade de Newton.

y... direção de transporte da quantidade de mov.
x... superfície de fluido paralela à direção X

Eq. de conserv. da quant. de movimento:

$$\begin{bmatrix} \text{TAXA DE VAR.} \\ \\ \text{de Q.M. 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{SOMA VETORIAL} \\ \text{DAS FORÇAS EXTERNAS} \\ \text{2} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta t}\left\{\left[Q.M.\right]_{t+\Delta t}\right.}_{(1a)} \underbrace{-\left[Q.M.\right]_{t}\left.\right\}}_{(1b)} = \frac{1}{\Delta t}\left\{\underbrace{-\left[taxa\ \ fluxo\ Q.M.\right]_{ent}}_{(1c)} + \underbrace{\left[taxa\ \ fluxo\ Q.M.\right]_{sai}}_{(1d)}\right\} \qquad (1)$$

$$(1a) = mu_{t+\Delta t} = \rho u_{t+\Delta t}\Delta x \Delta y \Delta z$$

$$(1b) = mu_{t} = \rho u_{t}\Delta x \Delta y \Delta z$$

Taxa de fluxo transportada para dentro do V.C. na direção X durante "Δt" é dada por:

$$(m_x u)_x . \Delta t = (\rho uu)_x \Delta y \Delta z \Delta t$$

$$(1c) = (\rho uu)_x \Delta y \Delta z \Delta t + (\rho vu)_x \Delta x \Delta z \Delta t + (\rho wu)_x \Delta x \Delta y \Delta t$$

$$(1d) = (\rho uu)_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t + (\rho vu)_{x+\Delta x} + \Delta x \Delta z \Delta t + (\rho wu)_{x+\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta t$$

Soma vetorial das forças externas

Forças atuando nas faces do v.c. $\rightarrow$ forças de superfície são proporcionais à área sobre a qual atuam.

$$(2a) = P_x \Delta y \Delta x - P_{x+\Delta x} \Delta y \Delta x$$

$$(2b) = \tau_{xx}\big|_x \Delta y \Delta z + \tau_{yx}\big|_y \Delta x \Delta z + \tau_{zx}\big|_z \Delta x \Delta y - \tau_{xx}\big|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z + \tau_{yx}\big|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z + \tau_{zx}\big|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$$

Forças de campo proporcionais ao volume:

$$(2c) = \rho g_x$$

Da 3ª Lei Newton $\longrightarrow$ $(1)=(2)$

$$(1a)-(1b)-(1c)+(1d)=(2a)+(2b)+(2c)$$

- (1a) → Q.M.em $t+\Delta t$
- (1b) → Q.M.em t
- (1c) → Taxa fluxo Q.M.entrando
- (1d) → Taxa fluxo.Q.M.saindo
- (2a) → Forças de pressão
- (2b) → Forças viscosas
- (2c) → Forças de campo

Na diração X:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial \rho u^2}{\partial x}+\frac{\partial \rho uv}{\partial y}+\frac{\partial \rho uw}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\rho g_x$$

Nas direções Y e Z:

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t}+\frac{\partial \rho uv}{\partial x}+\frac{\partial \rho v^2}{\partial y}+\frac{\partial \rho vw}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+\rho g_y$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t}+\frac{\partial \rho uw}{\partial x}+\frac{\partial \rho vw}{\partial y}+\frac{\partial \rho w^2}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}+\rho g_z$$

Para resolvermos o sistema de equações formado por:

- Equação da continuidade (conservação da massa)
- Equações de cons. da quant. de mov. em X,Y, e Z.

É necessário expressar em termos de gradientes de velocidade e propriedades físicas:

$$\tau_{xx}{}^2 = -2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{yy}{}^2 = -2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{zz}{}^2 = -2\mu \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

As equações de conserv. da quant. de mov. podem ser agrupados em uma única equação em sua forma vetorial.

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\rho \vec{v}\vec{v}\right) = -\nabla P + \nabla \vec{\tau} + \rho \vec{g}$$

Observe que $\rho \vec{v}\vec{v}$ e $\vec{\tau}$ são tensores:

$$\rho \vec{v}\vec{v} = \begin{bmatrix} \rho_{uu} & \rho_{uv} & \rho_{uw} \\ \rho_{vu} & \rho_{vv} & \rho_{vw} \\ \rho_{wu} & \rho_{wv} & \rho_{ww} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Equações de Navier-Stokes em termos da derivada substancial:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \ldots$$

$$\underbrace{\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z}}_{\rho \frac{Du}{Dt}} + u \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right]}_{\text{Equação da continuidade=0}}$$

$\frac{Du}{Dt}$ ...derivada substancial

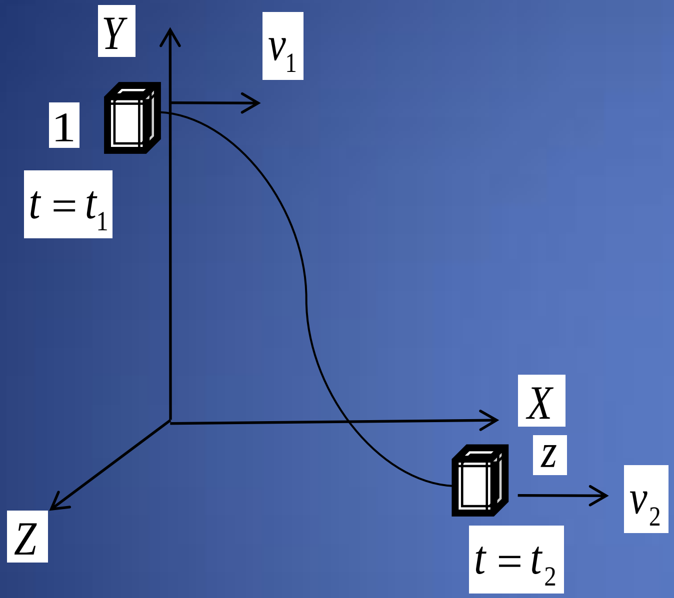
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

$\frac{D}{Dt}\ldots.$ é a taxa de variação temporal seguindo um elemento fluido em movimento.

$\frac{\partial}{\partial t}\ldots.$ é a taxa de variação temporal de um tempo fixo.

Significado físico da derivada substancial

Para um dado escoamento temos $\rho = \rho(x, y, z, t)$



no ponto 1 e t1 temos:

$$\rho_1 = \rho(x_1, y_1, z_1, t_1)$$

no ponto 2 e t2 temos:

$$\rho_2 = \rho(x_2, y_2, z_2, t_2)$$

Sendo $\rho = \rho(x, y, z, t)$ podemos fazer uma expansão em série de Taylor em torno do ponto 1.

$$\rho_2 = \rho_1 + \left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 (x_2 - x_1) + \left.\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 (y_2 - y_1) + \left.\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1 (z_2 - z_1) + \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 (t_2 - t_1) + \ldots$$

Ou: $$\frac{\rho_2-\rho_1}{t_2-t_1}=\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)_1\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}+\left.\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_1\frac{y_2-y_1}{t_2-t_1}+\left.\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)_1\frac{z_2-z_1}{t_2-t_1}+\left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_1$$

Taxa de variação temporal da densidade do elemento fluido se movendo do ponto 1 para o ponto 2.

Tomando o limite de $t_2 \to t_1$

$$\lim_{t_2\to t_1} = \frac{\rho_2-\rho_1}{t_2-t_1} \equiv \frac{D\rho}{Dt}$$

$\frac{D\rho}{Dt}$ É a taxa variação da densidade de um elemento fluido a medida que ele se move no espaço.

$\frac{\partial\rho}{\partial t}$ É a taxa de variação da densidade de um ponto fixo.

$$\lim_{t_2 \to t_1} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = u$$

$$\lim_{t_2 \to t_1} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = v$$

$$\lim_{t_2 \to t_1} = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = w$$

Daí, a equação da quantidade de movimento em termos de derivadas totais, fica:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho \vec{g}$$

(Eq. Navier-Stokes)

Equação de Conservação de Energia

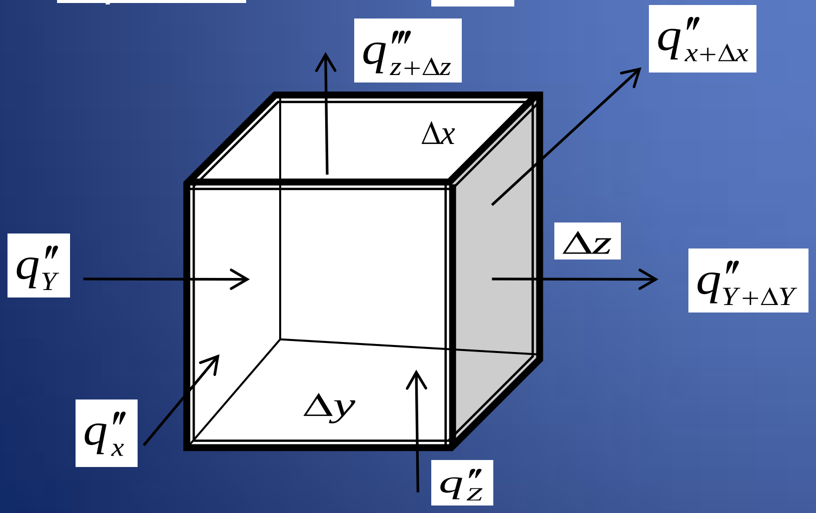
Aplicação da 1º lei da termodinâmica no volume de controle.

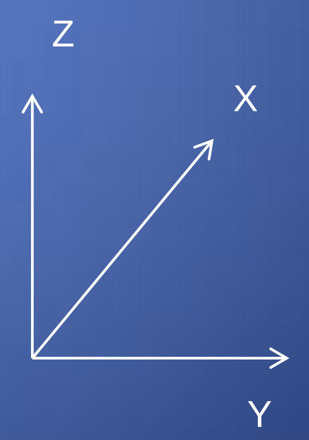
$$\Delta Q = \Delta E + \Delta W$$

[calor adicionado ao v.c. em Δt] = [Aumento na Energia total no V.C.] + [Produção de Trabalho]

❖ O desenvolvimento completo desta equação encontra-se no Schlichting.

Hipótese: o calor ΔQ é adicionado ao V.C. apenas por condução de calor.





$$\Delta Q = \left[q''_x \Delta y \Delta z + q''_y \Delta x \Delta z + q''_z \Delta x \Delta y - q''_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z - q''_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z - q''_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y \right] \Delta t$$

Usando a lei de Fourier:

$$\Delta Q=\left\{\left[\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x}\right]\Delta y\Delta z+\left[\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y+\Delta y}-k\left(\frac{\partial T}{\Delta y}\right)_{y}\right]\Delta x\Delta z+\left[\left(k\frac{\partial T}{\Delta z}\right)_{z+\Delta z}-k\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z}\right]\Delta x\Delta y\right\}\Delta t$$

Desprezando-se a variação de energia potencial:

$$\Delta \mathrm{E}=\Delta E\,\mathrm{interna}+\Delta E\,\mathrm{cinética}$$

$$\begin{aligned}\Delta \mathrm{E}=&\left[\rho u\left(p+\frac{V^2}{2}\right)_{t+\Delta t}-\rho\left(p+\frac{V^2}{2}\right)_{t}\right]\Delta x\Delta y\Delta z+\\&+\left[\rho v\left(p+\frac{V^2}{2}\right)_{y+\Delta y}-\rho v\left(p+\frac{V^2}{2}\right)_{y}\right]\Delta x\Delta z\Delta t+\\&+\left[\rho w\left(p+\frac{V^2}{2}\right)_{z+\Delta z}-\rho w\left(p+\frac{V^2}{2}\right)_{z}\right]\Delta x\Delta y\Delta t\end{aligned}$$

Com

$$V=\sqrt{u^2+v^2+w^2}$$

O fluido realiza trabalho contra forças de pressão e forças viscosas

Trabalho $W > 0 \Rightarrow$ velocidade e tensão tem sentidos contrários.

$$\begin{aligned}\Delta W = \{ & [u(p+\tau_{xx})]_{x+\Delta x}\Delta y\Delta z + [v\tau_{yx}]_{y+\Delta y}\Delta x\Delta z \\ & + [w\tau_{zx}]_{z+\Delta z}\Delta x\Delta y + [u\tau_{xy}]_{x+\Delta x}\Delta y\Delta z + \\ & + [v(p+\tau_{yy})]_{y+\Delta y}\Delta x\Delta z + [w\tau_{zy}]_{z+\Delta z}\Delta x\Delta y \\ & + [u\tau_{zx}]_{x+\Delta x}\Delta y\Delta z + [v\tau_{yz}]_{y+\Delta y}\Delta x\Delta z + [w(p+\tau_{zz})]_{z+\Delta z}\Delta x\Delta y\end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{aligned} & -[u(p+\tau_{xx})]_{x}\Delta y\Delta z - [v\tau_{yx}]_{y+\Delta y}\Delta x\Delta z - [w\tau_{zx}]_{z}\Delta x\Delta y \\ & -[u(p+\tau_{xy})]_{x}\Delta y\Delta z - [v(p+\tau_{yy})]_{y+\Delta y}\Delta x\Delta z - [w\tau_{zy}]_{z}\Delta x\Delta y \\ & -[u\tau_{xz}]_{x}\Delta y\Delta z - [v\tau_{yz}]_{y}\Delta x\Delta z - [w(p\tau_{zz})]_{z}\Delta x\Delta y\}\Delta t\end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

(I) entrando no V.C.

(II) saindo do V.C.

Tomando o limite para $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ tendendo a zero:

$$\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(p + \frac{V^2}{2}\right)\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\left(p + \frac{V^2}{2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho v\left(p + \frac{V^2}{2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\rho w\left(p + \frac{V^2}{2}\right)\right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}(pu) + \frac{\partial}{\partial y}(pv) + \frac{\partial}{\partial z}(pw) + D$$

Com

$$D = \frac{\partial}{\partial x}\left[(\tau_{xx} u) + (\tau_{xy} v) + (\tau_{xz} w)\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[(\tau_{xy} u) + (\tau_{yy} v) + (\tau_{yz} w)\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[(\tau_{zx} u) + (\tau_{zy} v) + (\tau_{zz} w)\right]$$

Expandindo os 4 termos do lado direito de eq. e usando a eq. da conservação da massa:

$$\nabla(k \nabla T) = \rho \frac{D}{Dt}\left(p + \frac{V^2}{2}\right) + \nabla(p\vec{v}) + D$$

Equação de Balanço de Energia em Termos de Temperatura.

$$de = dh - d\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

$$dh = CpdT + \frac{1}{\rho}(1 - \beta T)dp$$

$$\Downarrow$$

$$\rho Cp\frac{DT}{Dt} = \nabla(K\nabla T) + \beta T\frac{DP}{Dt} + \mu\phi$$

- Taxa de aumento de entalpia
- calor transportado por condução
- Trabalho devido a efeitos de compressibildade
- dissipação viscosa

$$\phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right]^2 + \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right]^2$$

Resumo das equações de consvervação

- Equação de conservação da massa.
- Equação de conservação da quantidade de movimento.
- Equação de conservarção da energia

Equação de conservação da massa:

$$\left[\begin{array}{l}\text{Variação da Massa} \\ \text{no v.c. entre } t \text{ e } t+\Delta t\end{array}\right] = \left[\begin{array}{l}\text{balanço dos fluxos de massa} \\ \text{entrando e saindo no v.c}\end{array}\right]$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left[\frac{\partial \rho u}{\partial X} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial Z}\right]$$

Usando o operador divergente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho \vec{v})$$

Se escoamento incompressível:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla(\rho \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial X} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial Z} = 0$$

Equação de conservação da Quantidade de Movimento:

$$\begin{bmatrix} \text{Taxa de variação} \\ \text{de Q.M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{soma Vetorial das} \\ \text{Forças Externas} \end{bmatrix}$$

Q.M entra – Q.M. sai
+ balanço de fluxo de
Q.M no v.c

Forças da Pressão
Forças Viscosas
Forças de Campo

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho uu}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho g_x (x)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho vu}{\partial x} + \frac{\partial \rho vv}{\partial y} + \frac{\partial \rho vw}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho g_y (y)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho wu}{\partial x} + \frac{\partial \rho wv}{\partial y} + \frac{\partial \rho ww}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g_z (z)$$

Equação na forma vetorial.

