Capítulo 3

Método gráfico

Uma classe de problemas razoavelmente comum na prática é a dos que tem apenas duas variáveis de projeto, ou, como também pode ser dito, dois graus de liberdade.

Nesse caso, é possível representar todos os possíveis valores dessas duas variáveis, incluindo as restrições, e plotar curvas de iso-valores da função objetivo, em um plano e determinar visualmente a solução do problema de otimização correspondente, sem recurso a outras ferramentas matemáticas que a mais simples geometria analítica.

Exemplos

3.1 Exemplo E1 do Capítulo 1

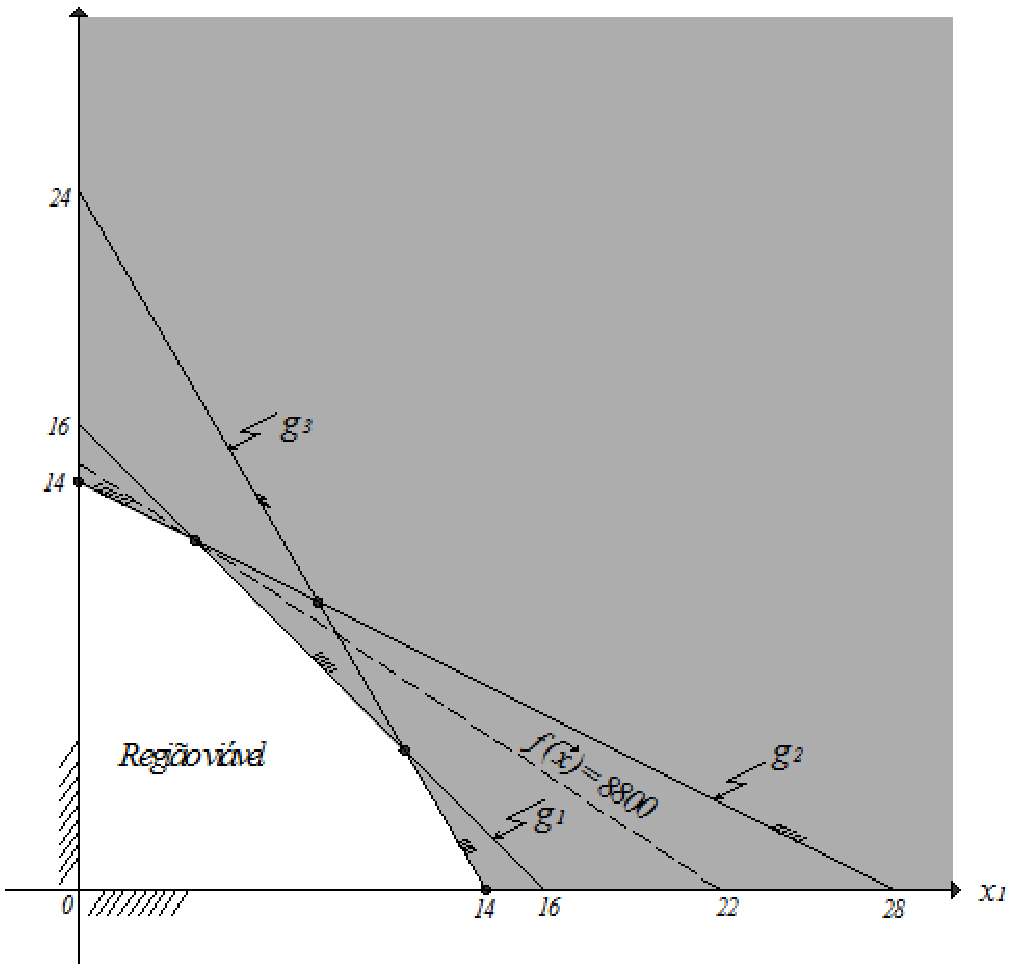

Figura 3.1 – Solução gráfica do exemplo 3.1

Variáveis de projeto:

x_1 = número de máquinas A, x_2 = número de máquinas B

Função objetivo (lucro), a ser maximizada: $F(\mathbf{x}) = 400x_1 + 600x_2$

Restrições (de desigualdade):

