Teoria Ingênua ou Informal de conjuntos

Partimos dos conceitos primitivos de conjunto e pertinência.

$x \in A$ denota que um elemento (ou objeto) x pertence a um conjunto A

$x \notin A$ denota que não é o caso que $x \in A$

Um princípio fundamental na teoria dos conjuntos é o princípio de extensionalidade, segundo o qual um conjunto é determinado por seus elementos. Pode ser formulado relacionando pertinência e igualdade entre conjuntos.

Definição (Princípio de Extensionalidade) Dois conjuntos são iguais se eles possuem exatamente os mesmos elementos, i.e. Sejam A e B conjuntos. Então $A = B$ sse $x \in A$ sse $x \in B$.

Definição. Sejam A e B conjuntos. Então A é subconjunto de B, denotado por $A \subseteq B$, sse para todo x, se $x \in A$ então $x \in B$.

Definição. Sejam A e B conjuntos. Então A é subconjunto próprio de B, denotado por $A \subset B$, sse $A \subseteq B$ e $A \neq B$.

Outra propriedade fundamental da teoria de conjuntos é o princípio de separação, segundo o qual, dado um conjunto, uma propriedade $\mathbb{P}$ separa um subconjunto daqueles elementos que satisfazem $\mathbb{P}$.

$$P = \{x \in A : x \text{ tem a propriedade } \mathbb{P}\}$$

Se tomarmos $\mathbb{P}$ como um conceito, o princípio de separação, combinado com o princípio de extensionalidade, expressa uma assunção forte na teoria da linguagem de Frege.

O pressuposto fundamental dessa teoria é o de que linguagem relaciona conceitos, que, por sua vez, representam objetos ou conjuntos de objetos no mundo. Assim, uma linguagem precisa, que estabeleça relações entre conceitos, poderia representar as relações entre objetos e conjuntos em qualquer domínio. Para Frege, qualquer linguagem que possua significado ia necessariamente essa estrutura lógica de relações entre conceitos, que refletem o real, de forma que seus enunciados possam ser verdadeiros ou falsos sobre a realidade descrita.

Mas vejam a força desse compromisso Fregeano

Seja J o conjunto dos jogadores profissionais de futebol. Então separo o seguinte conjunto P.

$P = \{x \in J : x$ venceu 3 copas do mundo da FIFA$\}$

$E = \{x \in J : x$ fez mais de 1200 gols em partidas oficiais$\}$

Então $P = E = \{$Pelé$\}$

Se assumirmos que uma propriedade P identifica-se com sua extensão, e que P representa um conceito na linguagem com um significado determinado, então temos que aceitar que "ser jogador profissional e ter vencido 3 copas da FIFA" e "ser jogador profissional e ter feito mais de 1200 gols em partidas oficiais" têm o mesmo significado.

Não vamos mais falar sobre isso por enquanto, mas vocês já podem perceber que essa relação direta entre significado de um conceito e a extensão do conjunto que esse conceito determina pode nos colocar em apuros.

no final incluir uma nota sobre o paradoxo de Russel)

Exercício. Verifique se são verdadeiras ou falsas as proposições abaixo.

se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$
se $A \subseteq B$ e $A \subseteq C$, então $A \subseteq C$
$A \subset B$ sse $A \subseteq B$ e $B \not\subseteq A$
$A = B$ se nem $A \subset B$, nem $B \subset A$
$A \subseteq A$

Considere um conjunto A. Definimos o conjunto vazio pela seguinte separação:

$$\emptyset = \{x \in A : x \neq x\}$$

$\emptyset$ não tem elementos e por extensionalidade ele é único.

* Para todo conjunto B, $\emptyset \subseteq B$

(para que $\emptyset$ não fosse subconjunto de B, deveria existir $x \in \emptyset$ tal que $x \notin B$, o que é impossível)

Definição. (Conjunto Potência / Conjunto das Partes). Seja A um conjunto. Denotamos por $\mathcal{P}(A)$ o conjunto de todos os subconjuntos de A:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

Exemplo $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

Note que $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset$, pois $A \in \mathcal{P}(A)$ e $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$