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(\rho \vec{V}\vec{V}\right) = -\nabla \vec{p} - \nabla\,\vec{\tau} + \rho \vec{g}$$

As equações se simplificam para escoamento incompressíveis.

<u>Coordenadas cartesianas</u>

$$\rho \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} + w\,\frac{\partial v}{\partial z} \right)}_{\text{Termos convectivos}} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)}_{\text{Termos difusivos}} + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} + w\,\frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\,\frac{\partial w}{\partial x} + v\,\frac{\partial w}{\partial y} + w\,\frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

Coordenadas Cilíndricas

Direção r:

$$\rho\left[\frac{\partial vr}{\partial t}+vr\frac{\partial vr}{\partial r}+\frac{V\phi}{R}\frac{\partial vr}{\partial \phi}-\frac{\partial v\phi}{\partial r}+V_Z\frac{\partial Vr}{\partial Z}\right]=-\frac{\partial P}{\partial r}+$$
$$+\rho g_r+\mu\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rVr+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Vr}{\partial \phi^2}-\frac{Z}{rZ}\frac{\partial V\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial^2 Vr}{\partial Z^2}\right)$$

Direção ϕ:

$$\rho\left(\frac{\partial v\phi}{\partial t}+vr\frac{\partial v\phi}{\partial r}+\frac{V\phi}{r}\frac{\partial v\phi}{\partial \phi}-\frac{VrV\phi}{r}+V_Z\frac{\partial Vr}{\partial Z}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \phi}+$$
$$+\rho 9\phi+\mu\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rV\phi+\frac{1}{r^Z}\frac{\partial^Z V\phi}{\partial \phi^Z}-\frac{Z}{rZ}\frac{\partial Vr}{\partial \phi^Z}+\frac{\partial^Z V\phi}{\partial Z^Z}\right)$$

Direção Z:

$$\rho\left(\frac{\partial vz}{\partial t}+vr\frac{\partial Vz}{\partial r}+\frac{V\phi}{r}\frac{\partial V_Z}{\partial \phi}+V_Z\frac{\partial Vr}{\partial Z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial Z}+\rho g_Z+$$
$$+\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial V_Z}{\partial r}+\frac{1}{r^Z}\frac{\partial^Z Vz}{\partial \phi^Z}+\frac{\partial^Z Vz}{\partial Z^Z}\right)$$

Equação de conservação de energia

$$\Delta Q = \Delta E + \Delta W$$

Calor adicionado ao v.c

variação da Energia Total

Trabalho realizado pelo fluido

$$\rho Cp \frac{DT}{Dt} = \nabla(K \nabla T) + \underbrace{T\beta \frac{DP}{Dt}}_{\text{compressibilidade}} + \underbrace{\mu \Phi}_{\text{dissipação viscosa}}$$

Para escoamentos incompressíveis:

$$\rho Cp\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial X} + V\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial Z}\right) = \frac{\partial}{\partial X}\left(K\frac{\partial T}{\partial X}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial Z}\left(K\frac{\partial T}{\partial Z}\right)$$

Algumas Definições para as Variáveis Ψ, J e f

Nesta seção serão apresentadas algumas definições para as variáveis Ψ, J e f empregadas em diferentes equações de conservação com o intúito de mostrar a generalidade das formas das Eqs. (1) e (4) . Por conveniência estas definições estão mostradas na Tabela 1 e referem-se às equações de conservação de massa, quantidade de movimento, vorticidade, energia térmica, energia cinética e entropia.

Tabela 1 – Definições das variáveis Ψ, J e f para as equações de conservação de massa, quantidade de movimento, vorticidade, energia térmica, energia cinética e entropia.

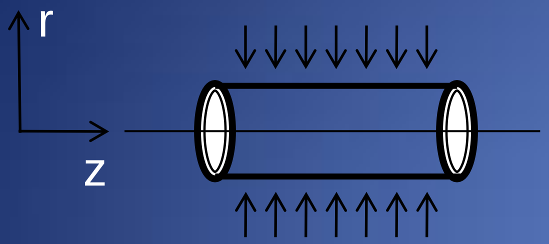
Variável	Ψ	J	f
Massa	1	0	0
Quantidade Movimento	$\vec{V}$	$\mathbf{T}$	$\rho\vec{g}+\rho\vec{a}_I$
Vorticidade	$\vec{\omega}$	$\mu\nabla\vec{\omega}$	$\vec{\omega}\cdot\nabla\vec{V}$
Energia Cinética	k	$\mathbf{T}\cdot\vec{V}$	$\mathbf{T}\cdot\nabla\vec{V}+\rho\vec{V}\cdot\vec{g}$
Energia Interna	$\hat{u}$	$\vec{q}_k$	$\mathbf{T}\cdot\nabla\vec{V}+q'''$
Entropia	s	$\frac{\vec{q}_k}{\theta}$	$\frac{\rho q'''}{\theta}+\frac{k}{\theta^2}(\nabla\theta)^2+\frac{\mathbf{T}\cdot\nabla\vec{V}-P\nabla\cdot\vec{V}}{\theta}$

Na tabela 1, **T** é o tensor das tensões no fluido, u e s a energia interna e entropia específica do fluido; θ é a temperatura, q_k é o fluxo de calor por unidade de área e q''' fonte ou sorvedouro de calor por unidade de volume.

As definições contidas na Tabela 1 permitem, numa notação compacta, o estabelecimento das equações de conservação e transporte acima listadas. Para tanto, é necessário a definição de equações auxiliares ou constitutivas para a completa especificação das equações. Isto aplica-se especificamente ao tensor de tensões do fluido, **T**, ao fluxo de calor por condução, q_k e às fontes/sumidouros volumétricos de calor, q’’’. As seções seguintes abordam estes temas específicos juntamente com uma interpretação física detalhada dos termos de cada uma das equações de transporte.

Exemplo de aplicação:

Cálculo da queda de pressão e coeficiente de transferência de calor num tubo horizontal uniformemente aquecido.



Hipóteses:
(a) Regime estacionário
(b) Fluido incompressível
(c) Propriedades físicas etc..
(d) Escoam. Laminar, plenamente e desenvolvido
(e) Fluxo de calor uniforme

Eq. Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \phi} = 0$$

Considerando escoamento plenamente desenvolvido $\rightarrow V = V(r)$

$$V_z(r,z) = V_z(r) \Rightarrow \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial z}}_{\text{Varia com “Z”}} = \underbrace{\mu\left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}\right]}_{\text{Varia com “r”}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = cte = \mu\left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}\right]$$

Integrando duas vezes em r

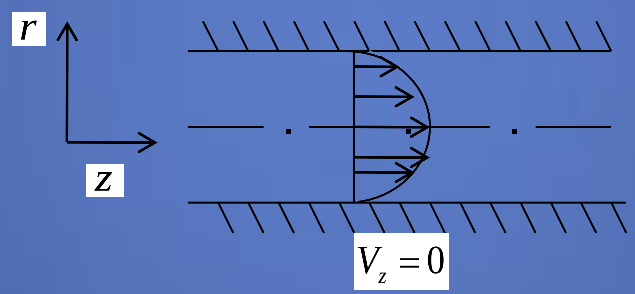
$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mu}{r}\frac{1}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)$$

$$\int \frac{\partial p}{\partial z}\frac{r}{\mu} = \int \frac{1}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)$$

$$\frac{dp}{dz}\frac{r^2}{2\mu} + C_1 = r\frac{\partial V_z}{\partial r}$$

Cond. de contorno $\longrightarrow$ $\left.\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)_{r=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$\int \frac{dp}{dz}\frac{r}{2\mu} = \int \frac{\partial V_z}{\partial r}$$



$$\frac{dp}{dz}\frac{r^2}{4\mu} + C_2 = V_z$$

Cond. de contorno $\longrightarrow$

$$V_z(r = R) = 0$$
$$\Rightarrow C_2 = -\frac{dp}{dz}\frac{R^2}{4\mu}$$

$$V_z(r) = \frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}\left(R^2 - r^2\right)$$

Velocidade média na seção transversal:

$$\overline{V}_z = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R V_z(r)2\pi r dr$$

$$\overline{V}_z = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R \frac{-1}{4\mu}\frac{dp}{dz}\left(R^2 - r^2\right)2\pi r dr$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{V}_z = -\frac{1}{R^2 4\mu}\frac{dp}{dz}\int_0^R \left(R^2 r - r^3\right)dr$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{V}_z = \frac{R^2}{8\mu}\frac{dp}{dz}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dp}{dz} = \frac{8\mu\overline{V}_z}{R^2}$$

Vimos que:

$$\begin{cases} V_z(r) = -\dfrac{1}{4\mu}\dfrac{dp}{dz}\left(R^2 - r^2\right) \quad (*) \\ \dfrac{dp}{dz} = -\dfrac{8\mu\overline{V}_z}{R^2} \quad (**) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Perda de pressão ao longo do tubo

Substituindo * * em *

$$V_z(r) = 2\overline{V}_z\left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]$$

$\longrightarrow$ Perfil de velocidade

O coeficiente de convecção "*h*" é definido em função da temperatura na superfície do tubo T_w (R,Z) e da temperatura média do fluido na seção transversal $T_\infty = f(z)$

$$h = \frac{q''}{T_w - T_\infty} = \frac{-k\left(\partial T/\partial r\right)_{r=R}}{T_w - T_\infty}$$

Se " *Cp*" for constante, a temperatura média no fluido pode ser obtida a partir da entalpia média $H(z)$:

$$\overline{H}(z) = \frac{\int_A H(r,z)\rho V_z(r,z)\,dA}{\int_A \rho V_z(r,z)\,dA}$$

Como *Cp* é constante:

$$T_\infty(z) = \frac{\int_\circ^R T(r,z)V_z(r)2\pi r\,dr}{\int_A Vz(r)2\pi r\,dr}$$

Eq. de balanço de energia:

$$\rho Cp\left[V_z\frac{\partial T}{\partial z} + V_r\frac{\partial T}{\partial r}\right] = k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \underbrace{\mu\left(\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)^2}_{\text{(dissipação viscosa)}} = 0$$

(dissipação viscosa)

$$V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho C p} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

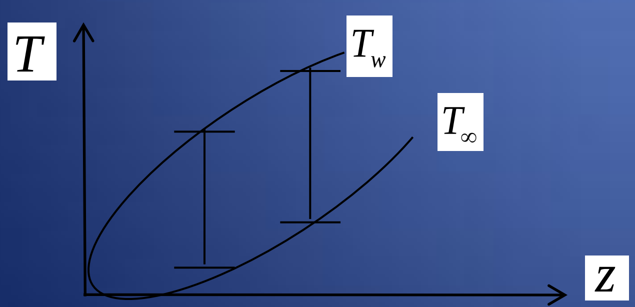
Condições de contorno:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=0} = 0 \\ \\ -k \left.\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} = q'' \\ \\ T(r, z=0) = T_0 \end{cases}$$

As duas primeiras C.C. informam sobre a forma do perfil. A terceira apenas estabelece um nível de temperatura.

Hipótese de escoamento plenamente desenvolvido $\longrightarrow$ perfil constante.

$$T(r,z) = A_1 z + \psi(r)$$



$$h = \frac{q''}{T_w - T_\infty} \Rightarrow h = f[\psi(r)]$$

$$T(r,z) = A_1 z + \psi(r)$$

Portanto:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial z} = A_1 & (**) \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial r} = \dfrac{\partial \psi}{\partial r} & (***) \end{cases}$$

Da dedução do campo de velocidade vimos que:

$$V_z(r) = 2\overline{V}_z \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right] \qquad (*)$$

Equação de balanço de energia fica:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ *}}{V_z} \underset{\substack{\downarrow \\ **}}{\frac{\partial T}{\partial z}} = \frac{k}{\rho C p} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \underset{\substack{\downarrow \\ ***}}{\frac{\partial T}{\partial r}} \right)$$

$$2\overline{V}_z \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right] A_1 = \frac{k}{\rho C p} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$$

Integrando em “r”:

$$\frac{1}{2}\frac{\rho Cp\overline{V}_z}{kR^2}\left(2R^2r - r^3\right)A_1 + C_1 = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Usando a condição de contorno:

$$\underbrace{\left.\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_{r=0}}_{\text{Perfil simétrico}} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

Integrando novamente em r:

$$\psi_{(r)} = \frac{1}{8}\frac{\rho Cp\overline{V}_z}{kR^2}\left(4R^2r^2 - r^4\right)A_1 + C_2$$

As constantes A_1 e C_2 são calculadas com o auxílio das duas C.C. restantes.

$$\left.-k\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=R} = q''$$

$$T(r, z=0) = T_0$$

Vimos que se *Cp* é constante, então:

$$T_\infty(z) = \frac{\int_0^R T(r,z)V_z(r)2\pi r\,dr}{\int_0^R V_z(v)2\pi r\,dr}$$

$$V_z(r) = 2\overline{V}_z\left[1-\frac{r^2}{R^2}\right]$$

$$T(r,z) = A_1 z + \psi(r)$$

$$\psi(r) = \frac{1}{8}\frac{\rho Cp\overline{V}_z}{kR^2}\left(4R^2r^2 - r^2\right)A_1 + C_2$$

$$T_\infty(z) = A_1 z + \frac{7\rho Cp\overline{V}_z R^2}{48k}A_1 + C_2$$

$$T_w = T_{(r=R,z)} = A_1 z + \frac{3}{8}\frac{\rho Cp\overline{V}_z R^2}{k}A_1 + C_2$$

$$T_w - T_\infty = \frac{11}{8}\frac{\rho Cp\overline{V}_z R^2}{k}A_1$$

Sabemos que: $$h = \frac{q''}{T_w - T_\infty} = \frac{-k\,\partial T/\partial r\big)_{r=R}}{T_w - T_\infty}$$

Vimos que: $$T(r,z) = A_1 z + \psi(r)$$ $$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Logo $$h = \frac{-k\,\partial \psi/\partial r\big)_{r=R}}{T_w - T_\infty}$$

Mas $$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{\rho Cp\overline{V}_z}{kR^2}\left(2R^2 r - r^3\right)A_1$$

Aplicando para r = R temos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{\rho Cp\overline{V}_z}{kR^2}\left(2R^3 - R^3\right)A_1$$

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_{r=R} = \frac{1}{2}\frac{\rho Cp\overline{V}_z}{k}RA_1$$

$$h = \frac{-k\,\frac{1}{2}\,\frac{\rho C p \overline{V}_z}{k}\,R A_1}{\frac{11}{48}\,\frac{\rho C p \overline{V}_z}{k}\,A_1 R^2}$$

$$h = 2.18\,\frac{k}{R}$$ ⟶ Coeficiente de transferência de calor convectivo

Definindo o adimensional "*Nu*" como sendo:

$$Nu = \frac{hD}{k} = \frac{h2R}{k}$$

$$Nu = 2.18\,\frac{k}{R} \times \frac{2R}{k} = \underline{\underline{4.36}}$$

Nu ⟶ representa a razão entre o fluxo de calor existente através da superfície e o fluxo de calor que existiria caso a transferência de calor ocorresse apenas através de mecanismos de condução térmica.

