ZAB0161 - Álgebra Linear com Aplicações em Geometria Analítica

Diagonalização em Equações Quadráticas

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

ZAB (Dpto. de Ciências Básicas) – FZEA – USP

Por quê diagonalizamos???

Cônicas: Equações Reduzidas (Equações canônicas)

- Parábola

$$x^2 = 4py$$

- Elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{onde } a^2 = b^2 + c^2$$

- Hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{onde } c^2 = a^2 + b^2$$

Assíntotas: $y = \pm \frac{b}{a} x$

Diagonalização de matrizes simétricas

Teorema: Todos os autovalores de uma matriz simétrica são números reais.

Teorema: Os auto vetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.

Teorema: Se A é uma matriz simétrica então existe uma matriz ortogonal P, tal que $P^{-1}AP = D$

é uma matriz diagonal. Assim:

$$P^t AP = D \iff A = PDP^t$$

Nota: D pode ser construída com os autovalores e P com os autovetores (unitários e ortogonais entre si).

O que vimos, o que vamos ver ...

1. Transformar uma expressão quadrática com termos mistos em expressão sem termos mistos.
2. Representa realizar uma transformação de coordenadas via uma transformação linear.
3. **Hoje:** Se a equação quadrática é completa (tem termos quadrados, lineares e constantes) :
   1. Trabalhar os termos mistos para eliminá-los
   2. Tendo apenas quadrados puros e lineares realizar a completação de quadrados para obter apenas termos com quadrados puros.
   3. Ambos processos é realizar uma transformação afím.

O que pretendemos trabalhar?

Expressões (completas) como as seguintes, podem ser expressadas apenas em quadrados de variáveis?

(isto é, sem termo misto e sem termo linear)

a) $2x^2 + 2y^2 + 2(4zx + z^2) - 2y + x - z = 3$

b) $2z^2 + x^2 + 2y^2 + 4x(y + 2z) - 2z + y = 1$

c) $x^2 + 2z^2 + y^2 + 4z(2x + y) - 2x - 36 = 0$

d) $4xy - x^2 + 2x - 3z + 15 = 0$

e) $\boldsymbol{6x^2 + 9y^2 - 4xy - 20\sqrt{5}(x + 2y) + 5 = 0}$

Caso quadrático completo

Considerando uma expressão quadrática completa:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

Temos a equação quadrática com parte quadrática, parte linear e parte constante:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

Se aplicarmos a diagonalização obtemos:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

Fazemos a mudança de variável

$$\bar{X} = P^t X$$

Caso quadrático completo

Obtemos:

$$\begin{bmatrix}\bar{x} & \bar{y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x} \\ \bar{y}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}d & e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} + f = 0$$

Isto é:

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} \bar{X} + \begin{bmatrix}d & e\end{bmatrix} X + f = 0$$

Mas isto não tem sentido:

Temos duas matrizes variáveis diferentes

Caso quadrático completo

Então, em

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \bar{X} + [d \quad e] X + f = 0$$

deve ser transformada também a variável X da parte linear, e isso é possível utilizando a mudança

$$X = P\bar{X}$$

então

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \bar{X} + [d \quad e] P\bar{X} + f = 0$$

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \bar{X} + [m \quad n] \bar{X} + f = 0$$

Caso quadrático completo

Observar

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \bar{X} + [m \quad n]\bar{X} + f = 0$$

$$\bar{X}^t D \bar{X} + \bar{B}\bar{X} + f = 0 \quad \text{com:} \quad \bar{B} = [d \quad e]P.$$

É uma expressão com apenas quadrados puros e termos lineares das incógnitas.

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + m\bar{x} + n\bar{y} + f = 0.$$

Aplicando a completação de quadrados só ficam termos quadrados sem parte linear ou apenas termos lineares de variáveis sem parte quadrática.

Resumo

Dada a equação quadrática

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

Diagonalizando com $A = PDP^t$ e mudanças de variáveis $\bar{X} = P^tX$ e $X = P\bar{X}$, temos

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \bar{X} + \begin{bmatrix} m & n \end{bmatrix} \bar{X} + f = 0$$

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + m\bar{x} + n\bar{y} + f = 0$$

$$(\lambda_1 \bar{x}^2 + m\bar{x}) + (\lambda_2 \bar{y}^2 + n\bar{y}) + f = 0.$$

Exemplo

Seja a expressão quadrática completa:

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy - 20\sqrt{5}(x + 2y) + 5 = 0.$$

Diagonalizando a parte quadrática principal, temos a forma quadrática

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy = X^t \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} X$$

Calculando os autovalores e autovetores temos

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy = \bar{X}^t \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \bar{X}$$

onde $\bar{X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X$ e $\mathrm{X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \bar{X}$.