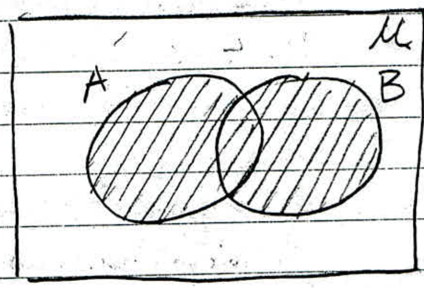
1. Operações Booleanas entre conjuntos

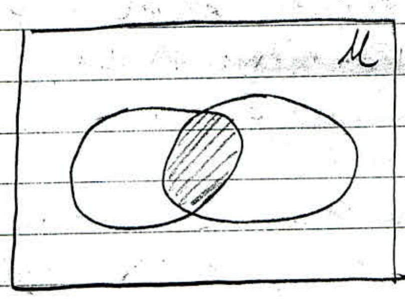
fixar. Seja $\mathcal{U}$ um conjunto fixado chamado de universo local e considere $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Então:

$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \boxed{\text{ou}} x \in B\}$ (união)
$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \boxed{\text{e}} x \in B\}$ (intersecção)

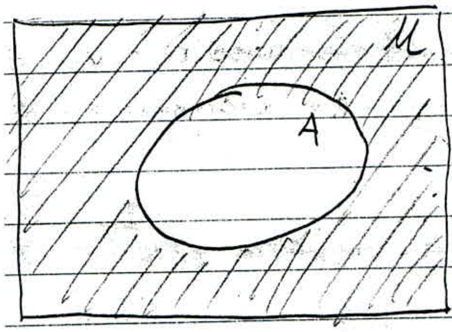
$A^c = -A = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$ (complemento)

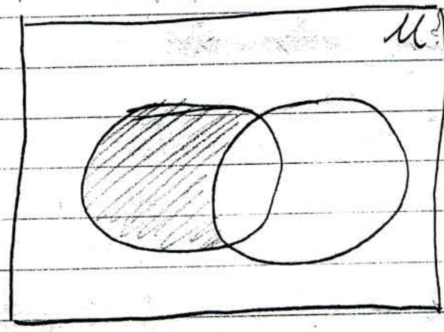
$A - B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ e } x \notin B\}$





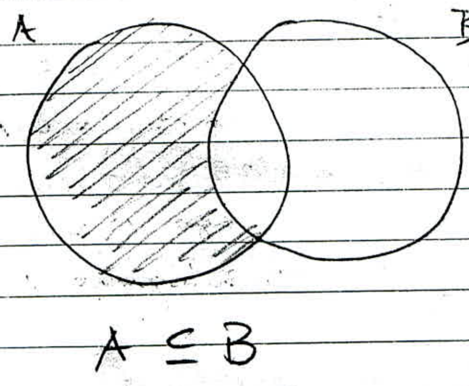
$A \cap B$





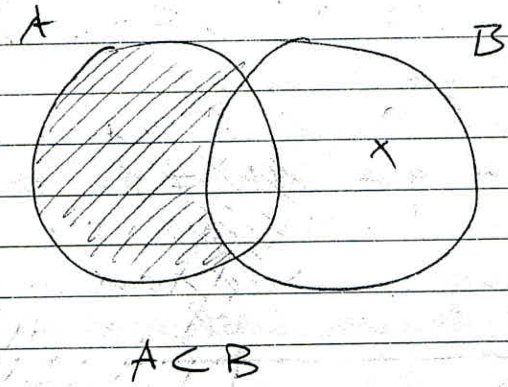
$A - B$

Posso usar os diagramas de Venn acima p/ representar -elações entre conjuntos. Note que agora vou hachurar uilo que será descartado



$A \subseteq B$

ustra que $\boxed{\text{todo}}$ elemento e A encontra-se em B

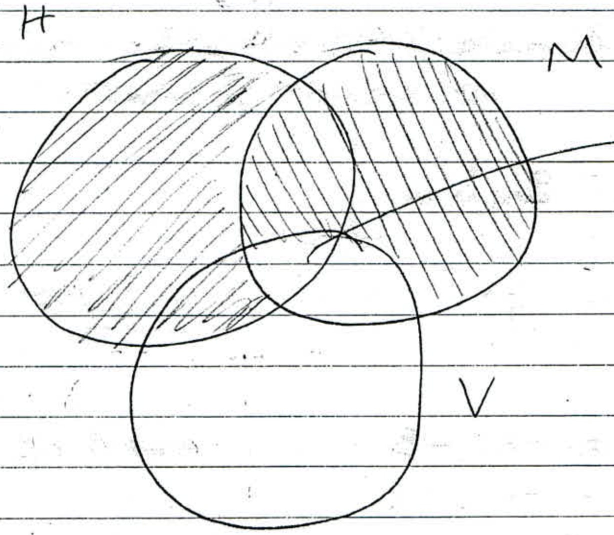


$A \subset B$

Ilustra que $A \subseteq B$ e que $\boxed{\text{existe}}$ pelo menos um elemento de B que não está em A