Transferência de Calor por Convecção: Camada Limite Térmica

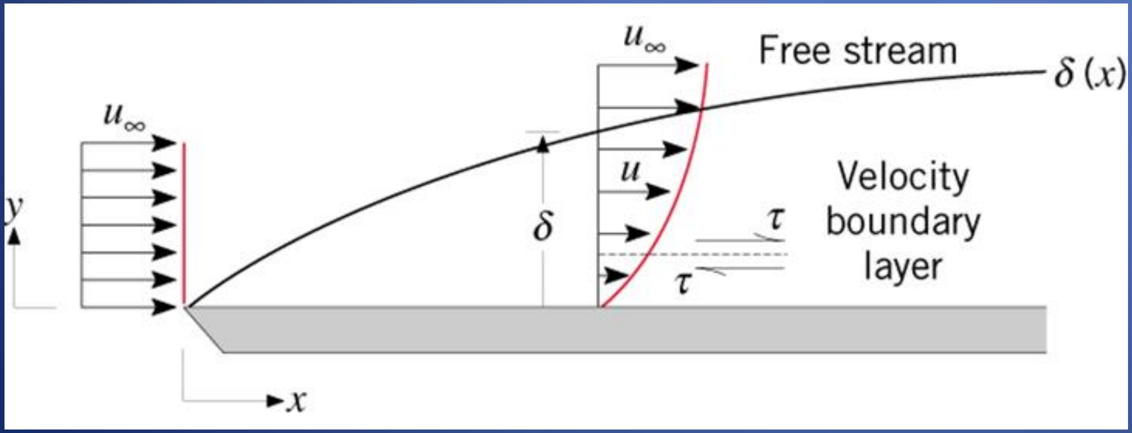
Seja um escoamento de um fluido Newtoniano, sobre uma placa plana.

Pode-se observar o aparecimento de uma camada limite onde

Predominam os efeitos viscosos e vale a Lei de Newton da Viscosidade.

O fluxo da Q.M. na direção (x) se dá por difusão.

O fluxo de Q.M. na direção (y) altera o perfil de velocidade na direção (x)



$$\delta \rightarrow \frac{u(y)}{u_\infty} = 0.99$$

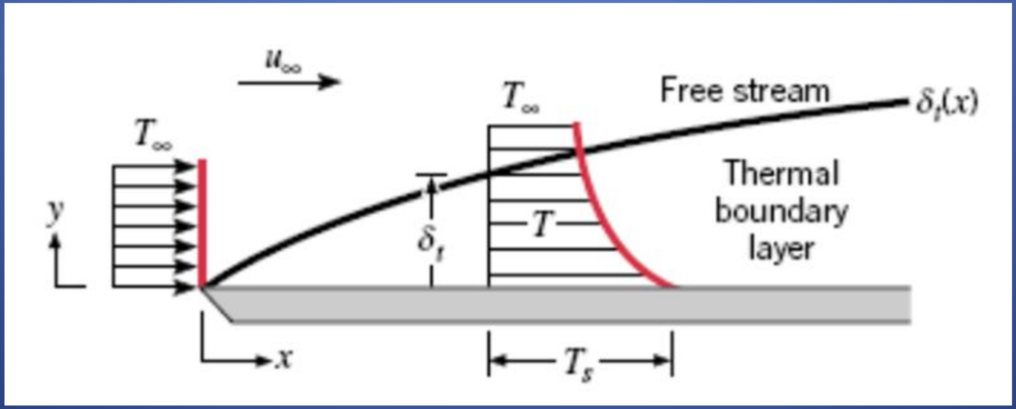
$$\tau_s = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

Transferência de Calor por Convecção: Camada Limite Térmica

O conceito de camada limite térmica é uma extensão do conceito de camada limite dinâmica (já vista na Mecânica dos Fluidos) ao campo de temperatura num escoamento. A camada limite térmica é a zona na qual os gradientes de temperatura são importantes - junto a paredes sólidas (fronteiras do escoamento).

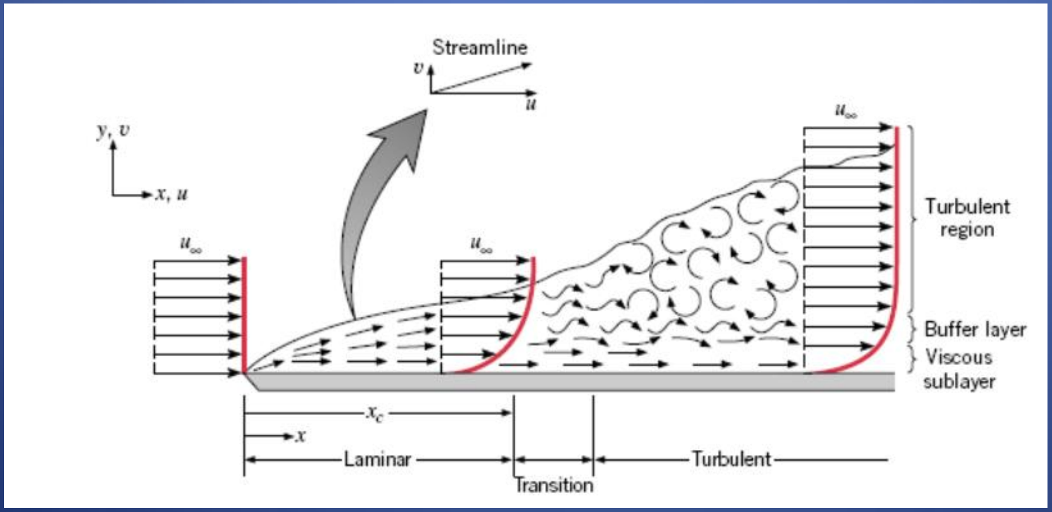
O fluxo de calor na parede altera o perfil de temperatura.

A espessura da camada limite (δ_t) aumenta, geralmente, na direção do escoamento (x). Associada a este aumento, existe uma diminuição do coeficiente de convecção local (h_x).



Transferência de Calor por Convecção: Camada Limite Térmica

A camada limite pode ser laminar ou turbulenta. Os coeficientes de convecção são em geral maiores para o escoamento turbulento do que para o escoamento laminar.
Num mesmo escoamento podem existir os dois tipos de camada limite, sendo necessário contabilizar ambos para o cálculo do coeficiente de convecção médio. O comprimento da zona laminar pode ser, ou não, desprezível, dependendo da geometria e a velocidade do escoamento.
Para uma placa plana, usada como exemplo, ao fim de um determinado comprimento (x crítico), se a velocidade u_m for suficientemente grande, a camada limite dinâmica torna-se turbulenta.



Transferência de Calor por Convecção: Camada Limite Térmica

Existe uma diferença entre valores locais e valores médios do coeficiente de convecção.

O coeficiente de transf. calor convectivo médio é a integração dos coef. transf. calor convectivo local para uma dada área superficial:

$$\delta_t \rightarrow \frac{T_s - T(y)}{T_s - T_\infty} = 0.99$$

$$q_s'' = -k_f \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

$$h \equiv \frac{-k_f \partial T / \partial y \big|_{y=0}}{T_s - T_\infty}$$

$$\boxed{\bar{h} = \frac{1}{A} \int h da}$$

Transferência de Calor por Convecção: Camada Limite Térmica

Como caracterizar as condições de regime laminar ou turbulento?

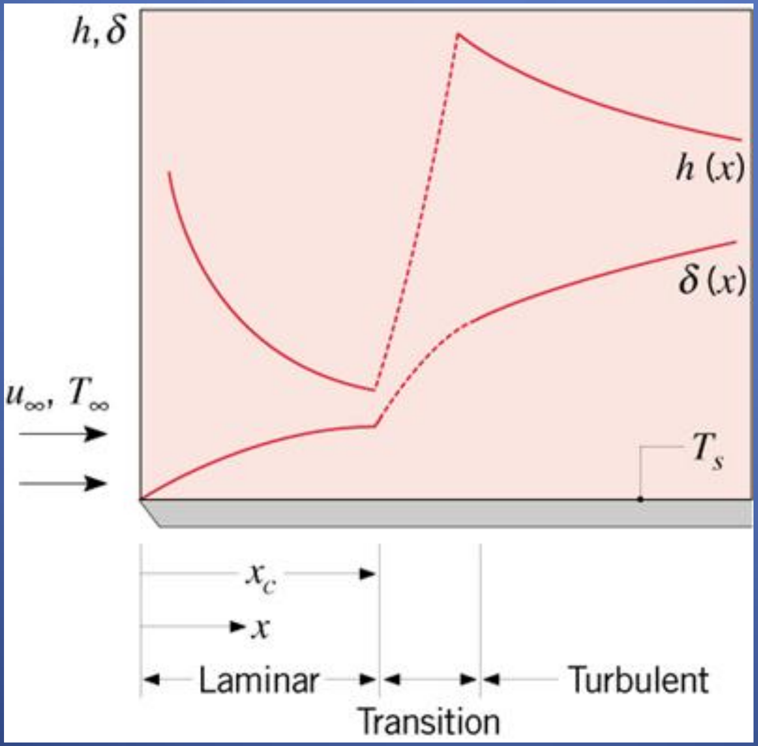
Que condições estão associadas à transição?

Por quê o Número de Reynolds é apropriado para caracterizar a transição de laminar para turbulento?

Transferência de Calor por Convecção: Camada Limite Térmica

O valor típico do número de Reynolds crítico para a transicção é de $5x10^5$.
Para este valor, a distância crítica (x_{cr}) correspondente calcula-se com a expressão:

$$\mathbf{Re_{cr}} = \frac{\rho c_\infty x_{cr}}{\eta} = 5 \cdot 10^5$$



O Significado Físico dos Números Adimensionais:

Os números adimensionais permitem reduzir a análise experimental de um problema físico de forma considerável.

Isso é possível se podemos encontrar correlações apropriedas usando Números adimensionais.

Há duas formas de se números adimensionais para um dado problema físico:

a) Teorema de Pi-Buckingham (Langaar, 1951);

b) E.D.P. adimensionalisadas.

O Significado Físico dos Números Adimensionais:

O Número de Reynolds (Re):

O escoamento em uma placa plana envolve, dois mecanismos físicos independentes que governam todo o escoamento: o primeiro deles é a *inércia (fluxo advectivo)*, caracterizada pelo fluxo advectivo da quantidade de movimento do fluido; o segundo mecanismo físico é a *viscosidade (fluxo difusivo)*. Assim, o que determina o movimento do fluido de uma maneira global é a razão entre a magnitude global das *Forcas Inerciais*, proporcionais ao produto $U\rho$, e a magnitude global das *Forcas Viscosas*, proporcionais a μ/L.

Assim, o *Número de Reynolds (Re)* é o parâmetro determinante do escoamento da porque ele é uma medida da importância relativa entre a magnitude global dos esforços de natureza inercial e viscosa que atuam no fluido.

Como U e L são características das condições de contorno do problema, e ρ e μ são características do fluido, define-se a Viscosidade Cinemática, como sendo:

$$v = \frac{\mu}{\rho}$$

onde μ é a viscosidade dinâmica. o Numero de Reynolds pode ser representado como:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

O Número de Prandt (Pr):

- Número de Prandtl: razão entre a difusividade da Q.M. e a difusividade térmica. Está relacionado ao crescimento relativo entre as camadas-limite fluidodinâmica e térmica:

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \qquad\qquad \mathrm{Pr}^n \approx \frac{\delta}{\delta_t}$$

- Pr<<1: metais e líquidos, difusão térmica mais eficiente que difusão de momentum, $\delta_t >> \delta$.
- Pr≈1: gases, $\delta_t \approx \delta$.
- Pr>>1: óleos, difusão de momentum mais eficiente que difusão térmica, $\delta_t << \delta$.

O Número de Nusselt (Nu):

$$h = h(T_s, T_\infty, \mu, \rho, k, c_p, \mathbf{u}, x, \text{geometria, dimensões})$$

Utilizando o teorema dos Pi de Buckingham e tornando o problema adimensional:

$$\mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}\left(x^*, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right) \qquad \overline{\mathrm{Nu}} = \overline{\mathrm{Nu}}\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right)$$

$$\mathrm{Nu} = \frac{hL}{k} \quad \mathrm{Re} = \frac{\rho V L}{\mu} \quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$$

O número de Nusselt representa a razão entre a transferência de calor convectiva e a puramente condutiva entre um fluido e uma superfície submetida a um fluxo de calor.

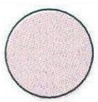
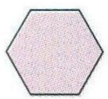
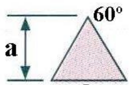
O Número de Nusselt (Nu):

Correlações para escoamentos interiores laminares, na zona desenvolvida:

Se $L \gg X_e$ o número de Nusselt médio é aproximadamente igual ao número de Nusselt da zona de escoamento desenvolvido. As diferentes configurações da secção levam a usar D_H (diâmetro hidráulico).

Tab. 9.1 - Números de Nusselt em Escoamentos Laminares Desenvolvidos

$$Nu_D = \frac{\alpha \, D_H}{\lambda}, \quad \text{sendo} \quad D_H = \frac{4\,S}{P}$$

Secção	$\dot{q}_P = C.^{te}$	$T_P = C.^{te}$	Secção	$\dot{q}_P = C.^{te}$	$T_P = C.^{te}$
	4,36	3,66	a, b; $\frac{b}{a} = 2$	4,12	3,39
	4,02	3,34	a, b; $\frac{b}{a} = 3$	5,33	4,44
 60°, a, b; $\frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$	3,11	2,47	a, b; $\frac{b}{a} = 4$	4,79	3,96
a, b; $\frac{b}{a} = 1$	3,61	2,98	a, b; $\frac{b}{a} = 8$	6,49	5,60
a, b; $\frac{b}{a} = 1{,}43$	3,73	3,08	$\frac{b}{a} = \infty$	8,23	7,54

O Número de Nusselt (Nu):

Correlações para escoamentos interiores turbulentos, na zona desenvolvida:

Para ambos os casos (fluxo de calor ou temperatura constante):

$$\mathbf{Nu_D = 0{,}023\ Re_{D_H}^{0{,}8}\ Pr^{n}} \qquad \begin{cases} 0{,}7 < Pr < 160 \\ Re_D \geq 10^4 \\ L/Di \geq 10 \end{cases} \qquad (2.23)$$

onde **n = 0,4** no aquecimento e **n = 0,3** no arrefecimento. Para os escoamentos onde ocorrem variações sensíveis das propriedades fluidos, deve usar-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{Nu_D = 0{,}027\ Re_{D_H}^{0{,}8}\ Pr^{1/3} \left(\frac{\mu_m}{\mu_P}\right)^{0{,}14}} \qquad \begin{cases} 0{,}7 < Pr < 16700 \\ Re_D \geq 10^4 \\ L/Di \geq 10 \end{cases} \qquad (2.24)$$

onde μ_m e μ_P são as viscosidades dinâmicas do fluido (kg/s.m) lidas para as temperaturas média e superficial, respectivamente.

Para a zona de entrada de escoamentos interiores turbulentos:

$$\mathbf{Nu_D = 0{,}036\ Re_{D_H}^{0{,}8}\ Pr^{1/3} \left(\frac{D}{L}\right)^{0{,}055}} \qquad \left\{ 10 < L/D < 400 \right. \qquad (2.25)$$

O Número de Peclet (Pe):

O Número de Peclet (Pe) pode ser interpretado como sendo o Re para a transferência de energia térmica, ou seja, é a relação entre o fluxo advectivo da energia térmica na direção (x) e o fluxo de energia por difusão na mesma direção.

$$Pe = \frac{u_\infty L}{\alpha} = Pe_L^u = \mathrm{Re}_L^u \,\mathrm{Pr}$$

Para Pr >> 1:

$$Pe \approx \mathrm{Re}_L^u \,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}}$$

<u>O Número de Mach (Ma)</u>:

Considerando-se um escoamento compressível (gás):

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla \vec{p}$$

Sendo a viscosidade desprezível, a conversão irreversível de energia mecânica em energia interna e portanto desprezível, e se o fluido possui baixa condutividade térmica, o escoamento e aproximadamente isoentrópico de maneira que a equação de estado $p = p(\rho, T)$ pode ser aproximada por $p = p(\rho)|_s$.

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \nabla \rho$$

Assim, temos que:

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \nabla \rho$$

O Número de Froude (Fr):

No caso de existir um campo gravitacional $\vec{g}$ no escoamento, forcas gravitacionais serão também exercidas sobre o fluido, e o escoamento será determinado pela magnitude global relativa das forcas inerciais, viscosas, e gravitacionais. Ex: escoamentos onde há superfície livre (canais, ondas, etc.).