$x_1 + x_2 \leq 16 \quad \Rightarrow \quad g_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 16 \leq 0$ (expedição)

$x_1 / 28 + x_2 / 14 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad g_2(\mathbf{x}) = x_1 / 28 + x_2 / 14 - 1 \leq 0$ (produção)

$x_1 / 14 + x_2 / 24 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad g_3(\mathbf{x}) = x_1 / 14 + x_2 / 24 - 1 \leq 0$ (vendas)

A plotagem dessas funções é apresentada na Fig. 3.1. A linha de iso-lucros que dá o máximo valor e atende a todas as restrições é $400x_1 + 600x_2 = 8800$, **correspondendo à produção de 4 máquinas A e 12 máquinas B**. Os programas de plotagem disponíveis, como o MicroSoft Office Excel, facilitam amplamente esta forma de resolução

3.2 Coluna submetida a carga axial

Uma coluna, mostrada na Figura 3.2, possui comprimento L = 5 m, é engastada na base e livre na extremidade superior. A seção é tubular de raio médio R e espessura da parede t.

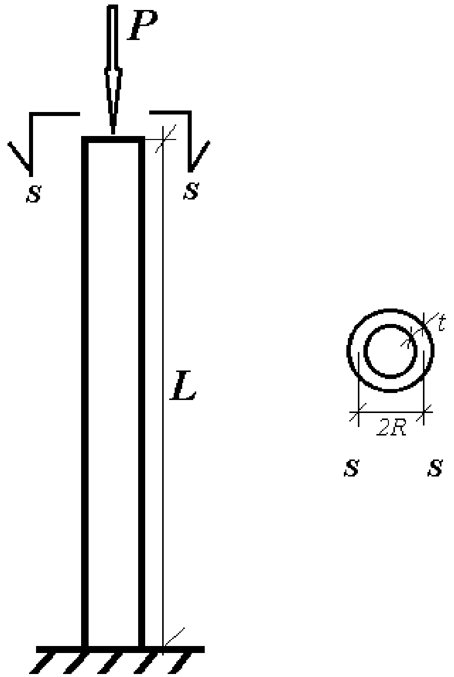

Figura 3.2 – Coluna do exemplo 3.2

Ela encontra-se submetida a uma força de compressão centrada no topo P = 10 MN. Determinar sua mínima massa, sabendo que é constituída de aço (E = 207 GPa, densidade $\rho = 7833$ kg/m³, resistência admissível $\sigma_a = 248$ MPa).

Variáveis de projeto: R e t

Função objetivo: $f(R,t) = 2\rho L \pi R t$, massa em kg

Restrições de desigualdade:

$$g_1(R,t) = \frac{P}{2\pi Rt} - \sigma_a \leq 0\,, \qquad \text{(resistência admissível)}$$

$$g_2(R,t) = P - \frac{\pi^3 ER^3 t}{4L^2} \leq 0 \qquad \text{(carga de flambagem)}$$

$$g_3(R,t) = -R \leq 0\,, \qquad g_4(R,t) = -t \leq 0$$

É um problema de minimização não linear com restrições. Como só há 2 variáveis de projeto, é possível resolve-lo pelo método gráfico no plano cartesiano R x t. Há infinitas soluções. Todos os pontos no segmento da curva $g_1(R,t) = \frac{P}{2\pi Rt} - \sigma_a = 0$ acima de sua intersecção com a curva $g_2(R,t) = P - \frac{\pi^3 ER^3 t}{4L^2} = 0$ são soluções com a massa da coluna igual a 1579 kg. Em particular, nesse ponto de interseção, R = 0,1575 m e t = 0,0405 m onde foi adotada, dentre as infinitas possíveis, a solução ótima.

