ZAB0161 - Álgebra Linear com Aplicações em Geometria Analítica

Autovalores e Autovetores em Formas Quadráticas

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

ZAB (Dpto. de Ciências Básicas) – FZEA – USP

Autovalor e autovetor de uma matriz

Dada uma matriz A, um número escalar λ é **valor próprio** de A**,** se existe um vetor não nulo X que satisfaz:

$$AX = \lambda X$$

O vetor não nulo X correspondente ao autovalor λ é denominado de **vetor próprio** de A.

Se λ é um autovalor de A, e se $X_1, X_2, \ldots, X_r$ são autovetores linearmente independentes de λ, então $\{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_r X_r \;/\; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}\}$

é chamado de **autoespaço do autovalor** λ de A.

Autovalor e autovetor de uma matriz

Para a matriz $A_{n \times n}$, o polinômio

$$\det(A - \lambda I)$$

de grau n, é chamado de **polinômio característico** da matriz A.

A equação

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

é chamada de **equação característica**.

Possibilita calcular os candidatos a autovalores.

Um autovalor pode ser $\lambda = 0$, mas um autovetor nunca pode ser nulo $X \neq 0$ (vetor nulo).

Autovalores de matrizes simétricas

Teorema: Todos os autovalores de uma matriz simétrica são números reais.

Teorema: Os autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.

Definição: Uma matriz P, não singular é chamada de **matriz ortogonal** se $P^{-1} = P^{t}$.

Teorema: Uma matriz P é **ortogonal** se e somente se suas colunas formam um conjunto ortonormal (ortogonais e unitários).

Diagonalização de uma matriz

Seja uma matriz $A_{n\times n}$, não diagonal.

A **diagonalização** da matriz A é o processo de encontrar uma matriz diagonal D e outra matriz não singular P, que satisfaz $A = PDP^t$.

Isto é, determinar uma diagonal D congruente com A

$$D \approx A$$

Processo para diagonalizar (simétrica)

1. Calcular os autovalores (se existirem) da equação

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

2. Para cada autovalor encontrado, calculamos o(s) autovetor(es) correspondente(s), da equação

$$(A - \lambda I)X = 0$$

3. Montar uma matriz diagonal D formada pelos autovalores da matriz A. Montar uma matriz P cujas colunas são autovetores unitários e ortogonais de A:

$$A = PDP^t$$

Se possível, a matriz A é **diagonalizável**.

Autovalores e autovetores de uma matriz

O trabalho não é apenas para matrizes simétricas.

Exemplo 5: Voltando para a matriz do exemplo 2.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

1. Autovalores: Resolver $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 8 & 16 \\ 4 & 1-\lambda & 8 \\ -4 & -4 & -11-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

O determinante dá

$$(\lambda - 1)(\lambda + 3)^2 = 0$$

Autovalores e autovetores de uma matriz

Exemplo 5: Obtemos os valores (candidatos a autovalores)

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -3$$

2. Autovetores: Resolver $(A - \lambda I)X = 0$

2.1 Para $\lambda_1 = 1$ encontramos

$$X_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Para $\lambda_2 = -3$ encontramos

$$X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Autovalores e autovetores de uma matriz

Exemplo 5: No segundo autovalor $\lambda_2 = -3$

O sistema é a resolver $(A - \lambda I)X = 0$ ou $(A + 3I)X = 0$:

$$\begin{bmatrix} 5+3 & 8 & 16 \\ 4 & 1+3 & 8 \\ -4 & -4 & -11+3 \end{bmatrix} X = 0$$

Matriz estendida

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 8 & 16 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 0 \\ -4 & -4 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

Percebe-se que duas linhas serão zeradas, dai a probabilidade de se ter dois autovetores.

Autovalores e autovetores de uma matriz

Exemplo 5:

Diagonalizando, podemos montar a matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Para montar P, temos os autovetores

$$X_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \; X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; X_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fazer unitários não é díficil, mas primeiro observar que não são ortogonais.

$$X_1 \cdot X_2 = 1 \quad X_1 \cdot X_3 = 5 \quad X_2 \cdot X_3 = 2$$

Autovalores e autovetores de uma matriz

Então, precisamos ortogonalizar os três autovetores (Gram-Schmidt), caso contrário não teremos matriz ortogonal.

Só após ortogonalizar faça unitários.