São necessários dois grupos adimensionais para se determinar o escoamento, sendo um deles o *Re*, o outro pode representar tanto a razão entre as magnitudes globais das *forças inerciais* e das *forças gravitacionais*, como a razão entre as magnitudes globais das *forças viscosas* e as *forças gravitacionais*.

Adimensionalizando-se a equação do momento, modificada de maneira a se introduzir os efeitos do campo gravitacional $\vec{g}$:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla \vec{p} - \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{g}$$

Que em termos de variáveis adimensionais, fica:

$$\rho U \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho U \nabla \vec{p} + \frac{\mu}{L \nabla^2 \vec{u}} + \frac{\rho L}{U \vec{g}}$$

Assim, outro grupo adimensional, quando um deles é *Re*:

$$\frac{gL}{U^2} \quad \Rightarrow \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$$

DIMENSIONLESS NUMBERS OF FLUID MECHANICS[12]

Name(s)	Symbol	Definition	Significance
Alfvén, Kármán	Al, Ka	V_A/V	*(Magnetic force/ inertial force)$^{1/2}$
Bond	Bd	$(\rho' - \rho)L^2 g/\Sigma$	Gravitational force/ surface tension
Boussinesq	B	$V/(2gR)^{1/2}$	(Inertial force/ gravitational force)$^{1/2}$
Brinkman	Br	$\mu V^2/k\Delta T$	Viscous heat/conducted heat
Capillary	Cp	$\mu V/\Sigma$	Viscous force/surface tension
Carnot	Ca	$(T_2 - T_1)/T_2$	Theoretical Carnot cycle efficiency
Cauchy, Hooke	Cy, Hk	$\rho V^2/\Gamma = \mathrm{M}^2$	Inertial force/ compressibility force
Chandra-sekhar	Ch	$B^2 L^2/\rho\nu\eta$	Magnetic force/dissipative forces
Clausius	Cl	$LV^3\rho/k\Delta T$	Kinetic energy flow rate/heat conduction rate
Cowling	C	$(V_A/V)^2 = \mathrm{Al}^2$	Magnetic force/inertial force
Crispation	Cr	$\mu\kappa/\Sigma L$	Effect of diffusion/effect of surface tension
Dean	D	$D^{3/2}V/\nu(2r)^{1/2}$	Transverse flow due to curvature/longitudinal flow
[Drag coefficient]	C_D	$(\rho' - \rho)Lg/\rho' V^2$	Drag force/inertial force
Eckert	E	$V^2/c_p\Delta T$	Kinetic energy/change in thermal energy
Ekman	Ek	$(\nu/2\Omega L^2)^{1/2} = (\mathrm{Ro}/\mathrm{Re})^{1/2}$	(Viscous force/Coriolis force)$^{1/2}$
Euler	Eu	$\Delta p/\rho V^2$	Pressure drop due to friction/ dynamic pressure
Froude	Fr	$V/(gL)^{1/2}$ V/NL	†(Inertial force/gravitational or buoyancy force)$^{1/2}$
Gay–Lussac	Ga	$1/\beta\Delta T$	Inverse of relative change in volume during heating
Grashof	Gr	$gL^3\beta\Delta T/\nu^2$	Buoyancy force/viscous force
[Hall coefficient]	C_H	λ/r_L	Gyrofrequency/ collision frequency

*(†) Also defined as the inverse (square) of the quantity shown.

Name(s)	Symbol	Definition	Significance
Hartmann	H	$BL/(\mu\eta)^{1/2} = (\mathrm{Rm\,Re\,C})^{1/2}$	(Magnetic force/dissipative force)$^{1/2}$
Knudsen	Kn	λ/L	Hydrodynamic time/collision time
Lewis	Le	$\kappa/\mathcal{D}$	*Thermal conduction/molecular diffusion
Lorentz	Lo	V/c	Magnitude of relativistic effects
Lundquist	Lu	$\mu_0 L V_A/\eta = \mathrm{Al\,Rm}$	$\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ force/resistive magnetic diffusion force
Mach	M	V/C_S	Magnitude of compressibility effects
Magnetic Mach	Mm	$V/V_A = \mathrm{Al}^{-1}$	(Inertial force/magnetic force)$^{1/2}$
Magnetic Reynolds	Rm	$\mu_0 L V/\eta$	Flow velocity/magnetic diffusion velocity
Newton	Nt	$F/\rho L^2 V^2$	Imposed force/inertial force
Nusselt	N	$\alpha L/k$	Total heat transfer/thermal conduction
Péclet	Pe	LV/κ	Heat convection/heat conduction
Poisseuille	Po	$D^2\Delta p/\mu L V$	Pressure force/viscous force
Prandtl	Pr	ν/κ	Momentum diffusion/heat diffusion
Rayleigh	Ra	$gH^3\beta\Delta T/\nu\kappa$	Buoyancy force/diffusion force
Reynolds	Re	LV/ν	Inertial force/viscous force
Richardson	Ri	$(NH/\Delta V)^2$	Buoyancy effects/vertical shear effects
Rossby	Ro	$V/2\Omega L\sin\Lambda$	Inertial force/Coriolis force
Schmidt	Sc	$\nu/\mathcal{D}$	Momentum diffusion/molecular diffusion
Stanton	St	$\alpha/\rho c_p V$	Thermal conduction loss/heat capacity
Stefan	Sf	$\sigma L T^3/k$	Radiated heat/conducted heat
Stokes	S	$\nu/L^2 f$	Viscous damping rate/vibration frequency
Strouhal	Sr	fL/V	Vibration speed/flow velocity
Taylor	Ta	$(2\Omega L^2/\nu)^2$	Centrifugal force/viscous force
		$R^{1/2}(\Delta R)^{3/2}\cdot(\Omega/\nu)$	(Centrifugal force/viscous force)$^{1/2}$
Thring, Boltzmann	Th, Bo	$\rho c_p V/\epsilon\sigma T^3$	Convective heat transport/radiative heat transport
Weber	W	$\rho L V^2/\Sigma$	Inertial force/surface tension

Nomenclature:

B	Magnetic induction
C_s, c	Speeds of sound, light
c_p	Specific heat at constant pressure (units $\mathrm{m^2\,s^{-2}\,K^{-1}}$)
$D = 2R$	Pipe diameter
F	Imposed force
f	Vibration frequency
g	Gravitational acceleration
H, L	Vertical, horizontal length scales
$k = \rho c_p \kappa$	Thermal conductivity (units $\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}$)
$N = (g/H)^{1/2}$	Brunt–Väisälä frequency
R	Radius of pipe or channel
r	Radius of curvature of pipe or channel
r_L	Larmor radius
T	Temperature
V	Characteristic flow velocity
$V_A = B/(\mu_0\rho)^{1/2}$	Alfvén speed
α	Newton's-law heat coefficient, $k\dfrac{\partial T}{\partial x} = \alpha\Delta T$
β	Volumetric expansion coefficient, $dV/V = \beta dT$
Γ	Bulk modulus (units $\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}$)
$\Delta R, \Delta V, \Delta p, \Delta T$	Imposed differences in two radii, velocities, pressures, or temperatures
ϵ	Surface emissivity
η	Electrical resistivity
$\kappa, \mathcal{D}$	Thermal, molecular diffusivities (units $\mathrm{m^2\,s^{-1}}$)
Λ	Latitude of point on earth's surface
λ	Collisional mean free path
$\mu = \rho\nu$	Viscosity
μ_0	Permeability of free space
ν	Kinematic viscosity (units $\mathrm{m^2\,s^{-1}}$)
ρ	Mass density of fluid medium
ρ'	Mass density of bubble, droplet, or moving object
Σ	Surface tension (units $\mathrm{kg\,s^{-2}}$)
σ	Stefan–Boltzmann constant
Ω	Solid-body rotational angular velocity

Equações de Conservação para o Regime Turbulento

O regime turbulento de escoamento é desejável devido ao aumento do coeficiente de película “h”, como já foi visto.

- Equações de cons. não fechadas, correlações empíricas são necessárias:

➡ MODELOS DE TURBULÊNCIA:

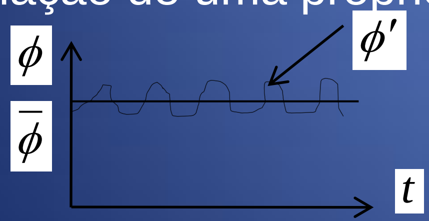
- Modelo de Boussinesq
- Modelo de Prandtl

zero equações

- Modelo *K* - *E*

duas equações

Variação de uma propriedade : (U,V,T,P,...)



$$\phi = \bar{\phi} + \phi'$$

Em um intervalo de tempo suficientemente grande $\longrightarrow$ $\overline{\phi'} = 0$

$\overline{\phi}$ é definido em função do tempo em um ponto fixo no espaço

$$\overline{\phi} = \frac{1}{\Delta t}\int_{to}^{to+\Delta t} \phi(t)dt$$

A integral deve ser efetuada num intervalo Δt de modo que $\overline{\phi}$ seja independente do tempo.

Devido à alta freqüência do componente turbulento (ϕ'), um intervalo de alguns segundos é suficiente.

$$\overline{\phi}' = \frac{1}{\Delta t}\int_{to}^{to+\Delta t} \phi' dt = 0$$

$$\overline{u'} = 0; \quad \overline{v'} = 0; \quad \overline{p'} = 0 \quad (\overline{\rho v})' = 0$$

Mas $\overline{u'}^2 \overline{u', v'}$, são diferentes de zero

$$\overline{u}^2 \neq 0 \qquad \overline{v'}^2 \neq 0$$

$$\overline{u'v'} \neq 0$$

Consideremos um escoamento bi-dimensional e incompressível $(\rho = cte)$

Equação de conservação da massa.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u = \bar{u} + u'; \quad v = \bar{v} + v'$$

$$\frac{\partial\left(\bar{u} + u'\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(v' + \bar{v}\right)}{\partial y} = 0 (*)$$

Tomando a média de $(*)$ num intervalo de tempo Δt

$$\frac{\overline{\partial \bar{u}}}{\partial x} + \underbrace{\frac{\overline{\partial u'}}{\partial x}}_{=0} + \frac{\overline{\partial \bar{v}}}{\partial y} + \underbrace{\frac{\overline{\partial v'}}{\partial y}}_{=0} = 0$$

$\longrightarrow$ Para intervalo suficientemente grande

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} = 0$$

Equação idêntica à do regime laminar.

Equação da conservação da quantidade de movimento em X.

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Escrevendo a equação na forma conservativa:

$$\frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u = \overline{u} + u'; \quad v = \overline{v} + v'; \quad p = \overline{p} + p'$$

$$\frac{\partial \rho \left(\overline{u} + u'\right)\left(\overline{u} + u'\right)}{\partial x} + \frac{\partial \rho \left(\overline{u} + u'\right)\left(\overline{v} + v'\right)}{\partial y} =$$
$$= -\frac{\partial \left(\overline{p} + p'\right)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \left(\overline{u} + u'\right)}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \rho \overline{u + u'}}{\partial x} + 2\frac{\partial \rho \overline{u + u'}}{\partial x} = \frac{\partial \rho u' u'}{\partial x} + \frac{\partial \rho \overline{u}\,\overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho u' \overline{v}}{\partial y} +$$
$$+ \frac{\partial \rho \overline{u V'}}{\partial y} + \frac{\partial \rho u' V'}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial y^2}\right)$$

Tomando a média temporal da equação num intervalo de tempo:

$$
\frac{\partial \rho \overline{\bar{u}\bar{u}}}{\partial x} + 2\frac{\partial \rho \overline{\bar{u} + u'}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \overline{\bar{u}\bar{v}}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \overline{\bar{U}\bar{V}}}{\partial y} +
$$

$$
+ \frac{\partial \rho \overline{U'\bar{V}}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \overline{\bar{u}V'}}{\partial y} + \overline{\frac{\partial \rho u'v'}{\partial y}} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial y} +
$$

$$
+ \mu \left(\frac{\partial^2 \overline{\bar{u}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{u'}}{\partial y^2} \right)
$$

$$
\frac{\partial \rho \bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \overline{u'v'}}{\partial y} =
$$

$$
= -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}
$$

Reescrevendo a equação na forma não-conservativa:

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}$$

Regime laminar:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

<u>Escoamento laminar</u> $\tau_{yx} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}$

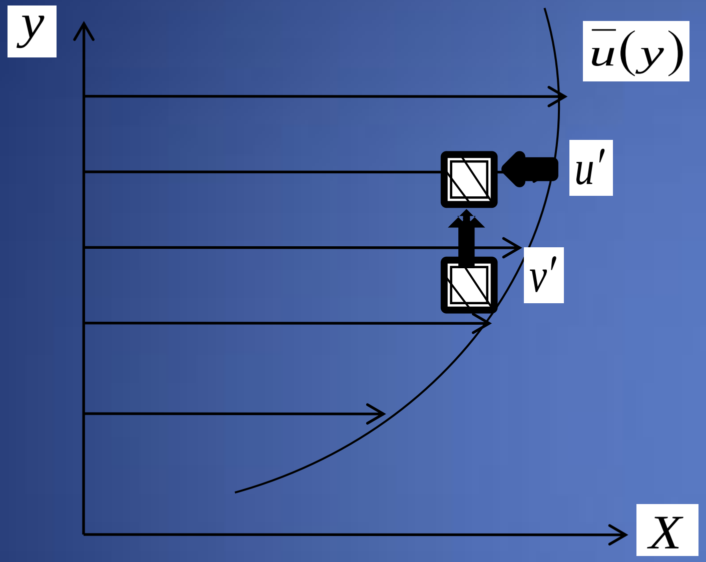
Representa um mecanismo de transporte de Q.M. por difusão molecular.

<u>Escoamento turbulento</u> $\longrightarrow$ transporte por Q.M. por difusão molecular + difusão turbulenta $\left(\rho \overline{u'v'}\right)$ devido às flutuações das componentes de velocidade.

$$\tau_{yx}{}^{t} = \overline{u'v'} < 0$$

Considere um escoamento onde:

$$\overline{u} = \overline{u}(y), \overline{v} = \overline{w} = 0$$ e $$\partial\overline{u}/\partial y > 0$$



$$v'\rangle 0 \rightarrow = U'\langle 0$$

$$\tau^{t}_{\;yx} = \rho\overline{u'v'} < 0$$

$$\tau_{\;yx} = -\underbrace{\mu}_{>0} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{>0} < 0$$

Portanto, se o transporte de Q.M. aumenta (os termos se somam na eq.)

Equação da conservação de energia.

$$\rho Cp\left[\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

Substituindo:
$$T=\overline{T}+T'$$
$$u=\overline{u}+u'$$
$$v=\overline{v}+v'$$

e tomando-se a média temporal temos:

$$\rho Cp\left[\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial \overline{T}}{\partial y}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \overline{T}}{\partial y}-\rho Cp\overline{v't'}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \overline{T}}{\partial x}-\rho Cp\overline{u'\mathrm{T}'}\right)$$

$\dfrac{\partial\left(-\rho Cp\overline{v'\mathrm{T}'}\right)}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial\left(-\rho Cp\overline{u'\mathrm{T}'}\right)}{\partial x}$ representam

um mecânismo de transporte de calor por difusão turbulenta.

Pode-se mostrar que o mecanismo de difusão turbulenta promove a transferência de calor.

Modelo matemático para as tensões de Reynolds

As várias correlações existentes procuram relacionar as tensões turbulentas com gradientes de velocidade média.

MODELO DE BOUSSINESQ:

$$\tau^{t}_{yx} = +\rho\overline{u'v'} = -\rho\varepsilon_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

difusividade turbulenta de Q.M.