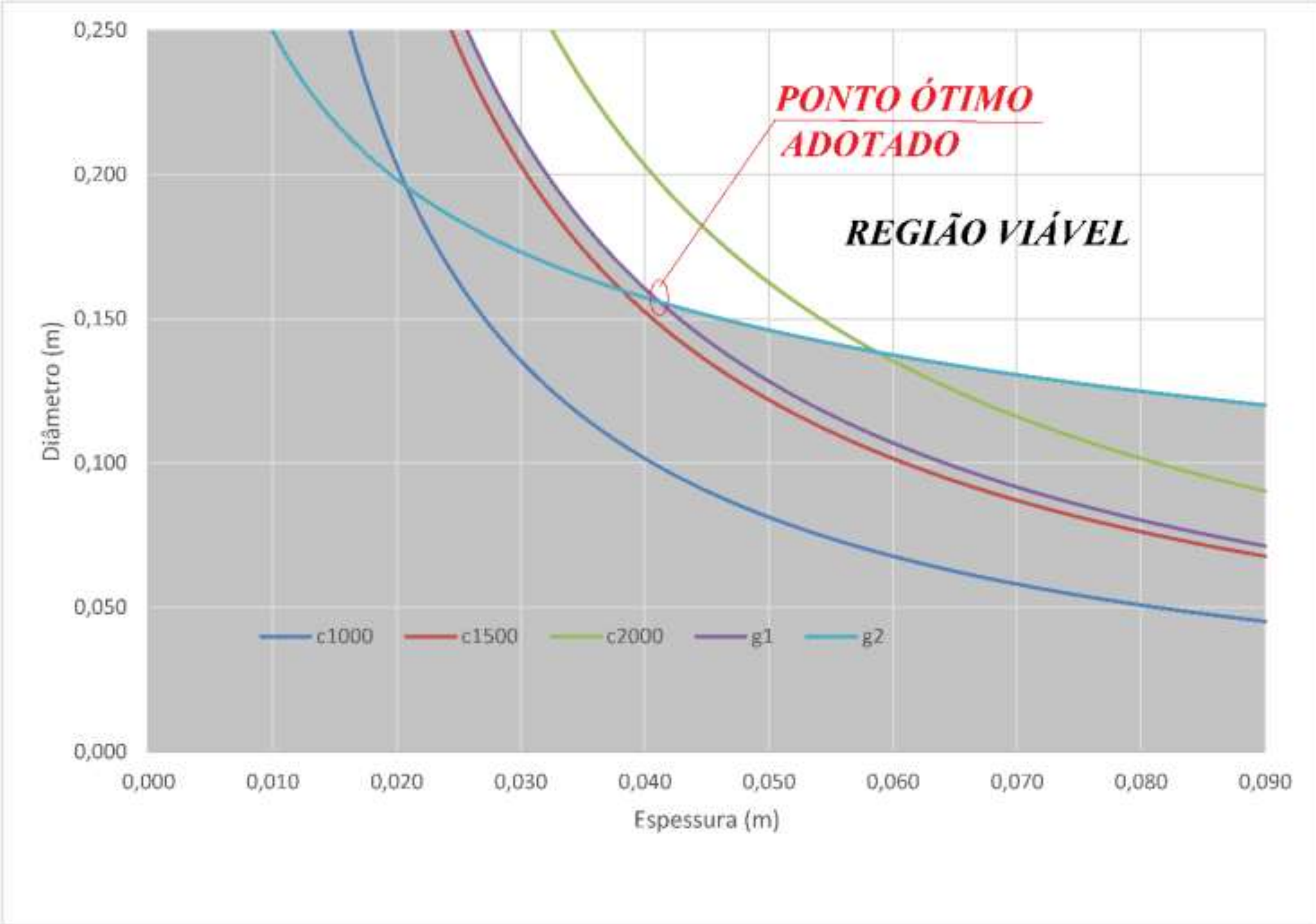

Figura 3.3 – Solução gráfica do exemplo 3.2

Veja a solução gráfica na Figura 3.3. Nesta Figura tem-se as curvas de iso-massas c1000, c1500 e c2000 para respectivamente os custos (massas) de 1000 kg, 1500 kg e 2500 kg, além das restrições g_1 e g_2. A função objetivo é também denominada de função custo, por sua costumeira aplicação a problemas de minimização do custo.

3.3 Viga submetida à flexão

Considere a viga bi-apoiada mostrada na Figura 3.4. A mesma está sujeita a uma carga concentrada P = 200 KN aplicada no meio do vão L = 10 m. A seção transversal é retangular com dimensões b_w x h. O material que compõe a viga apresenta uma tensão admissível σ_a = 20 MPa e uma densidade ρ = 2500 kg/m^3. O problema de otimização (minimização da massa) é definido conforme a seguir.

