

Cálculo da função de correlação temporal

$$g_1(\tau) = \text{Re} \left\{ \left\langle e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}(\tau) - \vec{r}(t))} e^{-i\omega_0 \tau} \right\rangle_{\substack{\text{tempo} \\ \text{longo}}} \right\} =$$

$$= \text{Re} \left\{ F_S(k, \tau) e^{-i\omega_0 \tau} \right\} = \text{Re} \left\{ \langle \tilde{E}(t+\tau) \tilde{E}(t) \rangle^* \right\}$$

Em 1D : $F_S(k, \tau) \equiv \left\langle e^{-ik [x(t+\tau) - x(t)]} \right\rangle_{\substack{\text{tempo} \\ \text{longo}}} \xrightarrow{\text{obs:}} \Delta$

média temporal $\rightarrow$ média de ensemble

Para um processo estacionário

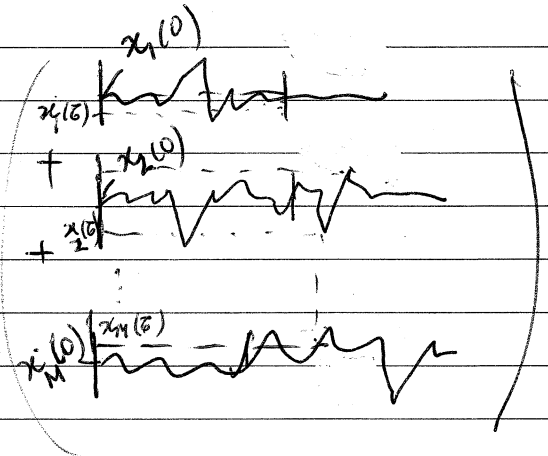
$$\Rightarrow F_S(k, \tau) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M e^{ik [x_j(\tau) - x_j(0)]}$$

A soma é sobre
M realizações do processo

Desta forma, $x_j(\tau)$ ($j=1, \dots, M$) define um conjunto de variáveis aleatórias e portanto, um processo.

E também $x_j(0)$ ($j=1, \dots, M$) define outro conjunto de V.A. e portanto, outro processo.

$\frac{1}{M}$



$$F_S(k, \tau) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^M \int_{-\infty}^{+\infty} dr e^{ikr} \delta \{ r - [x_j(\tau) - x_j(0)] \} =$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dr e^{ikr} \left[\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \delta \{ r - [x_j(\tau) - x_j(0)] \} \right]$$

(*)

Obs A função de correlação do campo elétrico
corresponde à média do produto

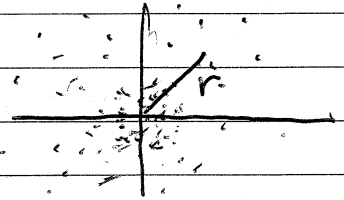
$$E^*(z)E(0) = \exp[ik(x(z) - x(0))]$$

Portanto : 1) $E^*(z)E(0)$ é um processo estocástico pois
é uma função do processo "diferença"
entre dois processos de Wiener.

2) Dn : $E^*(z)E(0)$ é um processo
ESTACIONÁRIO.

O termo em colchetes

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \delta \{ r - [x_j(t) - x_j(0)] \}$$



coincide com a fração das realizações (ou caminhadas) que se encontram a uma distância r da origem, de onde partem em $t_0 = 0$,
 ^{após}
 um tempo t

No limite em que $M \rightarrow \infty$, os pontos na região próxima a r (ou nas "vizinhanças") se adensam de maneira que a média acima define a densidade de pontos nesta vizinhança: $C(r, t)$

No sentido de Poisson, $C(r, t)$ coincide com a PROBABILIDADE CONDICIONAL:

$$p(r, t | 0, t_0 = 0) = C(r, t)$$

que coincide com a solução da Equação de Difusão para a condição inicial

$$C(r, 0) = f(r)$$

$$C(r, t) = p(r, t | 0, t_0 = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t D}} e^{-r^2/2Dt}$$

$$(1) \text{ Em } t = 0 \quad \lim_{t \rightarrow 0} C(r, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi t D}} e^{-r^2/2Dt}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq 0 \\ \infty & \text{se } r = 0 \end{cases}$$

$$\text{Mas} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} C(r, 0) dr = 1$$

$$\text{Então, em } t = 0 \quad C(r, 0) = \delta(r) \quad \checkmark$$

Por outro lado ...

$$\frac{1}{M} \sum_j^M \delta\left\{r - [x_j(t) - x_j(0)]\right\} \stackrel{t=0}{=} =$$

$$= \frac{1}{M} \sum_j^M \delta(r) = \delta(r) \quad \checkmark$$

(2) A expressão (*) da pg 1 mostra que

$F_S(k, t)$ coincide com a Transformada de Fourier

$$\text{de } p(r, t | 0, t_0 = 0) = C(r, t)$$

$$\text{Ou seja: } \boxed{F_S(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dr e^{-ikr} C(r, t)} \quad (**)$$

Assim, para calcular $F_S(k, t)$ utilizaremos que

$C(r, t)$ satisfaz a Eq. de Difusão

$$\text{Em 1D: } \boxed{\frac{\partial C(r, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(r, t)}{\partial r^2}}$$

$$\left[\text{em 3D} \dots \frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C \right]$$

Considere o lado direito de (**)

$$\frac{d}{d\tau} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dr e^{-ikr} C(r, \tau)}_{F_S(k, \tau)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dr e^{-ikr} \underbrace{\frac{\partial C}{\partial \tau}} =$$

$$= D \int_{-\infty}^{+\infty} dr e^{-ikr} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \quad \begin{matrix} = \\ \uparrow \\ \text{"integração por partes"} \end{matrix}$$

$$= D \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) e^{-ikr} \right|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (-ik) e^{-ikr} \left(\frac{\partial C}{\partial r} \right) dr \right\}$$

$$= D \cdot ik \left\{ e^{-ikr} C(r, \tau) \right|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (-ik) e^{-ikr} C(r, \tau) dr \right\}$$

$$= -DK^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikr} C(r, \tau) dr}_{F_S(k, \tau)} = -DK^2 F_S(k, \tau)$$

Então : (... da 1ª linha ...)

$$\frac{d}{d\tau} F_S(k, \tau) = -DK^2 F_S(k, \tau)$$

$$-DK^2 \tau$$

Solução : $F_S(k, \tau) = F_S(k, 0) e$

Note : $F(k, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dr e^{-ikr} \underbrace{C(r, 0)}_{f(r)} = 1$

$$F_S(k, \tau) = e^{-DK^2 \tau} \Rightarrow \left[g_1(\tau) = \text{Re } e^{-k^2 D \tau - i \omega_0 \tau} \right]$$