ε_M tem as mesmas dimensões de uma viscosidade cinemática (ν)

logo
$$\rho\varepsilon_M = \mu^t \Rightarrow \tau^{t}_{yx} = -\mu^t \frac{\partial u}{\partial y}$$

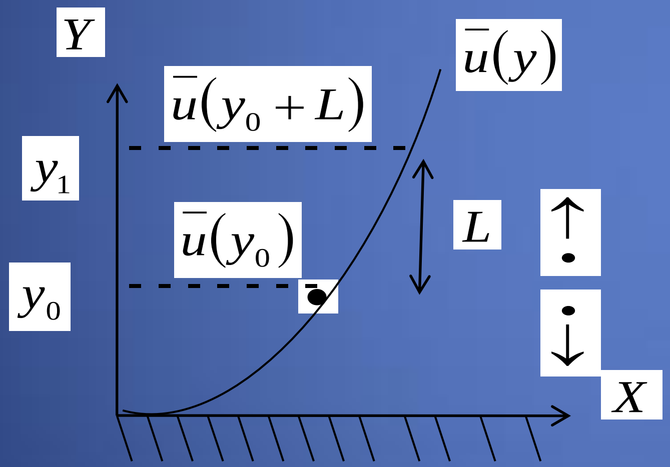
$$\rho\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \rho\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial X} + \mu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \rho\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}$$

$$\rho\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \mu^t\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$$

ε_M depende das condições locais de escoamento do fluido e ν é propriedade do fluido .

No modelo de Boussinesq substitui-se uma grandeza desconhecida $\overline{u'v'}$ por outra também desconhecida mas que se presta melhor para resultados experimentais.

MODELO DE PRANDTL



Em uma escala macroscópica o escoamento turbulento pode ser idealizado pode ser idealizado por pequenos “pacotes” de fluido trafegando transversalmente.
Este “pacote” trafega uma distancia “*L*” até perder a sua identidade.
L é a distancia de difusão turbulenta ou “MIXING LENGTH”.

O “pacote” trafegando de y_0 para y_1 mantém as suas características. Portanto a velocidade deste “pacote” na nova lâmina de fluido é menor:

$$\bar{u}(y+L)-\bar{u}(y)=\Delta\bar{u}=L\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)y$$ (por série de Taylor)

L é uma distancia na direção transversal percorrida pelo “pacote” de fluido de modo que seja igual a flutuação da velocidade nesta mesma direção na nova lâmina: $\Delta\bar{u}=u'_{y+L}$

$$\bar{u}=L\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)y$$

v' é da mesma ordem de magnitude:

$$v'=L\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)y$$

As tensões de Reynolds são calculados por

$$\tau^t_{yx}=-\rho\overline{u'v'}=-\rho L^2\overline{\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}}$$

Supondo que $\overline{ab}=c\bar{a}.\bar{b}\Rightarrow$

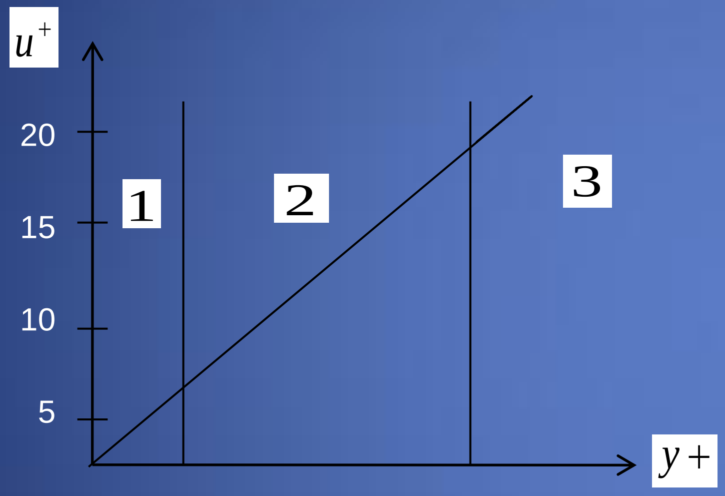
$$\tau^t_{yx}=-c\rho L^2\overline{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}}$$

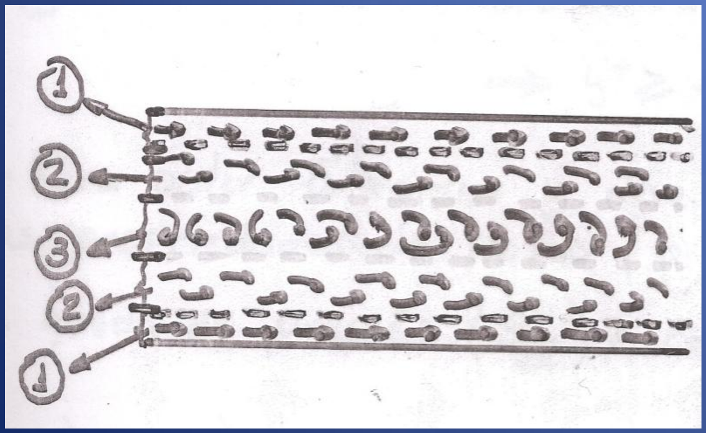
$$L^2_M$$

$$\tau^t_{yx}=-L^2{}_m\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\left|\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right|$$

Perfil universal de velocidade

Recentemente tem se tornado freqüente a representação do perfil de velocidade turbulento num gráfico semi-log. Para escoamento isotérmico, plenamente desenvolvido num tubo de seção circular





1 – camada laminar $\rightarrow$ tensões viscosas predominam

$$\mu \rangle\rangle \rho \tau_M$$

2 – camada de transição $\rightarrow$ tensões viscosas e turbulentas são de mesma grandeza.

$$\mu = \rho \tau_M$$

3 – núcleo turbulento $\rightarrow \mu \langle\langle \rho \tau_M$

Von Kármán propôs um perfil universal de velocidade usando:

$$\begin{cases} u^+ = \bar{u}\left(\dfrac{\rho}{\tau_w}\right)^{1/2} \\ y^+ = \dfrac{y}{\nu}\left(\dfrac{\bar{\tau}_w}{\rho}\right)^{1/2} \end{cases}$$

1 – camada laminar $\rightarrow u^+ = y^+ \Rightarrow 0 \leq y^+ \leq 5$

2 – camada de transição $\rightarrow u^+ = 5.0 \ell n(y^+) - 3.05$ $\rightarrow 5 \leq y+ \leq 30$

3 – núcleo turbulento $\rightarrow u^+ = 2.5 \ell n(y^+) - 5.5$ $\rightarrow y+ \geq 30$

OBSERVE QUE:

$$y^{+} = \frac{y}{g}\left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2} = \mathrm{Re}$$

$$\frac{[\tau]}{[\rho]} = \frac{[F]/[A]}{[\rho]} = \frac{[kgm][m^3]}{[s^2][m^2][k_g]} = \frac{[m^2]}{[s^2]} = [V]^2$$

Então: $y^{+} = \frac{y}{\nu} \cdot V = \frac{\rho y v}{\mu}\mathrm{Re}$

<u>Perfil de temperatura em escoamento turbulento – resultado de Reynolds</u>

Considere um escoamento incompressível, estacionário, turbulento e plenamente desenvolvido em um duto de seção circular:

$$\frac{\partial \overline{\mathrm{P}}}{\partial X} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \overline{V}x}{\partial x} - \frac{\rho}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV'rV'r)\right)$$

$$\rho Cp\overline{V}x\frac{\partial \overline{T}}{\partial X} = \frac{K}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \overline{T}}{\partial r}\right) - \frac{\rho Cp}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{v^{\mathrm{I}}{}_{r}T^{\mathrm{I}}}\right)$$

Vamos introduzir o conceito de difusividade turbulenta na equação de Q.M.

$$\left.V\,\overline{r'Vx'} = -\tau_M \frac{\partial \overline{V}_X}{\partial y}\right\} V\,\overline{r'Vx'} = -\tau_M \frac{\partial \overline{V}x}{\partial r}$$

Fazendo $y = r$

Analogicamente pode-se introduzir o conceito de difusividade turbulenta de calor:

$$\overline{V'rT'} = -\xi_H \frac{\partial \overline{T}}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{v'rT'}\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(V\xi_H \frac{\partial \overline{T}}{\partial r}\right)$$

$$\rho C p \overline{V}_X \frac{\partial \overline{T}}{\partial X} = \frac{K}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \overline{T}}{\partial r}\right) + \frac{\rho C p}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\xi_H \frac{\partial \overline{T}}{\partial r}\right)$$

$$\overline{Vx}\frac{\partial \overline{T}}{\partial X} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r(\alpha + \xi_H)\frac{\partial T}{\partial r}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\alpha = \frac{K}{\rho C p}$$

Resumindo:

Equações de conservação para o regime turbulento (2D incompressível)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial X} + \dfrac{\partial \overline{V}}{\partial y} = 0 \\ \rho \overline{u} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial X} + \rho \overline{V} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial y} = -\dfrac{\partial \overline{\mathrm{P}}}{\partial X} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\left(\mu \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right) + \left(\mu_t \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)\right] \\ \rho Cp\left(\overline{u} \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial X} + \overline{V} \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\left(K \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial y}\right) + \left(K_t \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial y}\right)\right] \end{cases}$$

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu eff \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)$$

$$K_{eff} = K + K_t \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(Keff \frac{\partial \overline{T}}{\partial y}\right)$$

Equação de balanço de energia para regime turbulento.

$$\overline{V}_X \frac{\partial \overline{T}}{\partial X} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r(\alpha + \xi_N)\frac{\partial \overline{T}}{\partial r} \right)$$

$$\alpha = {k}/{\rho Cp}$$

❖Resta determinar o valor de ξ_N

Definição do número de Prandtl turbulento

$$\Pr_t = \frac{\xi_N}{\xi_H} \therefore \xi_H \Pr_t = \xi_N$$

Considerando gases ou água e escoamento turbulento plenamente desenv. Temos:

$$\Pr_t = 1 \rightarrow \xi_H = \xi_N$$

Este resultado é conhecido como ANALOGIA DE REYNOLDS.

Os perfis de velocidade e temperatura são similares.

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial r} = \frac{\partial V_X}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\overline{T} - T_W}{\overline{\overline{T}} f - T_W}\right)_{r=R} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\overline{V}_X}{\overline{\overline{V}} t}\right)_{r=R} h = \frac{q_r}{T_W - \overline{T}_f}\Bigg)_{r=R}$$

$$\begin{cases} qr = -k_{ef} \dfrac{\partial T}{\partial r} \\ \Pr = \dfrac{Cp\mu}{K} \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} k_{ef} = k + k_t \\ k = \dfrac{Cp\rho\nu}{\Pr} \end{array}$$

$$h = -\left[\frac{\nu}{\Pr} + \frac{\xi_N}{\Pr_t}\right]\left(\frac{\rho Cp}{T_W - \overline{T}_f}\right)\left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial r}\right)_{r=R}$$

Fator de atrito

Em inúmeras aplicações deseja-se conhecer a queda de pressão para uma dada vazão.

Para escoamentos turbulentos isto poderia ser respondido usando-se τ_M ou L (comprimento de difusão turbulenta).

Na prática utiliza-se o conceito de "fator de atrito"

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\bar{u}\right)+\nabla\cdot\left(\rho\bar{u}\bar{u}\right)=-\nabla\bar{\mathrm{P}}+\mu\nabla\cdot\left(\rho\nabla\bar{u}\right)-\nabla\cdot\left(\rho\overline{u'}\,\overline{u'}\right)+\rho g$$

$(\nabla \mathrm{P})$ Acel. Temp. $(\nabla \mathrm{P})$ Acel. Esp.

$$\nabla\bar{\mathrm{P}}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\bar{u}\right)-\nabla\left(\rho\bar{u}\bar{u}\right)+\mu\nabla\cdot\left(\rho\nabla\bar{u}\right)-\underbrace{\nabla\cdot\left(\rho\overline{u'}\,\overline{u'}\right)}+\underbrace{\rho g}$$

$(\nabla \mathrm{P})$ atrito $(\nabla \mathrm{P})$ gravidade

$$\left(\nabla\bar{\mathrm{P}}\right)_{total}=\left(\nabla\mathrm{P}\right)_{ac.temp}+\left(\nabla\mathrm{P}\right)_{ac.esp.}+\left(\nabla\mathrm{P}\right)_{atrito}+\left(\nabla\mathrm{P}\right)_{grav}$$

Para escoamento unidimensional, plenamente desenvolvido, regime permanente em um duto horizontal:

$$(\nabla P)_{total} \approx (\nabla P)_{atrito}.$$

Termo de atrito pode ser medido experimentalmente.

Para o calculo de (∇P) atrito usa-se o conceito de fator de atrito (f) definido por:

$$(\nabla P)_{atrito} = -f\,\frac{\rho \overline{V}^2}{2Dh}$$

Onde f.... fator de atrito de Moody

Para o regime laminar vimos que:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{8\mu \overline{V}_Z}{R^2} \ (exercício \ anterior)$$

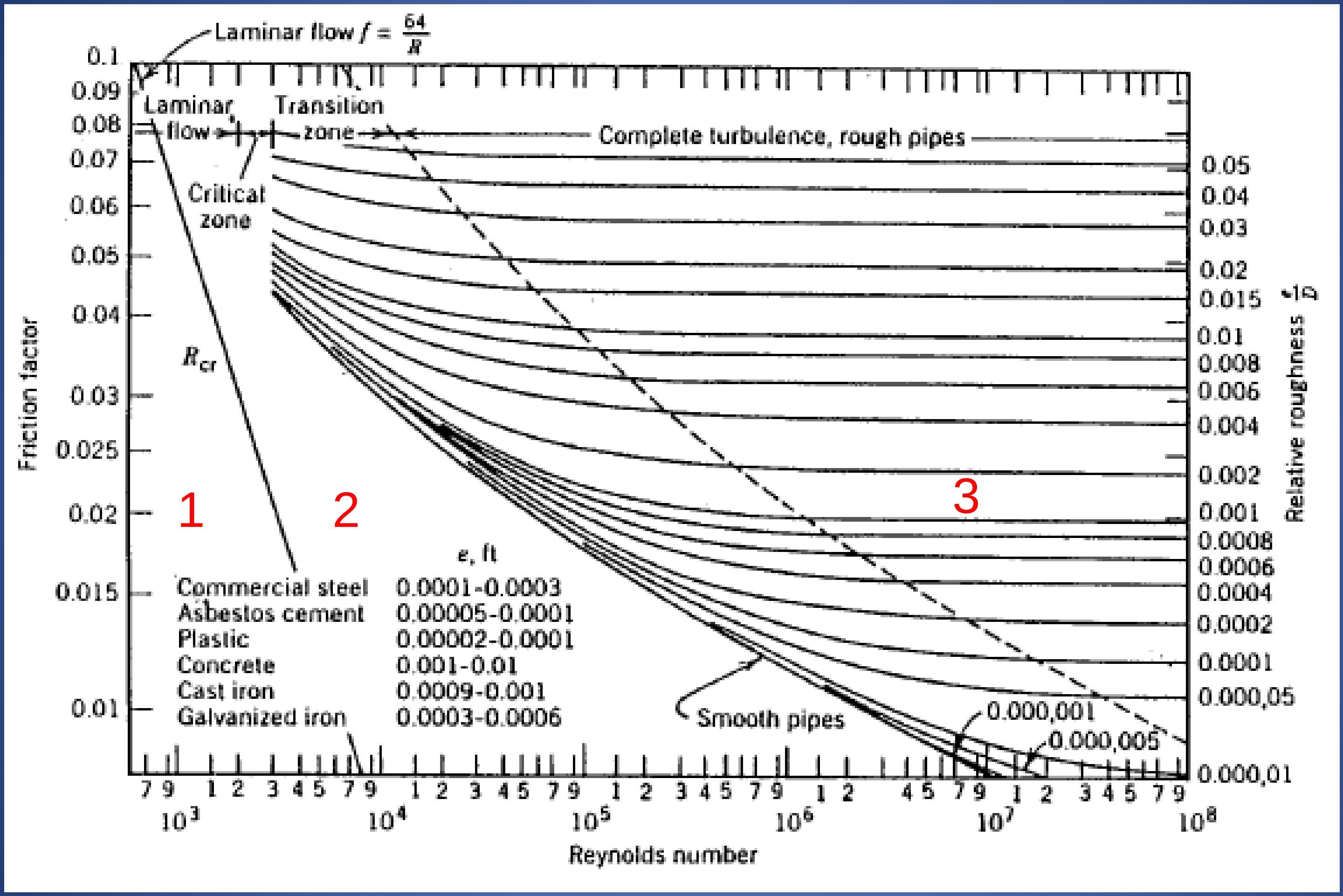
$$-\frac{8\mu \overline{V}_Z}{R^2} = -f\,\frac{\rho \overline{V}_Z^2}{2D_h}$$

$$\underbrace{\frac{8\mu}{R^2}}_{\frac{D_h^2}{4}}\,\frac{2D_h}{\rho \overline{V}_Z} = f \longrightarrow$$

$$f = \frac{64\mu}{\rho \overline{V}_Z D_h} \Rightarrow f = \frac{64}{\text{Re}}$$

Para Canais não circulares D_h = (4 x área) / (perímetro molhado).