Sugiro sempre verificar a fórmula (algum erro) :

$$A = PDP^t$$

Existe um site online para o processo de ortogonalização Gram-Schmidt:

https://pt.symbolab.com/

Diagonalizando Formas Quadráticas

Seja a forma quadrática

$$ax^2 + by^2 + cxy$$

fazendo $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, a forma quadrática matricial é

$$X^t A X = X^t \begin{bmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{bmatrix} X.$$

Se a matriz é diagonalizável

$$A = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{12} & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = PDP^t$$

Diagonalizando Formas Quadráticas

Substituindo na forma quadrática matricial temos

$$X^tAX = X^tPDP^tX = X^tPD(P^tX)$$

Se definimos uma nova variável

$$\bar{X} = P^tX$$

e temos

$$\bar{X}^t = (P^tX)^t = X^tP^{t^t} = X^tP$$

Logo temos uma forma quadrática matricial diagonal

$$X^tAX = \bar{X}^tD\bar{X}$$

Mais ainda:

$$P^tX = \bar{X} \Rightarrow PP^tX = P\bar{X} \Rightarrow \quad X = P\bar{X}$$

Diagonalizando Formas Quadráticas

Exemplo: Seja a forma quadrática

$$2(x^2 + y^2 + xy)$$

fazendo $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, a forma quadrática matricial é

$$X^t A X = X^t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X.$$

A matriz é do exemplo 1. Diagonalizando temos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = PDP^t$$

Diagonalizando Formas Quadráticas

Exemplo: Definindo a nova variável

$$\bar{X} = P^t X$$

Temos a nova forma quadrática matricial diagonal

$$X^t A X = X^t P D P^t X = \bar{X}^t D \bar{X}$$

Também temos o relacionamento

$$X = P\bar{X}$$

Para o exemplo:

$$X^t A X = X^t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = \bar{X}^t D \bar{X} = \bar{X}^t \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{X}$$

Diagonalizando Formas Quadráticas

Então, a forma quadrática

$$2(x^2 + y^2 + xy) = 3\bar{x}^2 + \bar{y}^2$$

Onde:

$$\bar{X} = P^t X = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} X$$

ou

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ \bar{y} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x) \end{cases}$$

Diagonalizando Formas Quadráticas

Por outro lado, por ser P matriz ortogonal, temos

$$\bar{X} = P^t X \Rightarrow P\bar{X} = PP^t X \Rightarrow P\bar{X} = X$$

ou

$$X = P\bar{X} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \bar{X}$$

logo

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} - \bar{y}) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\bar{x} + \bar{y}) \end{cases}$$

Nota: Passar de X para $\bar{X}$ é uma rotação de 45° graus

Diagonalizando Formas Quadráticas

Seja a forma quadrática

$$2x^2 + 3y^2 + 8yz + 9z^2$$

fazendo $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, a forma quadrática matricial é

$$X^t A X = X^t \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} X.$$

A matriz é do exemplo 4. Diagonalizando temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonalizando Formas Quadráticas

Então, a forma quadrática

$$2x^2 + 3y^2 + 8yz + 9z^2 = \bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 + 11\bar{z}^2$$

Onde:

$$\bar{X} = P^t X = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} X$$

ou

$$\begin{cases} \bar{x} = 2\frac{\sqrt{5}}{5}y - \frac{\sqrt{5}}{5}z \\ \bar{y} = x \\ \bar{z} = \frac{\sqrt{5}}{5}y + 2\frac{\sqrt{5}}{5}z \end{cases}$$

Diagonalizando Formas Quadráticas

Também

$$X = P\bar{X} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\bar{X}$$

logo

$$\begin{cases} x = \bar{y} \\ y = 2\frac{\sqrt{5}}{5}\bar{x} + \frac{\sqrt{5}}{5}\bar{z} \\ z = -\frac{\sqrt{5}}{5}\bar{x} + 2\frac{\sqrt{5}}{5}\bar{z} \end{cases}$$

Nota: Passar de X para $\bar{X}$ é uma rotação no espaço.

Exercícios de diagonalização

Exercícios:

1. Substituir a forma quadrática: $3z^2 - 2y^2 - 4xz$

   por outra equivalente sem termos mistos.

2. Para a expressão

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 4xy + 4zw$$

   Determine os autovalores e autovetores.

   (Tente os autovalores -1 e 3).

