Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil – Escola Politécnica da USP

PEF 5710 – Otimização Estrutural – Prova: de 04/05/2022, 16h, a 06/05/2022, 08h.

GABARITO

Questão 1 (2,0) – Considere uma viga bi apoiada, vão $L = 100\pi$ cm, seção transversal retangular, base $b = 12$ cm e altura h (em cm). O material tem módulo de elasticidade 3,6x10^6 N/cm² e densidade 0,003 kg/cm³. **Formular** (sem resolver) o problema de programação linear de determinação da altura h ótima da seção para que a 1ª frequência de vibração seja superior a 30 rad/s e a 2ª inferior a 120 rad/s. Desprezar a gravidade.

1. Frequências de vibração livre não amortecidas (rad/s)

$\omega_n = (n\pi)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}$ $\qquad n = 1,2 \qquad$ (vide livro de vibrações do Rao, por exemplo)

$$E = 3.600.000\,\frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \qquad \rho = 0,003\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \qquad L = 100\pi \text{ cm}$$

$$A = bh = 12h \ \ \text{cm}^2 \qquad\qquad I = \frac{bh^3}{12} = h^3 \ \ \text{cm}^4$$

$$\omega_n = n^2 \qquad n = 1,2$$

2. Variável de projeto: $x_1 = h$

3. Função objetivo: $f(x) = x_1$

4. Restrições

$$\omega_1 \geq 30 \qquad\qquad \omega_2 \leq 120$$

5. Problema de programação linear

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \qquad [A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \{b\} = \begin{Bmatrix} 30 \\ 120 \end{Bmatrix} \qquad \{c\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Minimizar $f(x) = \{c\}^T\{x\}$

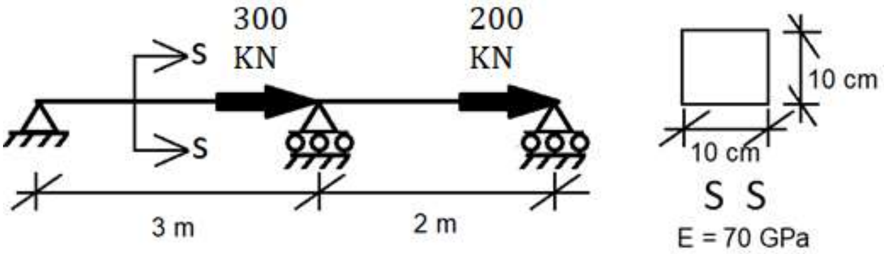
sujeita a $\qquad [A]\{x\} = \{b\}$

Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil – Escola Politécnica da USP

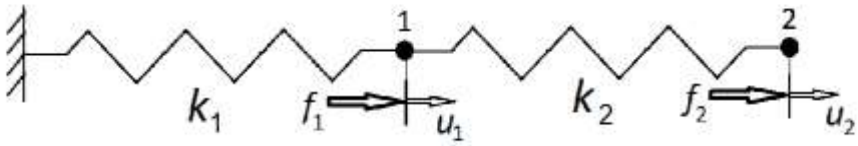
PEF 5710 – Otimização Estrutural – Prova: de 04/05/2022, 16h, a 06/05/2022, 08h.

GABARITO

Questão 2 (4,5) – Considere a barra prismática sob esforços axiais abaixo:



O modelo matemático deste sistema pode ser representado como a seguir.



Escreva: a função energia de deformação (U); a função trabalho das forças conservativas (W); a função energia potencial total (V). Determinar os valores dos deslocamentos u_1 e u_2 da estrutura de forma a que a energia potencial total seja mínima, usando técnicas de programação não linear sem restrições. Desprezar a gravidade.

1. Rigidez das molas equivalentes

$k_1 = \frac{EA}{L_1} = \frac{70.000.000\text{x}0{,}01}{3} = 233.333{,}33\,\frac{\text{KN}}{\text{m}}$ $\qquad k_2 = \frac{EA}{L_2} = \frac{70.000.000\text{x}0{,}01}{2} = 350.000\,\frac{\text{KN}}{\text{m}}$

2. Formulação lagrangiana

$$U = \frac{1}{2}[k_1 u_1^2 + k_2(u_2 - u_1)^2] \qquad W = f_1 u_1 + f_2 u_2 \qquad V = U - W$$

Equilíbrio (Lagrange): $\frac{\partial V}{\partial u_i} = 0 \quad i = 1{,}2 \quad >>>>> \quad [K]\{u\} - \{f\} = \{0\}$

onde $[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$ KN/m $\qquad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$ m $\qquad \{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 300 \\ 200 \end{Bmatrix}$ KN

3. Vetor gradiente $\{c\}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial u_1} & \frac{\partial V}{\partial u_2} \end{bmatrix} = [(k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_2 - f_1 \quad k_2(u_2 - u_1) - f_2]$

4. Resultado, aplicando o método do gradiente:

$u_1 = 2{,}1429\text{x}10^{-3}$ m $\quad u_2 = 2{,}7143\text{x}10^{-3}$ m $\qquad V = -593$ J

Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil – Escola Politécnica da USP

PEF 5710 – Otimização Estrutural – Prova: de 04/05/2022, 16h, a 06/05/2022, 08h.

GABARITO

Questão 3 (3,5) – Uma concreteira produz um concreto comum, C1, e um de alta resistência, C2. Tem capacidade de produzir por hora ou 56 m³ de C1 ou 28 m³ de C2. O administrativo pode faturar 28 m³ de C1 ou 48 m³ de C2 por hora. Os caminhões betoneira podem entregar apenas 32 m³ por hora. A concreteira lucra R$ 600,00 por m³ de C1 e R$ 800,00 por m³ de C2. Quantos m³ de cada tipo dão o máximo lucro horário e qual seu valor? Há folgas de recursos? Resolva pelo método SIMPLEX manualmente.

Resultados:

- quantidade ótima de concreto C1 = 8 m³/h
- quantidade ótima de concreto C2 = 24 m³/h
- lucro máximo R$ 24.000,00/h
- há pequena folga no administrativo