Uma compilação de várias formulações empíricas para o calculo de (∇P) atrito resultou no diagrama de Moody.



1 – regime laminar

2 - zona intermediária ou de transição

3 – regime completamente turbulento

O aquecimento do fluido provoca variações no valor de f Sieder e Tate sugerem:

$$\frac{f}{fiso} = \left(\frac{\mu}{\mu w}\right)^{0.14}$$

$\uparrow isotérmicos$

μw ...viscosidade junto a parede

μ ...viscosidade média do fluido

O fator de atrito é obtido experimentalmente medindo-se (∇P) atrito e a velocidade média u (onde u é a vazão dividida pela área de escoamento):

$$(\nabla P)_{atrito\_medido} = -\frac{fL\overline{V}^2_{med}}{2D_h}$$

Formulações empíricas propostas a partir de resultados experimentais:

BLASIUS $\rightarrow f = 0,316\,\mathrm{Re}^{-0.25}$

Lei Geral $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0\log_{10}\left(\mathrm{Re}\sqrt{f}\right)^{-0,8}$

Equação transcedental deve ser resolvida iterativamente.

A Lei Geral é consistente com o perfil universal de velocidade.

Coeficiente de transferência de calor em regime turbulento

$$Pr = \frac{Cp\mu}{k}$$

1 – fluidos com alto Pr (gases, água)

2 – fluidos com baixo Pr (metais líquidos)

1 – Fluidos com alto $Pr\left(\mathrm{Pr} \simeq 1\right)$

A maior resistência ao transporte de calor reside na camada laminar.

$\longrightarrow$ Dittus – Boelter: $$Nu = \frac{hD_h}{k} = 0.023\,\mathrm{Re}^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{0.4}$$

$\longrightarrow$ Seider – Tate: $$Nu = \frac{hD_h}{k} = 0.023\,\mathrm{Re}^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{0.4}\left(\frac{\mu_\infty}{\mu_w}\right)^{0.14}$$

Para casos de grande queda de temperatura na camada laminar.

2 – Para fluidos com baixo $Pr\left(\Pr\langle\langle 1\right)$

A resistência ao transporte de calor estende-se até o núcleo turbulento.

$$Pe = \mathrm{Re}.\Pr = \frac{\rho VD}{\mu}.\frac{Cp\mu}{k} = \frac{\rho VCpD}{k}$$

$$Nu = C_3 + C_4 Pe^n$$

Onde $n = 0,8$

Tubos com fluxo de calor constante na parede:

$C_3 = 7 \quad ; C_4 = 0,025$ $\longrightarrow$ $Nu = 7 + 0,025\, Pe^{0,8}$

Tubos com temperatura constante na parede:

$C_3 = 5 \quad ; C_4 = 0,025$ $\longrightarrow$ $Nu = 5 + 0,025\, Pe^{0,8}$

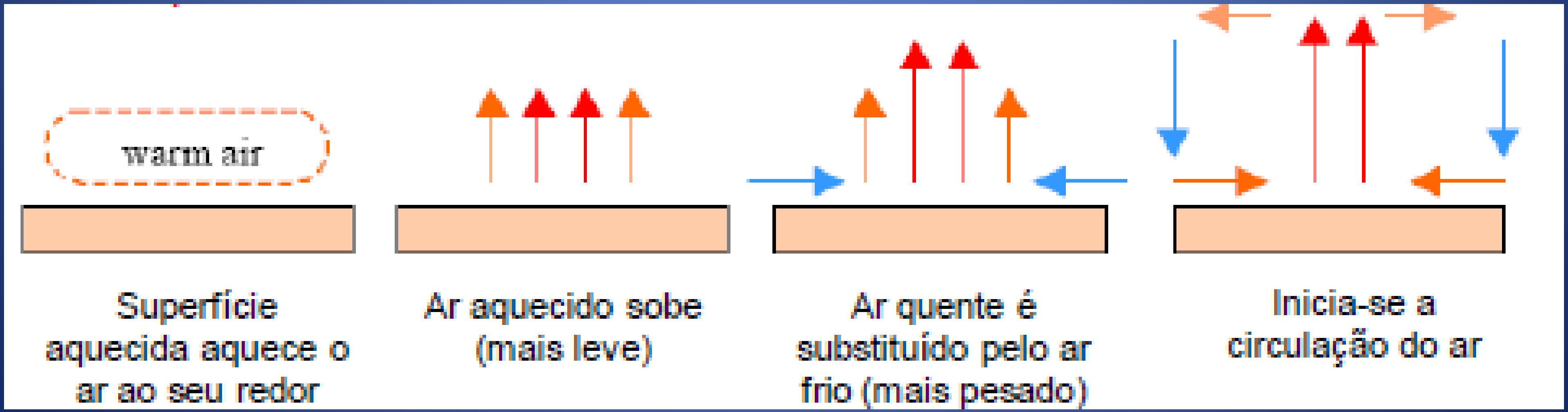
Transferência de Calor por Convecção Natural

O movimento do fluido é ocasionado pela presença combinada de um gradiente de densidade do fluido e uma força de corpo que é proporcional à densidade.

Força de corpo: normalmente é uma força gravitacional.

Gradiente de densidade: ocorre em função de um gradiente de temperatura. O efeito líquido á o aparecimento da força de empuxo.

Exemplo:

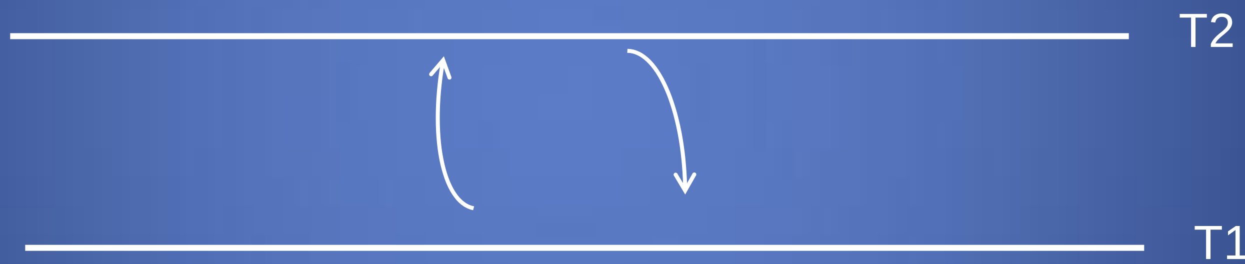


Transferência de Calor por Convecção Natural

A presença de um gradiente de densidade em um campo gravitacional não garante a existência de correntes de convecção.

Ex.: Fluido confinado entre placas extensas:

Situação 1: T1 > T2 Circulação do fluido instável, T.C. por convecção



Situação 2: T2 > T1   Estagnação do fluido, T. C. por condução

Transferência de Calor por Convecção Natural

Importância desse tipo de escoamento: em diversos sistemas onde ocorre a transferência de calor, a convecção natural oferece maior resistência à transferência de calor, desempenhando um importante papel no desempenho final do sistema.

Exemplos:

- Dissipadores de calor por convecção natural (componentes eletrônicos);
- Condensadores que operam com convecção natural;
- Sistemas de refrigeração de reatores nucleares (nova geração).

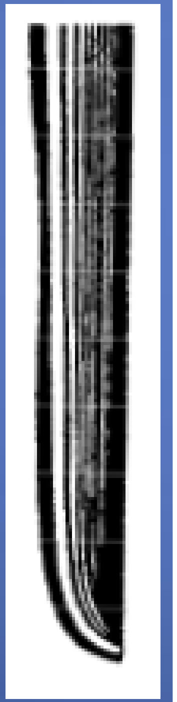
Transferência de Calor por Convecção Natural

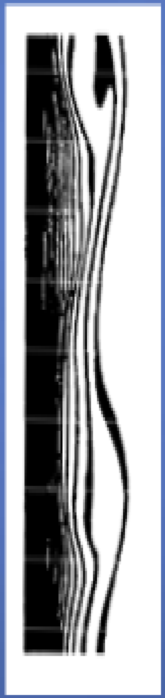
Escoamento laminar ou turbulento?

Escoamento laminar

Escoamento laminar é ordenado e segue uma teoria conhecida, sendo previsível.

Resultados precisos podem ser obtidos numericamente.





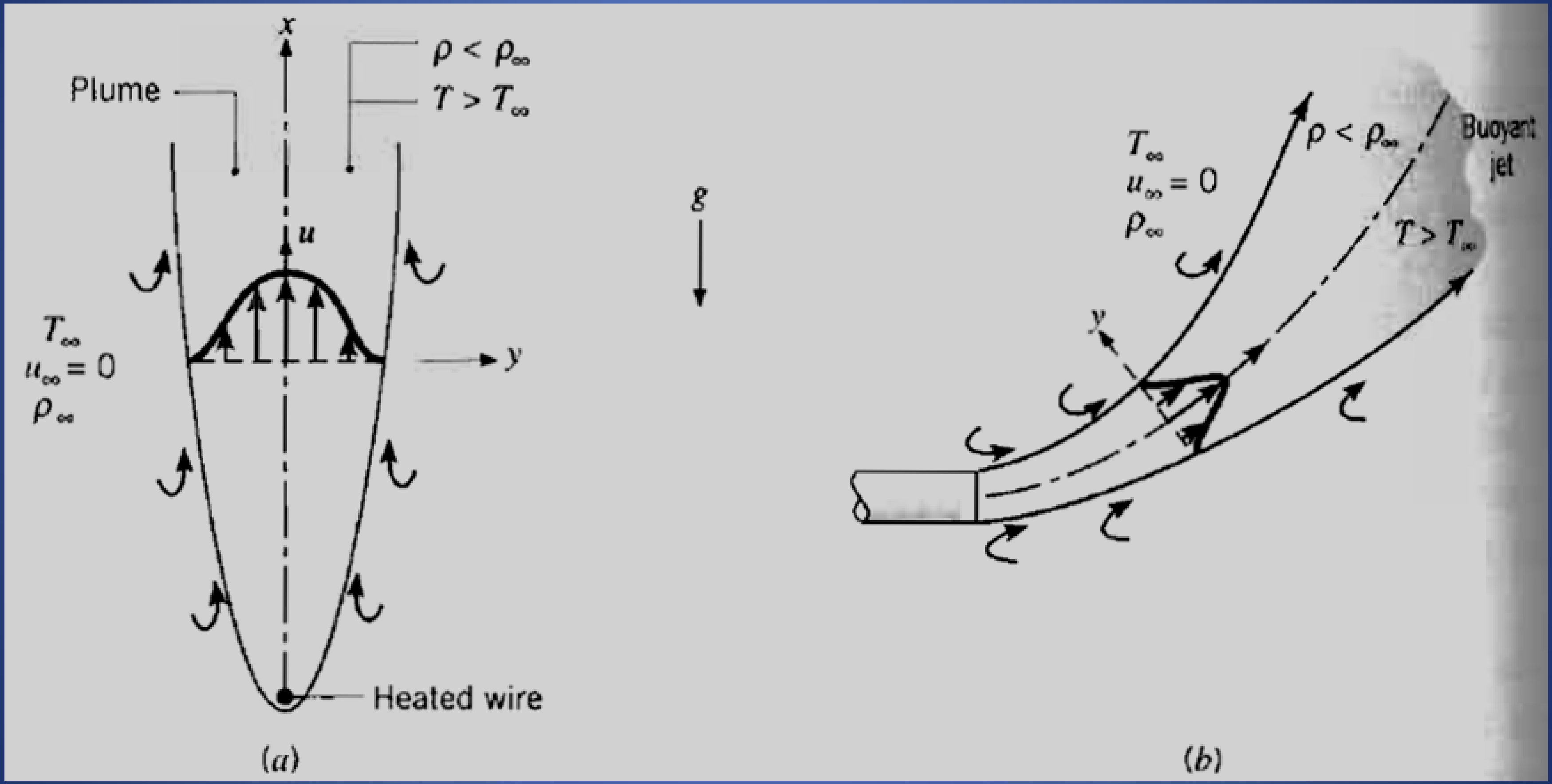
Escoamento turbulento

Escoamento turbulento é caótico e não segue uma teoria conhecida, sendo imprevisível.

Resultados mais precisos podem ser obtidos aplicando-se os efeitos da turbulência no atrito e na transferência de calor.

Transferência de Calor por Convecção Natural

Considerações Físicas



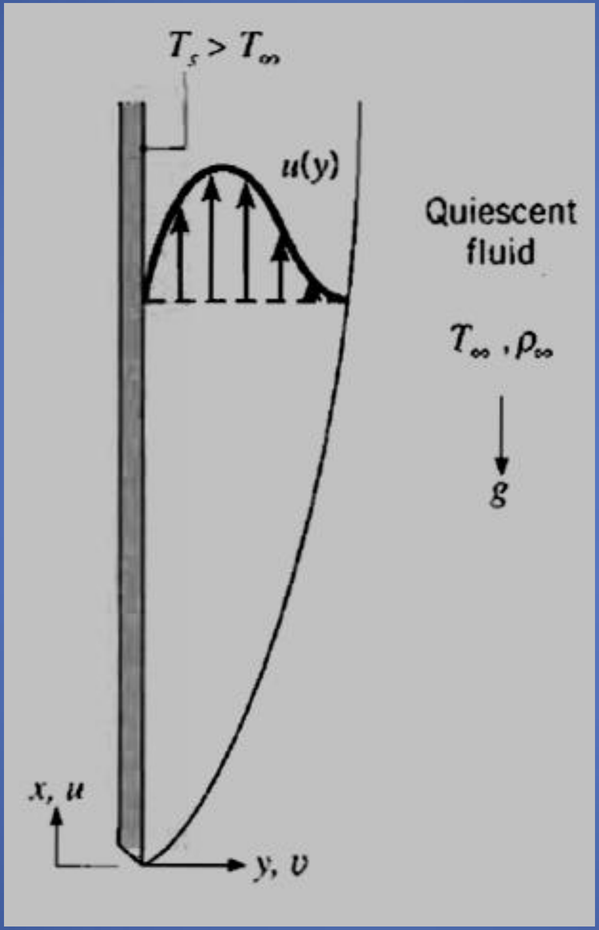
Escoamento de camada-limite natural:

(a) Formação de pluma acima de um fio aquecido

(b) Jato livre associado a uma descarga aquecida

Transferência de Calor por Convecção Natural

Considerações Físicas



Desenvolvimento de uma camada-limite sobre uma placa vertical aquecida imersa em um fluido extenso, quiescente.

