Lista 9 - Diagonalização. Cônicas. - Gabarito

1. Calcule os autovalores e autovetores de $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e de A^2. Elabore duas afirmações sobre a relação dos autovetores e autovalores dessas duas matrizes.
   Resposta: a) Os autovalores de A^2 são os quadrados dos autovalores de A. b) Os autovetores de A são autovetores de A^2.

2. Encontre o posto e todos os quatro autovalores da matriz quadriculada
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Quais autovetores correspondem aos autovalores não nulos?
   Resposta: Os autovalores não nulos são: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$, os autovetores correspondentes são: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, encontre A^{100} diagonalizando A.
   Resposta: $A^{100} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \cdot 5^{100} + 1 & 3(5^{100} - 1) \\ (5^{100} - 1) & 5^{100} + 3 \end{bmatrix}$.
   Utilizando os autovalores e autovetores, considere $A = PDP^{-1}$, $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$
   e assim sucessivamente até $A^2 = PD^{100}P^{-1}$.

4. Suponha que $A = P^{-1}DP$, qual é a matriz de autovalores de $A + 2I$? e qual a matriz de autovetores?
   Resposta: Observar $A + 2I = P^{-1}DP + 2I = P^{-1}DP + 2P^{-1}P = P^{-1}(D + 2I)P$. Assim os valores da matriz diagonal de autovalores foram incrementados em duas unidades, portanto, os autovalores de $A + 2I$ são os autovalores de A incrementados em duas unidades. Os autovetores continuam sendo os mesmos.

5. As matrizes a seguir, são definida positivas?

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   Resposta: A matriz A é definida positiva, a matriz B não é, pois tem um autovalor igual a -1.

6. Um esguicho, posicionado na origem, lança água e esta descreve uma parábola de vértice $V = (1, 5)$. Calcular a altura h do filete de água, a uma distância de 1.5 metros da origem, sobre a horizontal OX.
   Resposta: Observar que $(0, 0)$ pertence a parábola, então $h = \frac{15}{4}$.

7. Determine a equação da circunferência cujo centro é o ponto $(-4, -1)$ e que é tangente à reta $3x + 2y = 12$.
   Resposta: Observar que o raio da circunferência é a distância do ponto à reta. A circunferência é $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 52$ ou $x^2 + y^2 + 8x + 2y = 35$.

8. Dois dos vértices de um polígono regular de quatro lados coincidem com os focos da elipse $9x^2 + 5y^2 = 1$ e os outros dois com os vértices do eixo menor da elipse. Calcular a área do polígono.
   Resposta: O polígono é um quadrilátero formado por dois triângulos, cuja base é a distância focal, e a altura é o semi-eixo menor da elipse. Assim: $Area = \frac{4\sqrt{5}}{45}$ unidades quadradas.

9. Escreva a equação canônica da elipse, dados:

   (a) os focos $(\pm 5, 0)$ e dois vértices $(\pm 13, 0)$.
   Resposta: A equação da elipse é $\mathcal{E}: \quad \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$.

   (b) o centro $(0, 0)$, um dos focos $(0, -\sqrt{40})$ e um ponto $\left(\sqrt{5}, \frac{14}{3}\right)$.
   Resposta: Como o foco está no eixo Y e $c^2 = 40$, temos $\mathcal{E}: \quad \frac{y^2}{40+b^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$, e como o ponto pertence a elipse, deve satisfazer a equação. Substituindo as coordenadas do ponto na equação temos $b^2 = 9$, logo $\mathcal{E}: \quad \frac{y^2}{49} + \frac{x^2}{9} = 1$.

10. Qual a equação do conjunto de pontos $P = (x, y)$ cuja soma das distâncias a $F_1 = (1, 0)$ e a $F_2 = (3, 0)$ é igual a 5?
    Resposta: É uma elipse cuja equação é $\mathcal{E}: \quad \frac{(x-2)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{\frac{21}{4}} = 1$, dado que $a = \frac{5}{2}$, $c = 1$.