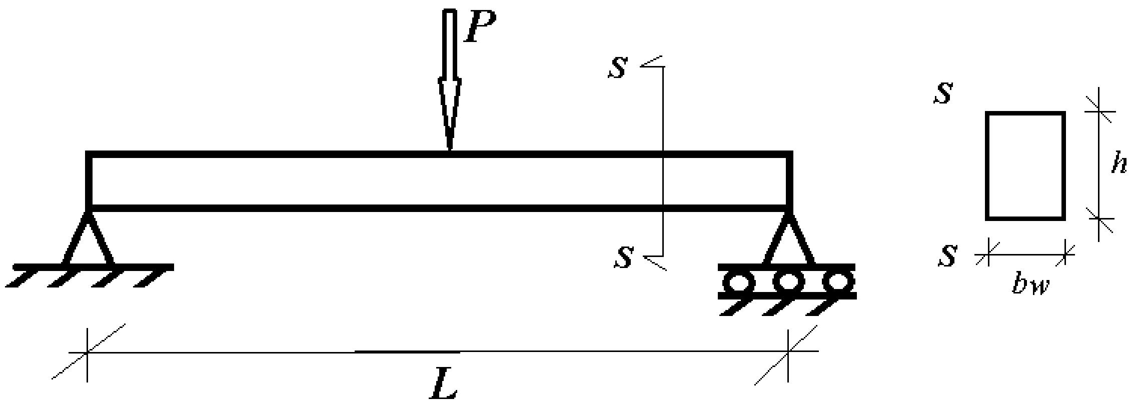

Figura 3.4 – Viga bi-apoiada submetida a carga concentrada

Variáveis de projeto: b_w e h.

Função objetivo: $f(b_w, h) = \rho L b_w h$, massa em kg

Restrições de desigualdade:

$$g_1(b_w, h) = \frac{3}{2}\frac{PL}{b_w h^2} - \sigma_a \le 0,$$ (resistência admissível)

$$g_2(b_w, h) = b_w - h \le 0,$$ (altura maior que a largura)

$$g_3(b_w, h) = -b_w + 0{,}2 \le 0,$$ (largura mínima)

$$g_4(b_w, h) = -h + 0{,}2 \le 0.$$ (altura mínima)

Plotando os gráficos da função objetivo e das restrições obtém-se a Figura 3.5. Observa-se que o valor ótimo encontra-se na intersecção das restrições g_1 e g_3. Neste caso, diz-se que g_1 e g_3 são restrições ativas. As demais restrições g_2 e g_4 estão longe da região viável e não interferem na solução do problema. Alguns algoritmos de busca desprezam as restrições que não estão ativas ou ε-ativas no cálculo do gradiente das restrições para a determinação da solução ótima. Outra observação é que a restrição g_4 é redundante uma vez que g_2 e g_3 faz a mesma função de definir um valor mínimo para h igual a 0,2. A definição de restrições redundantes aumenta o tempo computacional envolvido e pode interferir negativamente no processo de busca, por isso devem ser evitadas.

O valor ótimo da função objetivo é igual 4333 kg e ocorre em b_w = 0,2 m e h = 0,867 m.