Transferência de Calor por Convecção Natural

Equações da Convecção Natural (Placa Plana Vertical Aquecida)

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp_\infty}{dx}-g+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{dp_\infty}{dx}-\rho_\infty g$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=g\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

onde

$$\Delta\rho=\rho_\infty-\rho$$

Transferência de Calor por Convecção Natural

Equações da Convecção Natural

Considerando a variação da massa específica apenas devido a variação da temperatura, pode-se fazer uso do “Coeficiente de expansão volumétrica térmica “β”, dado por:

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$$

$$\beta \approx -\frac{1}{\rho}\frac{\Delta \rho}{\Delta T} = -\frac{1}{\rho}\frac{\rho_\infty - \rho}{T_\infty - T}$$

$$(\rho_\infty - \rho) \approx \rho\beta(T - T_\infty)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_\infty) + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Transferência de Calor por Convecção Natural

Leis Básicas de Conservação para Convecção Natural:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Eq. Conservação Massa

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = g\beta\left(T - T_\infty\right) + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Eq. Conservação Quantidade de Movimento

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Eq. Conservação Energia

Transferência de Calor por Convecção Natural

Equações da Convecção Natural (Caso de fluido compressível)

Para um gás ideal, β pode ser determinado da seguinte forma:

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{\rho}\frac{p}{RT} = \frac{1}{T}$$

Transferência de Calor por Convecção Natural

Análise de Similaridade:

Para analisar os parâmetros adimensionais que governam o escoamento e a transferência de calor na convecção natural, será feita a adimensionalização das equações.

$$x^* \equiv \frac{x}{L}; \quad y^* \equiv \frac{y}{L}$$

$$u^* \equiv \frac{u}{u_0}; \quad v^* \equiv \frac{v}{u_0}; \quad T^* \equiv \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty}$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{g\beta\left(T_s - T_\infty\right)L}{u_0^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}_L \, \mathrm{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

Transferência de Calor por Convecção Natural

Análise de Similaridade

Seja considerada a equação (*), abaixo:

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=\frac{g\beta(T_s-T_\infty)L}{u_0^2}+\frac{1}{\mathrm{Re}_L}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \qquad (*)$$

Escolhendo $u_0^2 = g\beta(T-T_\infty)L$

Temos que: $\mathrm{Re}_L = \left[\frac{g\beta(T-T_\infty)L^3}{\nu^2}\right]^{1/2}$

Assim, é possível definir-se o Número de Grashof (Gr_L) como:

$$Gr_L = \frac{g\beta(T-T_\infty)L^3}{\nu^2}; \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}_L = (Gr_L)^{1/2}$$

Gr_L – Razão entre a força de empuxo e as forças viscosas

Transferência de Calor por Convecção Natural

Análise de Similaridade

Quando efeitos da convecção forçada e da convecção natural são comparáveis, tem-se que:

- u_o é escolhido como sendo igual a u_∞

- A equação (*) torna-se:

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=\frac{Gr_L}{\mathrm{Re}_L^2}T^*+\frac{1}{\mathrm{Re}_L}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

- Assim,

$$Nu_L=f\left(\mathrm{Re}_L, Gr_L, \mathrm{Pr}\right)$$

Transferência de Calor por Convecção Natural

Análise de Similaridade

Em resumo:

- Para $\dfrac{Gr_L}{\mathrm{Re}_L^2} \cong 1$ tem-se $Nu_L = f\left(\mathrm{Re}_L, Gr_L, \mathrm{Pr}\right)$

- Para $\dfrac{Gr_L}{\mathrm{Re}_L^2} << 1$ tem-se $Nu_L = f\left(\mathrm{Re}_L, \mathrm{Pr}\right)$

- Para $\dfrac{Gr_L}{\mathrm{Re}_L^2} >> 1$ tem-se $Nu_L = f\left(Gr_L, \mathrm{Pr}\right)$

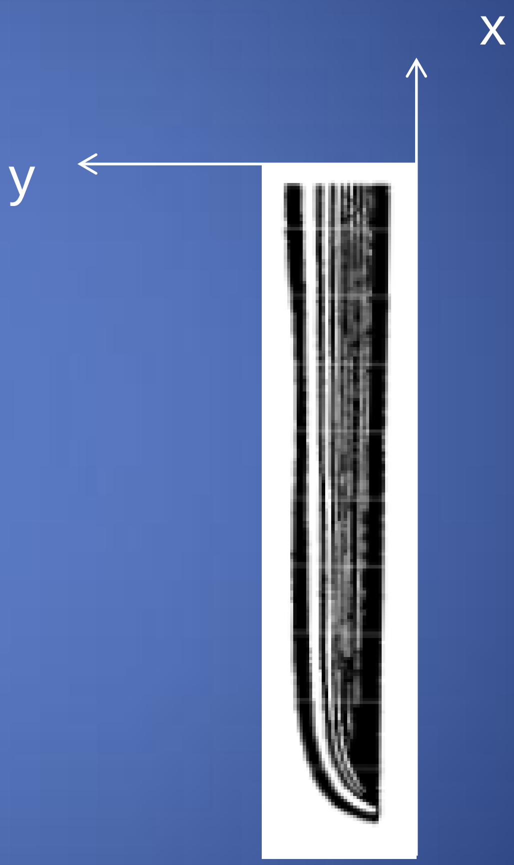
Transferência de Calor por Convecção Natural

Convecção Natural Laminar sobre uma Superfície Vertical:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=g\beta(T-T_\infty)+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$



Condições de contorno:

$$y=0;\quad u=v=0;\quad T=T_s$$

$$y\to\infty;\quad u\to 0;\quad T\to T_\infty$$

Transferência de Calor por Convecção Natural

Convecção Natural Laminar sobre uma Superfície Vertical:

É possível definir um outro número adimensional (Rayleigh, *Ra*) como sendo:

$$Ra = Gr \times \mathrm{Pr}$$

Assim, podemos definir o coeficiente de transferência de calor por convecção natural dado por:

$$Nu = \frac{hL}{k} = C\,Ra^{\,n}$$

Sendo que *C* e *n* dependem do tipo de escoamento, laminar ou turbulento.

Transferência de Calor por Convecção Natural

Convecção Natural Laminar sobre uma Superfície Vertical:

Resolvendo o coeficiente de transferência de calor:

$$Nu = \frac{hL}{k} = C\,Ra^{\,n} \Rightarrow h = \frac{k}{L} CRa_{L}^{\,n}$$

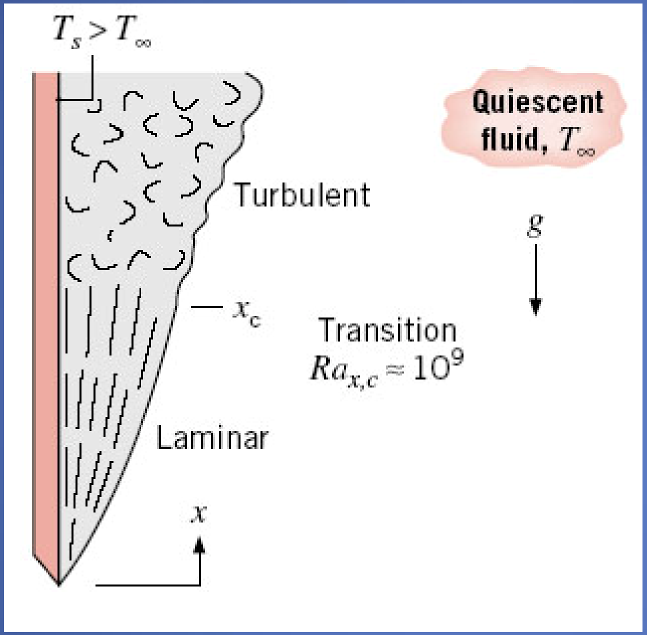
Para as placas planas verticais aquecidas com escoamento laminar, tem-se:

$$Nu = 0{,}59\,Ra^{\frac{1}{4}}$$

Sendo $10^4 < Ra < 10^9$

Transferência de Calor por Convecção Natural

Os Efeitos da Turbulência



A ocorrência da transição é relacionada ao Número de Rayleigh (Ra_{xc}).

Para placas planas verticais a transição ocorre em:

$$Ra_{xc} = Gr_{xc}\,\mathrm{Pr} = \frac{g\beta\left(T - T_\infty\right)x^3}{\nu\alpha} \approx 10^9$$

Transferência de Calor por Convecção Natural

Correlações Empíricas: Convecção Natural em Escoamentos Externos

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = CRa_L^n$$

$$Ra = Gr\,\mathrm{Pr} = \frac{g\beta(T - T_\infty)L^3}{\nu\alpha}$$

Escoamento Laminar: $(10^4 \le Ra_L \le 10^9); \quad C = 0{,}59; \quad n = 1/4$

Escoamento Turbulento: $(10^9 \le Ra_L \le 10^{13}); \quad C = 0{,}10; \quad n = 1/3$

e $T_f = \frac{1}{2}(T_s + T_\infty)$

Transferência de Calor por Convecção Natural

<u>Cilindro Vertical</u>

Correlação para todo o intervalo de Ra_L

$$\overline{Nu}_L = \left\{ 0.825 + \frac{0.387 Ra_L^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{\mathrm{Pr}} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2$$

Uma precisão ligeiramente superior para escoamento laminar pode ser obtida por:

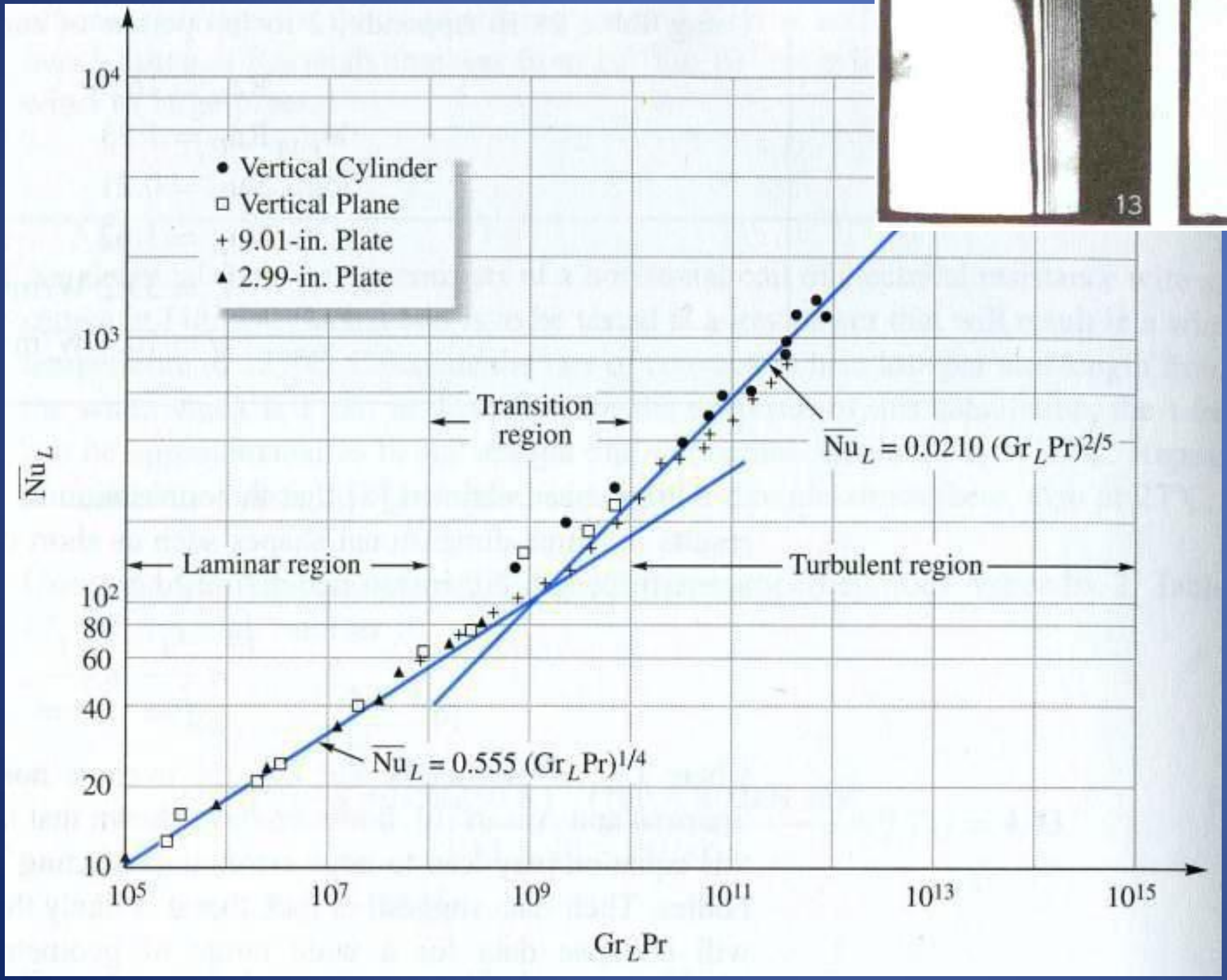
$$\overline{Nu}_L = 0.68 + \frac{0.670 Ra_L^{1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{\mathrm{Pr}} \right)^{9/16} \right]^{4/9}}; \quad Ra_L \leq 10^9$$

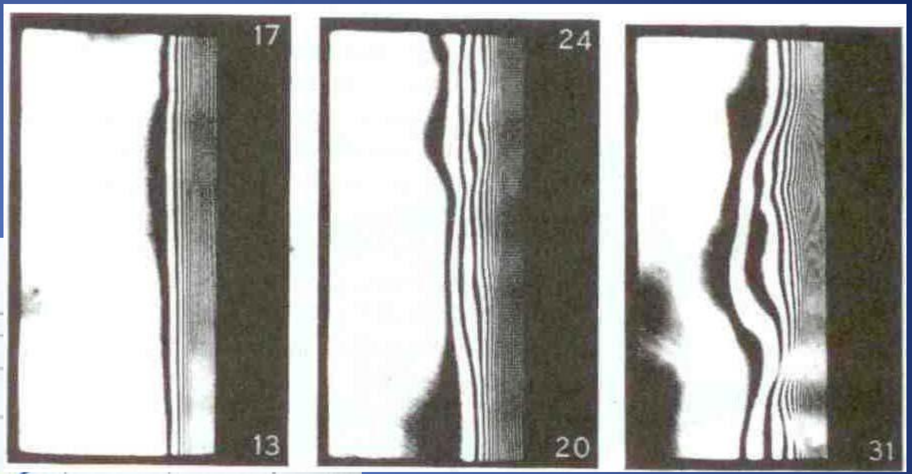
Estes resultados são válidos para cilindros verticais com altura *L* desde que δ seja muito menor que *D,* ou seja, quando:

$$\frac{D}{L} \geq \frac{35}{Gr^{1/4}}$$

Transferência de Calor por Convecção Natural

Placas e Cilindros Verticais





Transferência de Calor por Convecção Natural

Placas Inclinadas e Horizontais

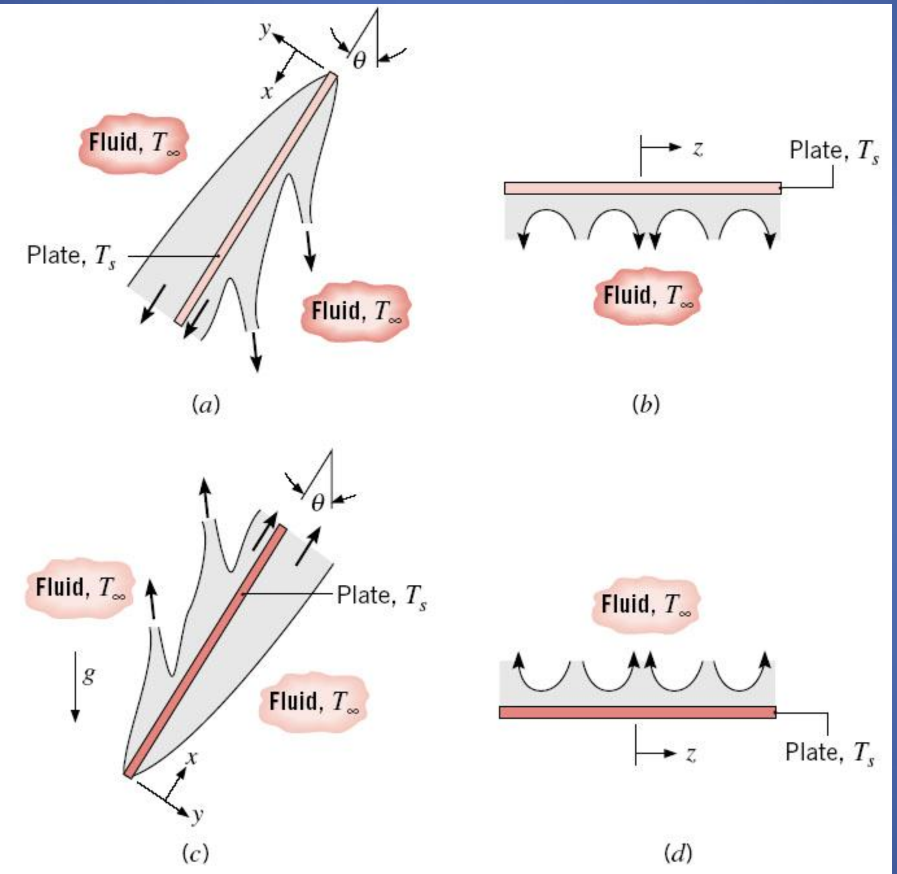


FIGURE 9.6 Buoyancy-driven flows on an inclined plate: (*a*) side view of flows at top and bottom surfaces of a cold plate ($T_s < T_\infty$). (*b*) end view of flow at bottom surface of cold plate, (*c*) side view of flows at top and bottom surfaces of a hot plate ($T_s > T_\infty$), and (*d*) end view of flow at top surface of hot plate.