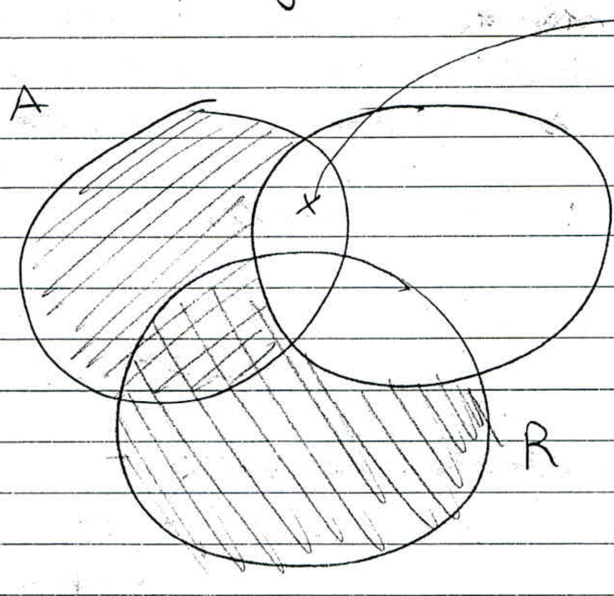
Podemos usar diagramas de Venn p/ testar validade de silogismos. Detalharemos melhor qdo tratarmos da teoria de silogismos aristotélica.

Todo Humano é Mamífero $H \subseteq M$
Todo Mamífero é Vertebrado $M \subseteq V$
∴ Todo Humano é Vertebrado $\therefore H \subseteq V$



Veja que após os descartes todo $x \in H$ necessariamente pertence a V logo $H \subseteq V$
O silogismo é válido

Todos os advogados são mamíferos $A \subseteq M$
Todos os ratos são mamíferos $R \subseteq M$
∴ Todos os advogados são ratos $\therefore A \subseteq R$



Veja que pode haver $x \in A$ que não pertence a R logo $A \not\subseteq R$
O silogismo é inválido

Propriedades interessantes das operações Booleanas sobre conjuntos. Tente fazer as demonstrações.

$A \cup A = A$ — $A \cap A = A$

$A \cup B = B \cup A$ — $A \cap B = B \cap A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$A \cup \emptyset = A$ — $A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \subseteq A \cup B$ — $A \cap B \subseteq A$

se $A \subseteq X$ e $B \subseteq X$, então $A \cup B \subseteq X$ — se $X \subseteq A$ e $X \subseteq B$, então $X \subseteq A \cap B$

se $A \cup B \subseteq X$, então $A \subseteq X$ — se $X \subseteq A \cap B$, então $X \subseteq A$

$$--B = B$$
$$-\mathcal{U} = \emptyset \qquad \mathcal{U} \text{ é o universo local}$$
$$-\emptyset = \mathcal{U}$$
$$A \cup -A = \mathcal{U}$$
$$A \cap -A = \emptyset$$
$$-(A \cup B) = -A \cap -B$$
$$-(A \cap B) = -A \cup -B$$
$$\mathcal{U} - A = -A$$
$$A - \mathcal{U} = \emptyset$$
$$A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$$
$$A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$$

> Se $A \cap B = \emptyset$ dizemos que A e B são disjuntos

Repare que a operação de complemento está baseada na <u>negação</u>; a operação de intersecção está baseada na <u>conjunção</u>; a operação de união está baseada na <u>disjunção</u>.

Confira a definição de cada operador

<u>Pares ordenados</u>

Pelo princípio de extensionalidade, temos que:

$\{A, A\} = \{A\}$

$\{A, B\} = \{B, A\}$

Definição. Dados os objetos A e B, definimos o conjunto:

$$(A,B) \underset{def}{=} \{\{A\},\{A,B\}\}$$

Esse conjunto possui a seguinte propriedade

$$(A,B) = (C,D) \text{ sse } A = C \text{ e } B = D$$

No par ordenado (A,B), chamamos A de primeiro elemento e B de segundo.

A definição pode ser generalizada para n-uplas ordenadas

$$(a_1, a_2, a_3) = ((a_1, a_2), a_3)$$

$$\vdots$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$$

Produto Cartesiano

Definição. Dados dois conjuntos A e B, definimos o produto cartesiano de A por B como:

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Prove que:

se $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

Se $A = B$, denotamos $A \times A$ por A^2.

Podemos generalizar o produto cartesiano.

Se $A_1, \dots, A_n \subseteq X$, então

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$A^n = A \times A \times \dots \times A \text{ (n vezes)}$$

4. Relação

Os conceitos de par ordenado e produto cartesiano são importantes para conceituarmos relação. Vamos tratar aqui de relação de modo intuitivo, sem estudar suas propriedades. O objetivo, por enquanto, é tratar de função, que é um tipo especial de relação.