Exemplo (cont)

Substituindo na equação quadrática completa temos:

$$\underbrace{6x^2 + 9y^2 - 4xy} - 20\sqrt{5}(x + 2y) + 5 = 0$$

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \bar{X} \quad - 20\sqrt{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\ X = -5$$

$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \bar{X} - 20\sqrt{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \bar{X}} = -5$$

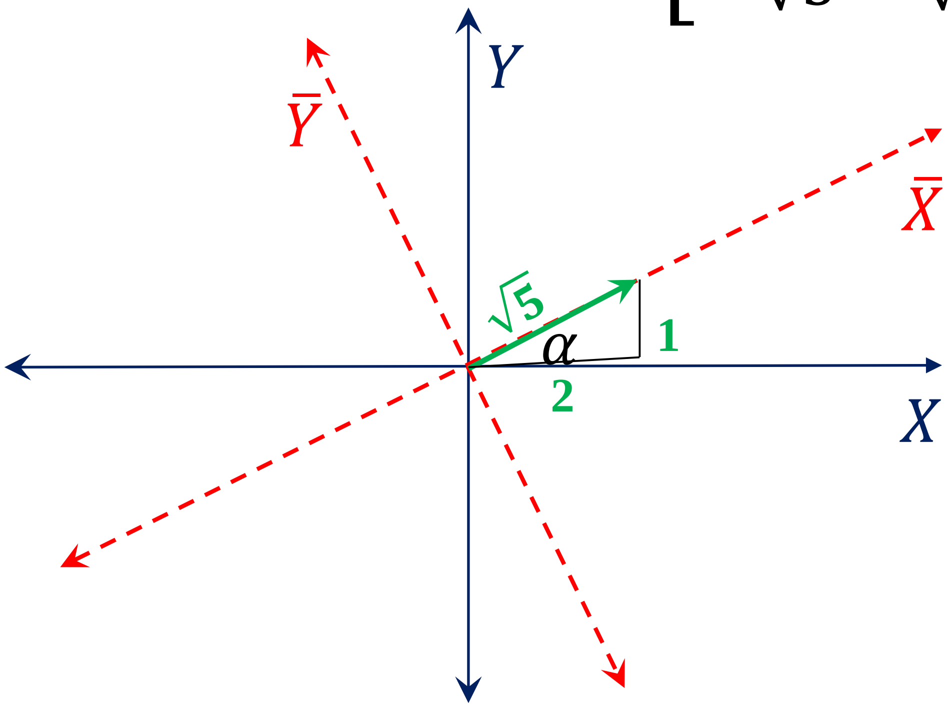
$$\bar{X}^t \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \bar{X} - 20\begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}\bar{X} = -5.$$

Representada como expressão quadrática

$$5\bar{x}^2 + 10\bar{y}^2 - 80\bar{x} - 60\bar{y} = -5.$$

Olhando a mudança de variável

$$\bar{X} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} X$$



Exemplo (cont)

Vamos completar quadrados em

$$\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 - 16\bar{x} - 12\bar{y} = -1$$

temos

$$(\bar{x}^2 - 16\bar{x}) + 2(\bar{y}^2 - 6\bar{y}) = -1$$

$$(\bar{x}^2 - 16\bar{x} + 64 - 64) + 2(\bar{y}^2 - 6\bar{y} + 9 - 9) = -1$$

$$(\bar{x} - 8)^2 + 2(\bar{y} - 3)^2 = 81$$

Para simplificar fazemos:

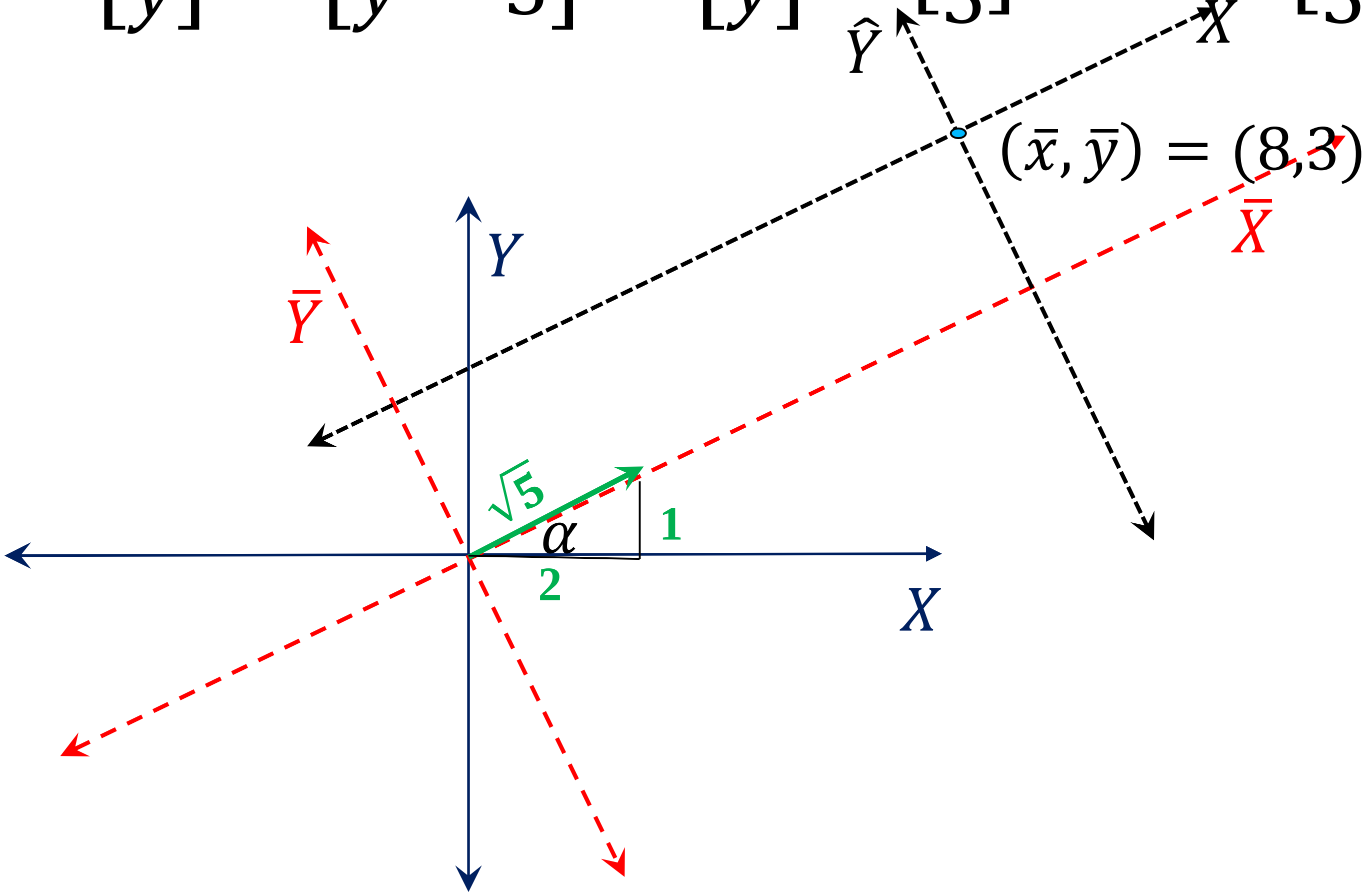
$$\hat{x}^2 + 2\hat{y}^2 = 81$$

Isto é, temos criado uma nova variável

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} - 8 \\ \bar{y} - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \bar{X} - C$$

Olhando a mudança de variável

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} - 8 \\ \bar{y} - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \bar{X} - \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Exemplo (cont)

No exemplo, partimos de

$$\boldsymbol{6x^2 + 9y^2 - 4xy - 20\sqrt{5}(x + 2y) + 5 = 0}$$

Primeira mudança de variável: $\bar{X} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X$

$$\boldsymbol{\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 - 16\bar{x} - 12\bar{y} = -1}$$

Segunda mudança de variável: $\hat{X} = \bar{X} - \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\hat{x}^2 + 2\hat{y}^2 = 81}$$