Transferência de Calor por Convecção Natural

Placas Inclinadas

Superfície Inferior de uma Placa Aquecida ou
Superfície Superior de uma Placa Resfriada

$$\overline{Nu}_L = \left\{ 0.825 + \frac{0.387\,Ra_L^{1/6}}{\left[1+\left(\frac{0.492}{\Pr}\right)^{9/16}\right]^{8/27}} \right\}^2$$

$$\overline{Nu}_L = 0.68 + \frac{0.670\,Ra_L^{1/4}}{\left[1+\left(\frac{0.492}{\Pr}\right)^{9/16}\right]^{4/9}}; \quad Ra_L \leq 10^9$$

No cálculo de *Ra*, onde aparece, *g,* deve ser substituído por *(g.cos*θ*)*
Válidas para $0 \leq \theta \leq 60^o$

Obs.: Para superfície superior de placa aquecida ou
superfície inferior de placa resfriada não são feitas recomendações.

Transferência de Calor por Convecção Natural

Placas Horizontais

Superfície Superior de uma Placa Aquecida ou
Superfície Inferior de uma Placa Resfriada

$$\overline{Nu}_L = 0.54 Ra_L^{1/4}\ ; \quad \left(10^4 \leq Ra_L \leq 10^7\right)$$
$$\overline{Nu}_L = 0.15 Ra_L^{1/3}\ ; \quad \left(10^7 \leq Ra_L \leq 10^{11}\right)$$

Superfície Inferior de uma Placa Aquecida ou
Superfície Superior de uma Placa Resfriada

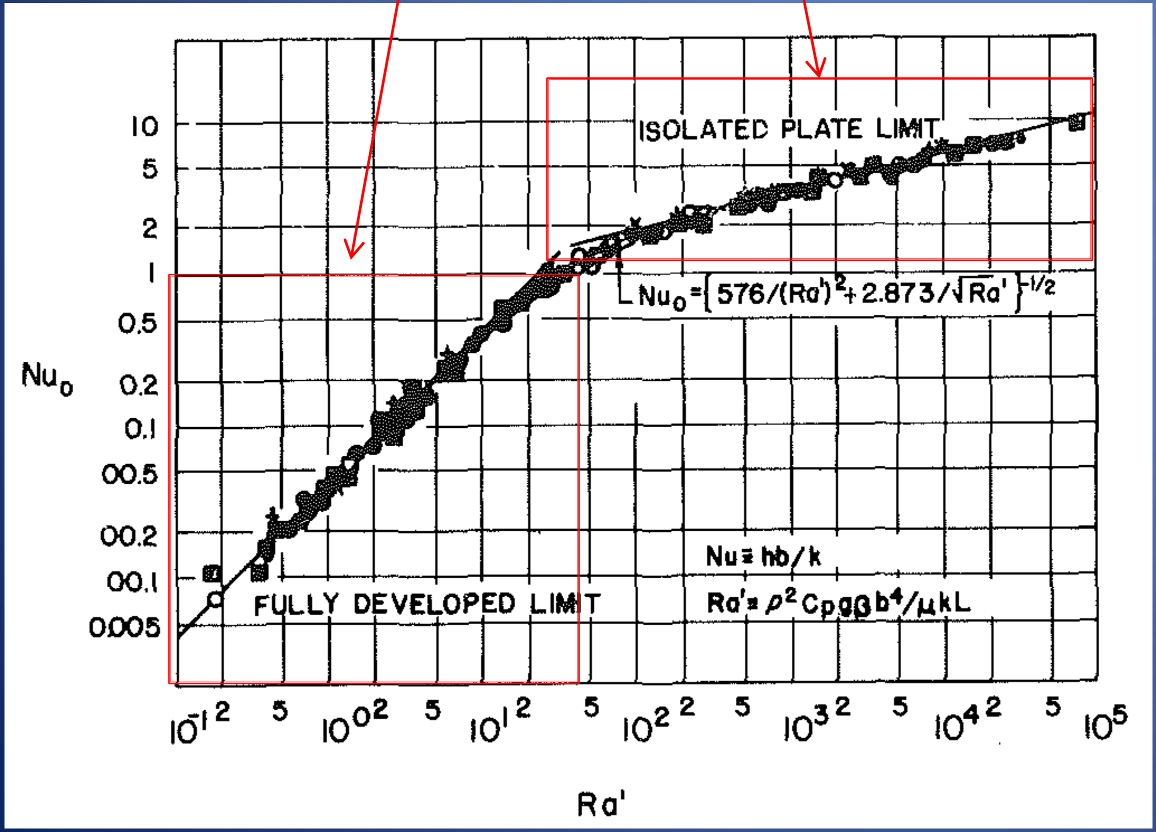
$$\overline{Nu}_L = 0.27 Ra_L^{1/4}\ ; \quad \left(10^5 \leq Ra_L \leq 10^{10}\right)$$

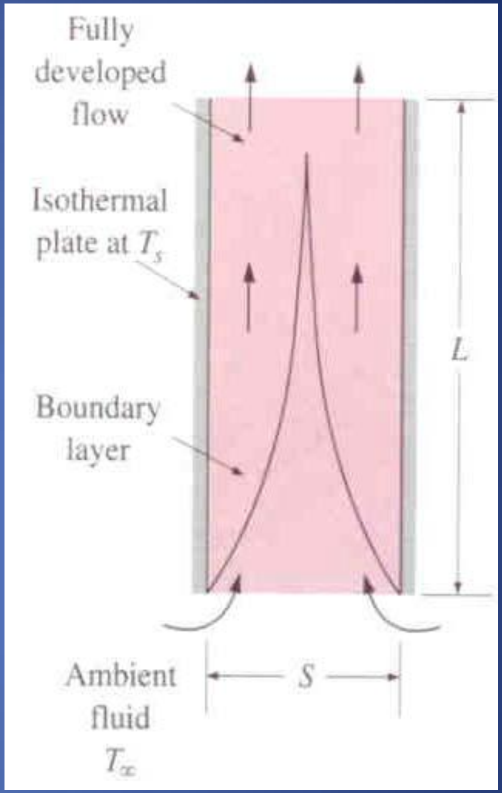
Onde o comprimento característico é definido como: $L \equiv \dfrac{A_s}{P}$

Transferência de Calor por Convecção Natural

Placas Verticais Paralelas:

$$\overline{Nu}_L = \left[\frac{C_1}{(Ra_L A_s / L)^2} + \frac{C2}{\sqrt{Ra_L A_s / L}} \right]^{-1/2}$$

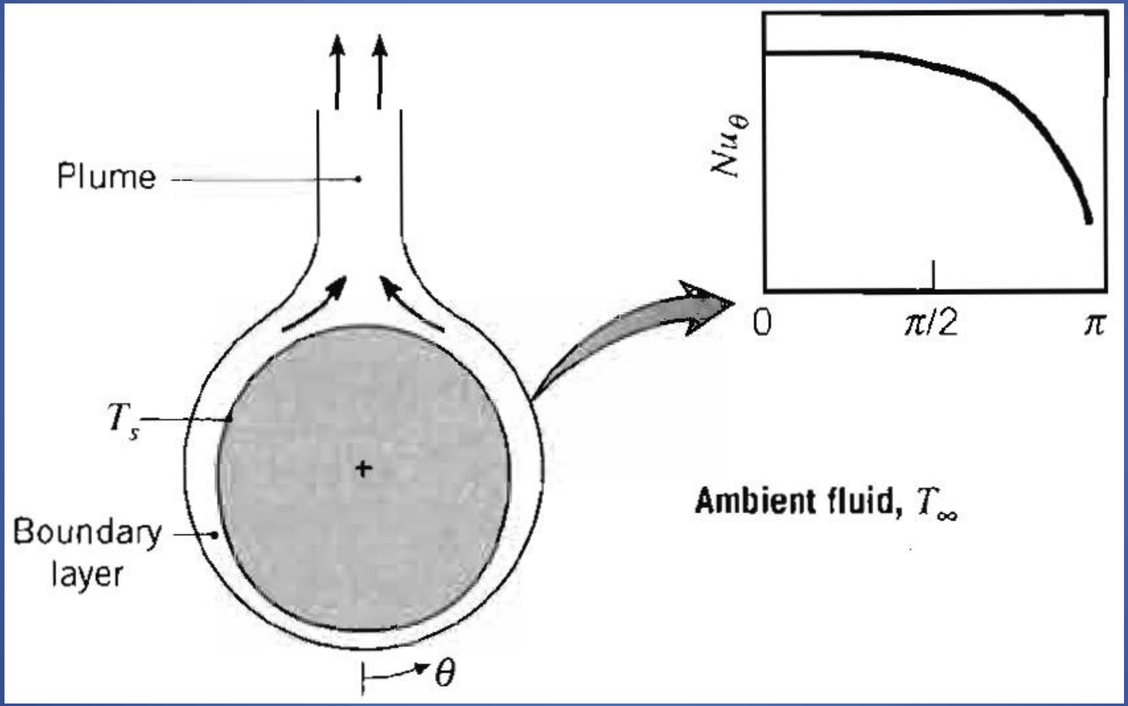




Ref.: Rohsenow & Bar-Cohen (1984), Thermally optimum spacing of vertical, natural convection cooled, parallel plates, ASME J. Heat Transfer, Vol. 106, pp. 116-123.

Transferência de Calor por Convecção Natural

O Cilindro Horizontal Longo



Transferência de Calor por Convecção Natural

O Cilindro Horizontal Longo

Correlação proposta por Morgan

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = CRa_L^n$$

Ra_D	C	n
10^{-10}–10^{-2}	0.675	0.058
10^{-2}–10^{2}	1.02	0.148
10^{2}–10^{4}	0.850	0.188
10^{4}–10^{7}	0.480	0.250
10^{7}–10^{12}	0.125	0.333

Onde Ra_D e $\overline{Nu}_D$ são baseados no diâmetro do cilindro

Transferência de Calor por Convecção Natural

O Cilindro Horizontal Longo

Correlação proposta por Churchill e Chu

$$\overline{Nu}_L = \left\{ 0.6 + \frac{0.387\, Ra_L^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0.559}{\Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2 \; ; \quad Ra_L \leq 10^{12}$$

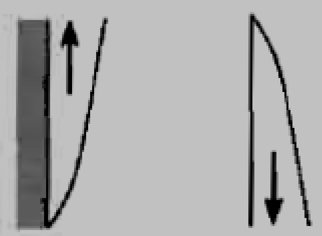
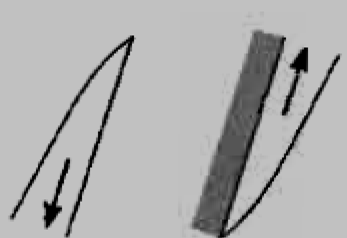
Transferência de Calor por Convecção Natural

Esferas

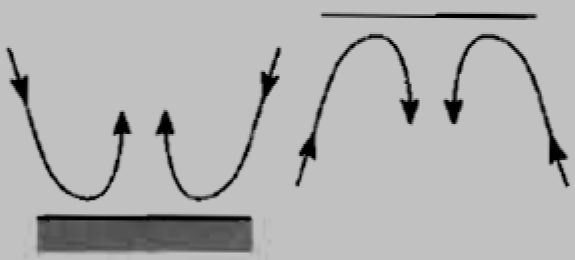
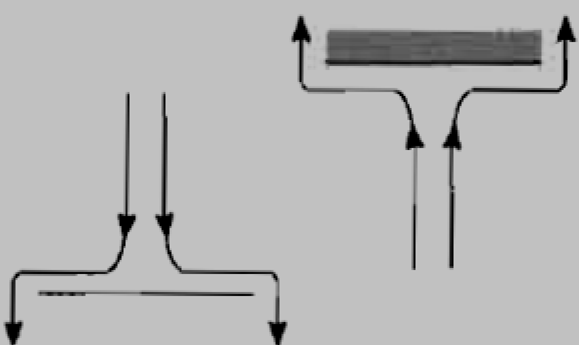
Correlação proposta por Churchill

$$\overline{Nu}_L = 2 + \frac{0.589 Ra_L^{1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0.469}{\Pr}\right)^{9/16}\right]^{4/9}}; \quad Ra_L \le 10^{11}; \quad \Pr \ge 0.7$$

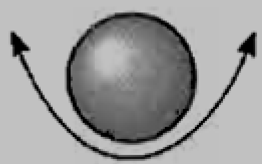
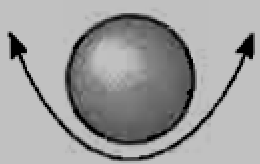
Transferência de Calor por Convecção Natural

Geometry	Recommended Correlation	Restrictions
1. Vertical plates[a] 	$\overline{Nu}_L = \left\{0.825 + \frac{0.387 Ra_L^{1/6}}{[1+(0.492/Pr)^{9/16}]^{8/27}}\right\}^2$	None
2. Inclined plates Cold surface up or hot surface down 	$\overline{Nu}_L = \left\{0.825 + \frac{0.387 Ra_L^{1/6}}{[1+(0.492/Pr)^{9/16}]^{8/27}}\right\}^2$ $g \longrightarrow g\cos\theta$	$0 \leq \theta \lesssim 60°$

Transferência de Calor por Convecção Natural

Geometry	Recommended Correlation	Restrictions
3. Horizontal plates		
	$\overline{Nu}_L = 0.54 Ra_L^{1/4}$	$10^4 \lesssim Ra_L \lesssim 10^7$
	$\overline{Nu}_L = 0.15 Ra_L^{1/3}$	$10^7 \lesssim Ra_L \lesssim 10^{11}$
(b) Cold surface up or hot surface down 	$\overline{Nu}_L = 0.27 Ra_L^{1/4}$	$10^5 \lesssim Ra_L \lesssim 10^{10}$

Transferência de Calor por Convecção Natural

Geometry	Recommended Correlation	Restrictions
4. Horizontal cylinder 	$\overline{Nu}_D = \left\{0.60 + \dfrac{0.387\, Ra_D^{1/6}}{[1 + (0.559/Pr)^{9/16}]^{8/27}}\right\}^2$	$Ra_D \lesssim 10^{12}$
5. Sphere 	$\overline{Nu}_D = 2 + \dfrac{0.589 Ra_D^{1/4}}{[1 + (0.469/Pr)^{9/16}]^{4/9}}$	$Ra_D \lesssim 10^{11}$ $Pr \gtrsim 0.7$

[a] The correlation may be applied to a vertical cylinder if $(D/L) \gtrsim (35/Gr_L^{1/4})$.