Definição. Sejam A e B conjuntos. Uma relação (binária) R de A em B é um subconjunto $R \subseteq A \times B$. Quando $A = B$, dizemos que $R \subseteq A \times A$ é uma relação em A.

Notação. Seja $R \subseteq A \times B$, denotamos $(a, b) \in R$ por aRb

Sejam $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos. Então $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$ é uma relação n-ária. $R \subseteq A^n$ é uma relação n-ária em A

Exemplo

Considere os conjuntos $A = \{$João, Silvia, Maria$\}$ e
$B = \{1, 2, 3\}$

Então
$A \times B = \{$(João, 1), (João, 2), (João, 3), (Silvia, 1), (Silvia, 2), (Silvia, 3), (Maria, 1), (Maria, 2), (Maria, 3)$\}$

Vamos estabelecer uma relação entre o cjto de alunos e os cursos que esses alunos frequentaram: 1 (Lógica 1), 2 (Lógica 2) e 3(

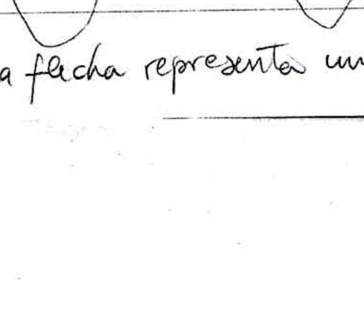
$R \subseteq A \times B = \{$(João, 1), (João, 2), (Maria, 1)$\}$

Podemos representar a relação heuristicamente como

Tabela

	1	2	3
João	1	1	0
Maria	1	0	0
Silvia	0	0	0

Diagrama de grafos



(Cada flecha representa um par ordenado)

Definição. Seja $R \subseteq A \times B$. Definimos o domínio de R como o conjunto dos primeiros elementos dos pares que figuram em R.

$$\mathrm{dom}\, R = \{a \in A : \text{existe } b \in B,\ (a,b) \in R\}$$

Definição. Seja R uma relação e X um conjunto. Definimos a imagem de R sobre X como:

$$R(X) = \{b : \text{para algum } b \in X,\ (x,b) \in R\}$$

Exemplo. $R(\{\text{João}, \text{Maria}\}) = \{1, 2\}$

5. Funções

Definição. Considere os cjtos A e B. Uma função de A em B é uma relação $f \subseteq A \times B$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) condição de totalidade: para todo $a \in B$ existe $b \in B$ tal que $(a,b) \in f$, i.e $\mathrm{dom}(f) = A$

(ii) condição de unicidade: para todo $a \in A$ existe um único $b \in B$ tal que $(a,b) \in f$.

Formalmente: se $(a,b) \in f$ e $(a,c) \in f$, então $b = c$

Denotamos uma função f de A em B por $f : A \to B$

A condição de unicidade permite denotar $(a,b) \in f$ por $f(a) = b$. Neste caso, dizemos que a é o argumento e b é o valor da função f.

$$f(a) = b \longrightarrow \text{valor ou "output"}$$

argumento ou "input"

Quando $f: A \to B$ já definimos que o domínio de f é A. O conjunto B é dito o contradomínio de f, denotado por $\text{códom} f$.

Chamamos de <u>imagem de</u> f ($\text{Im} f$) a imagem de f sobre A. Ou seja $\text{Im} f = f(A)$.

Em outros termos, para $f: A \to B$

$$\text{Im} f = \{b \in B : \text{existe } a \in A,\ f(a) = b\}$$

Para $f: A \to B$ e $X \subseteq A$ temos a imagem de X por f

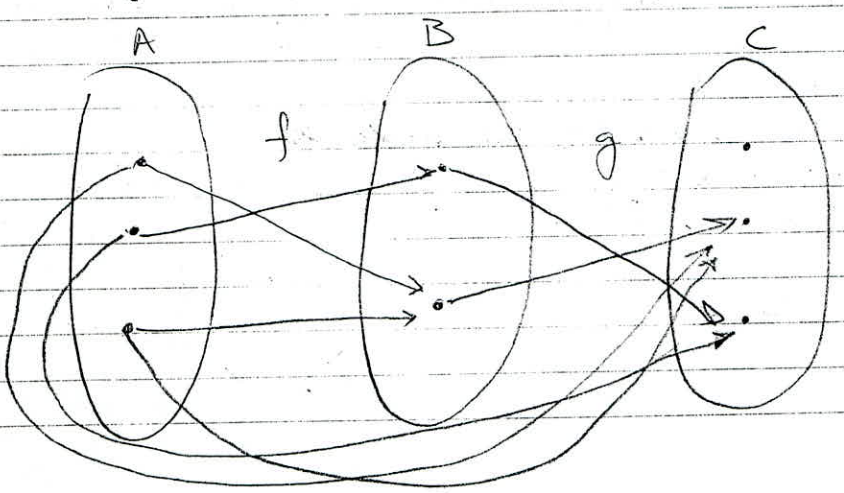
$$f(X) = \{f(x) \in B : x \in X\}$$

Verifique, para $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, quais relações são funções