Exercício 1

1. Substituir a forma quadrática: $3z^2 - 2y^2 - 4xz$ por outra equivalente sem termos mistos.

$$3z^2 - 2y^2 - 4xz = [x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$3z^2 - 2y^2 - 4xz = X^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}X$$

Resolver a equação característica: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\lambda)(-2-\lambda)(3-\lambda) - 4(-2-\lambda) = 0$$

Exercício 1

$$(\lambda)(2+\lambda)(3-\lambda)+4(2+\lambda)=0$$
$$(2+\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4)=0$$
$$(2+\lambda)(\lambda-4)(1+\lambda)=0$$

$\lambda=-2 \quad \lambda=4 \quad \lambda=-1$

Resolver $(A-\lambda I)X=0$ (autovetores) ???

Resposta:

$$3z^2-2y^2-4xz=X^t\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{bmatrix}X=$$

$$\bar{X}^t\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\bar{X}=-\bar{x}^2-2\bar{y}^2+4\bar{z}^2$$

Exercício 1 (informação complementar)

Para os autovalores: $\lambda = -2 \quad \lambda = 4 \quad \lambda = -1$

Os autovetores correspondentes são:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Não esqueça de fazer unitários, se pedirem construir a matriz ortogonal P, ou diagonalizar....

Exercício 2

2. Para a expressão

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 4xy + 4zw$$

Determine os autovalores e autovetores.

(Tente os autovalores -1 e 3).

Levando a formato matricial a forma quadrática:

$$[x \quad y \quad z \quad w]^t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Exercício 2

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante de ordem 4:

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (-1)(2)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)[(1-\lambda)^3 - 4(1-\lambda)] - 2[2(1-\lambda)^2 - 8] = 0$$
$$(1-\lambda)^2[(1-\lambda)^2 - 4] - 4[(1-\lambda)^2 - 4] = 0$$

$$[(1-\lambda)^2 - 4]((1-\lambda)^2 - 4) = 0$$

Exercício 2

$$[(1-\lambda)^2-4]^2=0$$
$$[(1-\lambda)^2-4]=0$$
$$\lambda^2-2\lambda-3=0$$
$$(\lambda-3)(\lambda+1)=0$$

Resolvendo os autovetores:

Para: $\lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 2

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Daqui: $x - y = 0 \ \rightarrow \ x = y,\ z - w = 0 \ \rightarrow \ z = w$

Exercício 2

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ w \\ w \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Autovetores:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 2

Para: $\lambda_2 = -1$

Autovetores:

$$v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz simétrica e matriz ortogonal

Exercícios:

1. Utilize os conceitos aprendidos e obtenha uma forma quadrática (se possível) de apenas quadrados (sem termos mistos e sem termos lineares)
   1. $2x^2 + 2y^2 + 2(4zx + z^2)$
   2. $2z^2 + x^2 + 2y^2 + 4x(y + 2z)$
   3. $x^2 + 2z^2 + y^2 + 4z(2x + y)$
   4. $x^2 + y^2 + 8xy$
   5. $4xy - 3x^2$

Ortogonalização por Gram-Schmidt

2. Diagonalize a forma quadrática sem comutar os fatores de ordem dois, se possível, e forneça a mudança de variáveis que possibilite uma forma quadrática sem termos mistos.
   1. $3xy + yx - x^2 - 3y^2$
   2. $x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2yz + zx$
   3. $x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2zy + xz$
   4. Diagonalizável? $xy + xz + x^2 + y^2 + 2yz + 4z^2$

Autovalores e autovetores dos exercícios

1.1. $\lambda \rightarrow [6;-2;2] \quad v \rightarrow (1,0,1);(-1,0,1);(0,1,0)$

1.2. $\lambda \rightarrow [6;-3;2] \quad v \rightarrow (2,1,2);(-5,2,4);(0,-2,1)$

1.3. $\lambda \rightarrow [6;-3;1] \quad v \rightarrow (4,2,5);(-2,-1,2);(-1,2,0)$

1.4. $\lambda \rightarrow [5;-3] \quad v \rightarrow (1,1);(-1,1)$

1.5. $\lambda \rightarrow [-4;1] \quad v \rightarrow (-2,1);(1,2)$

2.1. $\lambda \rightarrow [-4;0] \quad v \rightarrow (-1,1);(3,1)$

2.2. $\lambda \rightarrow [4;2;1] \quad v \rightarrow (0,1,1);(0,1,0);(-3,-2,1)$

2.3. $\lambda \rightarrow [4;2;1] \quad v \rightarrow (1,0,3);(1,-1,1);(1,0,0)$

2.4. $\lambda \rightarrow [4;1;1] \quad v \rightarrow (5,6,9);(1,0,0);(0,0,0)$

Essa última não é diagonalizável!!