Mudança de variáveis total:

$$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Resumo

Em resumo, partindo de

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

Utilizando a transformação (primeira mudança)

$$\bar{X} = P^t X$$

Obtemos uma expressão da forma

$$m\bar{x}^2 + n\bar{y}^2 + p\bar{x} + q\bar{y} + r = 0$$

Utilizando a translação (segunda mudança)

$$\hat{X} = \bar{X} - C$$

Obtemos uma expressão **(se possível)**

$$M\hat{x}^2 + N\hat{y}^2 + R = 0$$

Resumo

Juntando as mudanças de variáveis realizadas temos

$$\hat{X} = \bar{X} - C = P^t X - C$$

Isto representa uma transformação afim:

$$\hat{X} = T(X) = P^t X - C.$$

O caminho inverso é válido, fazemos

$$P^t X = \hat{X} + C$$

$$X = P\left(\hat{X} + C\right) = P\hat{X} + PC = P\hat{X} + R.$$

As variáveis se relacionam usando:

$$\hat{X} = P^t X - C \quad \Leftrightarrow \quad X = P\hat{X} + R.$$

Exemplo 3D

Simplifique a expressão quadrática

$$3z^2 + 3y^2 + yz - x + 2\sqrt{2}y - 2\sqrt{2}z = 1$$

No formato matricial

$$X^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -1 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{bmatrix} X = 1$$

Precisamos diagonalizar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3D

Diagonalizando a forma quadrática, temos

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = \frac{7}{2} \qquad \lambda_3 = \frac{5}{2}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A forma sem termos mistos é

$$\frac{7}{2}\bar{y}^2 + \frac{5}{2}\bar{z}^2 - \bar{x} - 4\bar{z} = 1$$

Exemplo 3D

$$7\bar{y}^2 + 5\bar{z}^2 - 2\bar{x} - 8\bar{z} = 2$$

Complementando

$$7\bar{y}^2 + 5\left(\bar{z}^2 - \frac{8}{5}\bar{z}\right) - 2\bar{x} = 2$$

$$7\bar{y}^2 + 5\left(\bar{z}^2 - \frac{8}{5}\bar{z} + \frac{16}{25} - \frac{16}{25}\right) - 2\bar{x} = 2$$

$$7\bar{y}^2 + 5\left(\bar{z} - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{16}{5} - 2\bar{x} = 2$$

$$7\hat{y}^2 + 5\hat{z}^2 - 2\hat{x} = \frac{26}{5}.$$

Observar uma variável ficou linear não quadrática.

Olhando as mudanças de variáveis

A relação entre a primeira e segunda variáveis é:

$$\bar{X} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X \quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{X}$$

Colocando como sistema de equações:

$$\begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z) \\ \bar{z} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-y + z) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \bar{x} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{y} - \bar{z}) \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{y} + \bar{z}) \end{cases}$$

Olhando as mudanças de variáveis

A relação entre a segunda e terceira variáveis é:

$$\hat{X} = \bar{X} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \quad \bar{X} = \hat{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Colocando como sistema de equações:

$$\begin{cases} \hat{x} = \bar{x} \\ \hat{y} = \bar{y} \\ \hat{z} = \bar{z} - \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bar{x} = \hat{x} \\ \bar{y} = \hat{y} \\ \bar{z} = \hat{z} + \frac{4}{5} \end{cases}$$

Olhando as mudanças de variáveis

A relação entre a primeira e terceira variáveis é:

$$\hat{X} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \hat{X} + \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Colocando como sistema de equações:

$$\begin{cases} \hat{x} = x \\ \hat{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(y + z) \\ \hat{z} = \frac{\sqrt{2}}{2}(z - y) - \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \hat{x} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{y} - \hat{z} - \frac{4}{5}) \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\bar{y} + \bar{z} + \frac{4}{5}\right) \end{cases}$$

Exercícios

Diagonalize (se possível) a equação quadrática para uma equação quadrática sem termos mistos, utilizando autovalores da matriz da forma quadrática

1. $xy + xz + x^2 + y^2 + 2yz + 4z^2 = 2$
2. $x^2 + 2z^2 + y^2 + 4z(2x + y) + 2x - y = 36$
3. $2x^2 + 2z^2 + 2y^2 + 8zx - 3x = 1 - x$

Exercícios

Diagonalize (se possível) a equação quadrática para uma equação quadrática sem termos mistos, utilizando autovalores da matriz da forma quadrática

1. $xy + xz + x^2 + y^2 + 2yz + 4z^2 = \frac{1}{2}$

Resolução: Formato matricial:

$$X^t \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4 \end{bmatrix} X = \frac{1}{2}$$

Observar não tem termos lineares, não precisará de completação de quadrados!