(i) $\{(a,1), (b,2), (c,3)\}$
(ii) $\{(a,1), (b,2), (c,3), (d,4), (d,5)\}$
(iii) $\{(a,1), (b,2), (c,3), (d,4), (c,5)\}$
(iv) $\{(a,1), (b,2), (c,2), (d,1)\}$.

Definição (Função Composta). Considere as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$. Fica definida a função $g \circ f: A \to C$ tal que

$$[g \circ f](a) = g(f(a)) \text{ para todo } a \in A$$



$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Vocês já devem ter percebido que na apresentação da teoria ingênua de conjuntos usamos definições que se baseavam em algumas noções fundamentais como "todo", "algum", "não", "e", "ou", "se ..., então..." ou "se, e somente se".

Se pudessemos construir uma linguagem formal em que nossas inferências a partir desses conectivos linguísticos pudessem ser representadas de modo preciso e se pudessemos axiomatizar essas inferências, poderíamos axiomatizar a teoria dos conjuntos. Essa hipótese de Frege para resolver um dos desafios de Hilbert para a matemática tinha uma ambição e alcance muito mais amplo do que a fundamentação da matemática. Se todos os domínios do conhecimento descrevem relações entre objetos e conjuntos de objetos e se cada objeto ou conjunto puder ser denotado com precisão por determinado conceito então podemos construir uma linguagem formal capaz de expressar sentenças, verdadeiras ou falsas, sobre qualquer domínio do conhecimento.

Vamos agora atrás desse desafio. Vamos começar com uma linguagem simplificada, chamada de linguagem proposicional LP.
Tomaremos como "unidade de sentido" sentenças que possam ser verdadeiras ou falsas e vamos construir sentenças mais complexas a partir de sentenças mais simples por meio de negações, conjunções, disjunções, condicionais, equivalências.
A construção da linguagem será "composicional" de modo que seja possível mapear de que forma cada sentença mais simples contribui para a determinação da verdade ou falsidade de sentenças complexas por ela compostas.

Vou chamar a capacidade de cada enunciado em contribuir para determinar a verdade ou falsidade do enunciado complexo de seu "<u>valor semântico</u>".

A chave da construcão dessa linguagem formalizada está na seguinte tese:

T.1. O valor semântico de um enunciado é uma função do valor semântico de seus enunciados componentes.

6. LINGUAGEM LP

Para especificar a linguagem de LP introduzimos um conjunto de símbolos S. Qualquer sequencia de símbolos incluindo o vazio é uma expressão de LP (EXP_{LP}). Em seguida definiremos um subconjunto $FOR_{LP} \subseteq EXP_{LP}$ dado das fórmulas bem formadas de LP, por meio de um conjunto de regras de formação, que chamamos de gramática de LP.

Definição (Símbolos de LP). A linguagem LP possui os seguintes conjuntos de símbolos:

VAR = variáveis proposicionais: $p, q, r, p_1, q_1, r_1, \ldots$ (lista infinita)

CON = conectivos lógicos: $\neg$ (símbolo de negação)

$\wedge$ (símbolo de conjunção)

$\vee$ (símbolo de disjunção)

$\rightarrow$ (símbolo de implicação)

$S = VAR \cup CON$

Vamos definir agora a gramática de LP, de modo recursivo, usando α, β como variáveis sintáticas metalinguísticos representando expressões quaisquer de LP.

Definição. O conjunto das fórmulas de LP, FOR_{LP}, é o menor conjunto de expressões de LP que satisfaz as seguintes cláusulas

(i) se $\alpha \in VAR$, então $\alpha \in FOR$

(ii) se $\alpha \in FOR$, então $\neg\alpha \in FOR$

(iii) se $\alpha, \beta \in FOR$, então $\alpha \wedge \beta \in FOR$

(iv) se $\alpha, \beta \in FOR$, então $\alpha \vee \beta \in FOR$

(v) se $\alpha, \beta \in FOR$, então $\alpha \rightarrow \beta \in FOR$