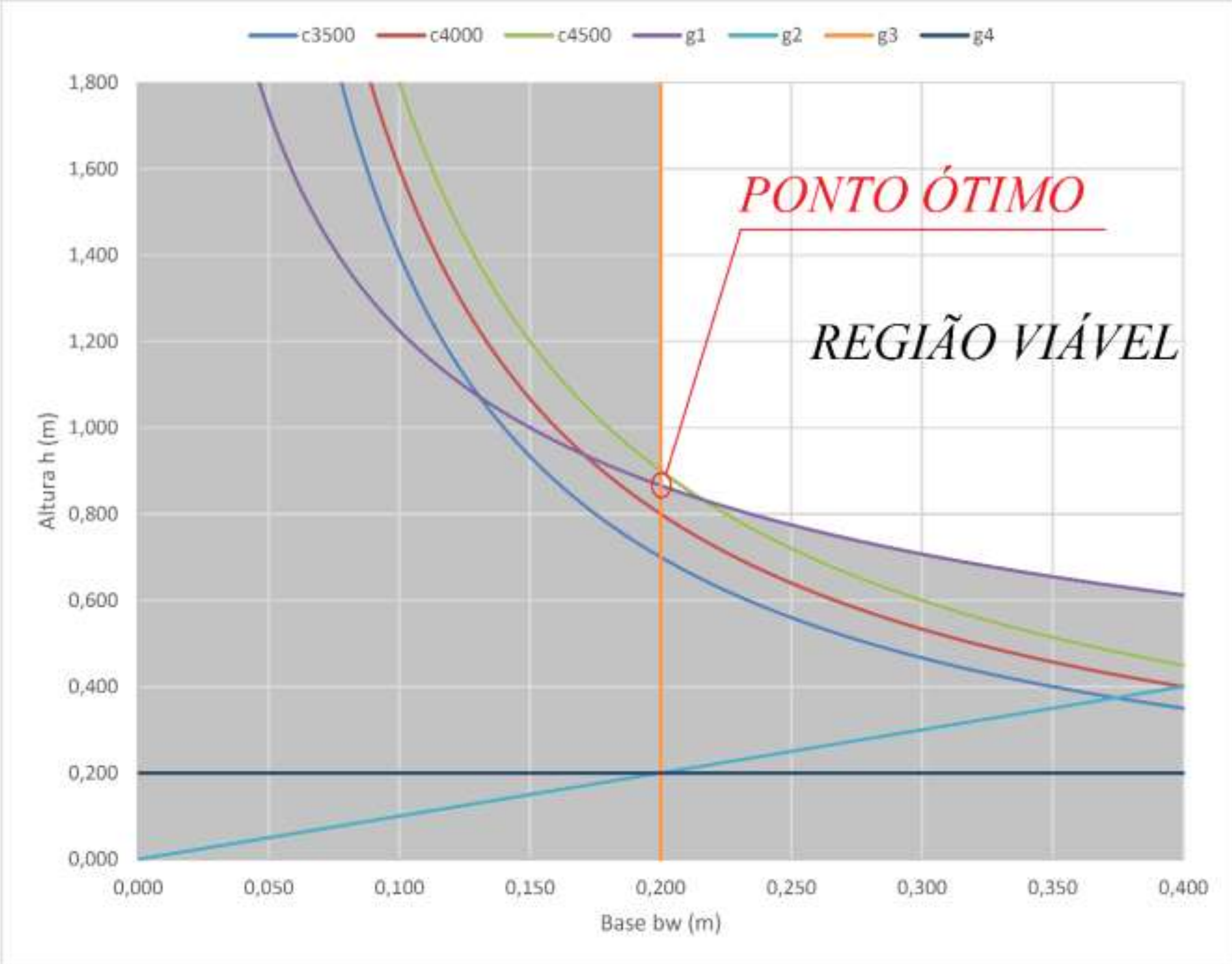

Figura 3.5 – Solução gráfica do exemplo 3.3

3.4 Exemplo Dois geradores elétricos são interconectados para alimentar uma carga de pelo menos 60 unidades de um certo consumidor. O custo de operação de cada gerador é função de sua produção de energia e é dado pelas expressões abaixo, com base em custo por unidade. Formule o problema de custo mínimo par determinar as potências P_1 e P_2 que cada gerador deve fornecer. Determinar a solução graficamente.

Custo por unidade de potência do gerador 1 – $C_1 = 1 - P_1 + P_1^2$

Custo por unidade de potência do gerador 2 – $C_2 = 1 + 0,6\, P_2 + P_2^2$

Variáveis de projeto: $x_1 = P_1$ e $x_2 = P_2$

Função objetivo: $f(\mathbf{x}) = C_1 + C_2 = 2 - x_1 + x_1^2 + 0,6x_2 + x_2^2$

Sujeita a:

$g_1 = -x_1 - x_2 + 60 \leq 0$

$g_2 = -x_1 \leq 0$

$g_3 = -x_2 \leq 0$

Na Figura 3.6 é mostrada a solução do problema através dos gráficos das funções. O ponto ótimo é $\mathbf{x}^{*T} = [30,4 \quad 29,6]$ e o valor da função objetivo no ponto ótimo é $f(\mathbf{x}^*) = 1790$.