Exercício 1

a) Encontrar os autovalores da forma quadrática:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}\begin{matrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \\ \frac{1}{2} & 1 \end{matrix}\Bigg| = 0$$

$$(1-\lambda)^2(4-\lambda) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(1-\lambda) - (1-\lambda) - \frac{1}{4}(4-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)^2(4-\lambda) + \frac{1}{2} - \frac{5}{4}(1-\lambda) - \frac{1}{4}(4-\lambda) = 0$$

$$4(1-\lambda)^2(4-\lambda) + 2 - 5(1-\lambda) - (4-\lambda) = 0$$

Exercício 1

$$(1-\lambda)[4(1-\lambda)(4-\lambda)-5]-2+\lambda=0$$

Observamos que não dá para tirar um fator comum, então precisamos desenvolver:

$$-4\lambda^3+24\lambda^2-30\lambda+9=0$$

Podem tentar Ruffini, mas não dá certo com números fáceis. Nestes casos é necessário aplicar métodos numéricos, como o Método de Newton, com ele obtemos os valores:

$\lambda_1 \cong 0.45 \quad \lambda_2 \cong 1.133 \quad \lambda_3 \cong 4.418$

Exercício 1

b) Os autovetores correspondentes são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 4.245 \\ -5.673 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -2.438 \\ -1.648 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0.193 \\ 0.321 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então os cálculos podem ser complicados mas existe a diagonalização e portanto existe solução para nosso problema.

Este exercício é ilustrativo, não é para a prova.

Apresenta que com matriz simétrica é diagonalizável mas se tomar uma matriz não simétrica???

Exercício 1 – não simétrica

Diagonalize (se possível) a equação quadrática para uma equação quadrática sem termos mistos, utilizando autovalores da matriz da forma quadrática

1. $xy + xz + x^2 + y^2 + 2yz + 4z^2 = \frac{1}{2}$

Resolução: Formato matricial:

$$X^t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} X = \frac{1}{2}$$

Exercício 1 – não simétrica

a) Encontrar os autovalores da forma quadrática:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Observar o determinante é fácil:

$$(1-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

Autovalores são:

$\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 1$ (de multiplicidade 2)

b) Autovetores:

b.1) Para o segundo autovalor esperamos dois autovetores, mas:

Exercício 1 – não simétrica

Para: $\lambda_1 = 4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Exercício 1 – não simétrica

Para: $\lambda_1 = 4$

Temos um grau de liberdade permite um autovetor:

z é livre (qualquer real) mas $y = \frac{2}{3}z$ e $x = \frac{5}{9}z$

$$v_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{9}z \\ \frac{2}{3}z \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9}z \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Ainda não faça unitário, devemos verificar se será possível diagonalizar!

Exercício 1 – não simétrica

Para: $\lambda_2 = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Temos um grau de liberdade permite um autovetor:

Como vemos do sistema último: $y = 0$ e $z = 0$

Mas não existe restrição para x, portanto tomamos o x livre (qualquer real).

Exercício 1 – não simétrica

Para: $\lambda_2 = 1$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obviamente vetor zero é também solução, isto é:

$$\cancel{v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Mas por ser vetor nulo não pode ser considerado autovetor. Portanto, a matriz e portanto a forma quadrática não pode ser diagonalizável.

Exercício 1 – Posso multiplicar??

OUTRA MANEIRA? Lembrando que na matriz tínhamos várias frações, então, porque não multiplicar desde o início? para simplificar?

$$X^t \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} X = 1$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \\ 1 & 2 \end{matrix} \Bigg| = 0$$

$$(2-\lambda)^2(8-\lambda) + 4 - (2-\lambda) - 4(2-\lambda) - (8-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)^2(8-\lambda) + 4 - 5(2-\lambda) - (8-\lambda) = 0$$

Exercício 1

$$(2-\lambda)[(2-\lambda)(8-\lambda)-5]-4+\lambda=0$$

Aparentemente o fator $(2-\lambda)$ deveria ser comum mas não tem como, verifique!

Então, precisamos desenvolver também, como antes:

$$-\lambda^3+12\lambda^2-30\lambda+18=0$$

Os autovalores podem ser calculados, mas também não é simples a tarefa, precisa de cálculo numérico

$\lambda_1 \cong 0.9 \quad \lambda_2 \cong 2.266 \quad \lambda_3 \cong 8.835$

Os autovalores são o dobro dos anteriores (cuidado), os autovetores são os mesmos anteriores.