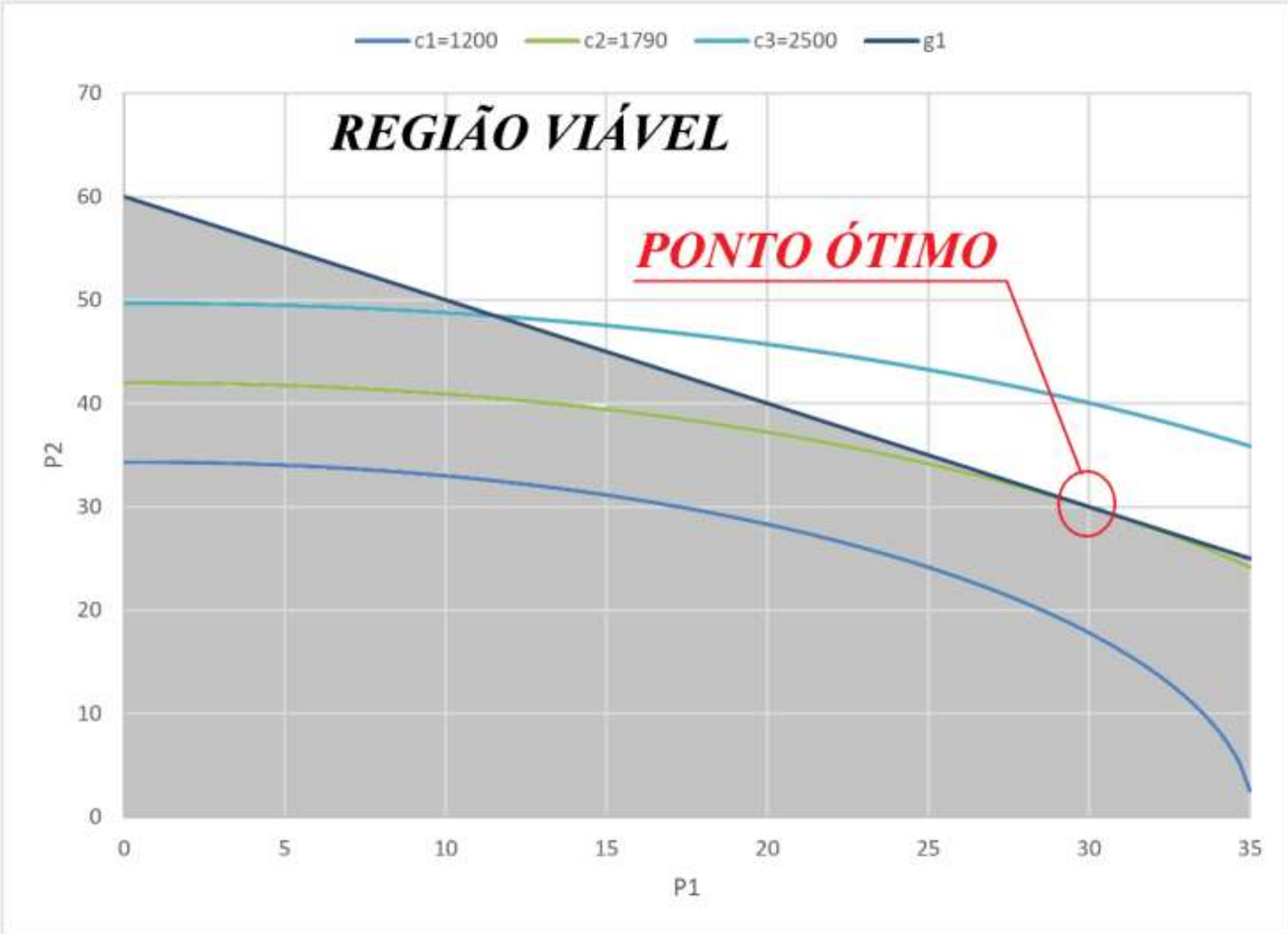

Figura 3.6 – Solução gráfica do exemplo 3.4