

**ZAB0161 - Álgebra Linear com
Aplicações em Geometria Analítica**

**Processo de Ortogonalização
Gram Schmidt**

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

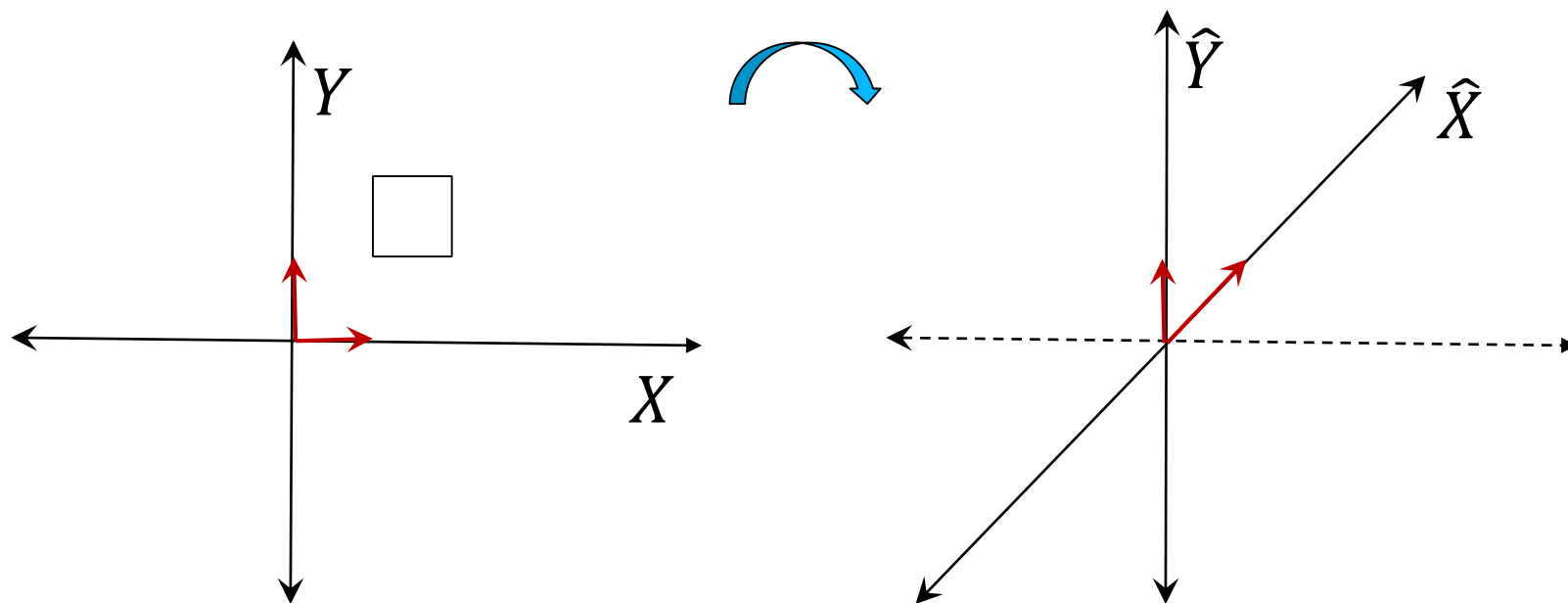
ZAB (Dpto. de Ciências Básicas) – FZEA – USP

Problema anterior

Supondo ser necessário utilizar uma $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, e

$$\beta = \{(1,0), (0,1)\} \text{ e } \delta = \{(1,1), (0,1)\}$$

onde o eixo \hat{X} deve ser a reta diagonal. Então, \hat{Y} não precisa ser vertical, pode ser uma ortogonal a \hat{X} .

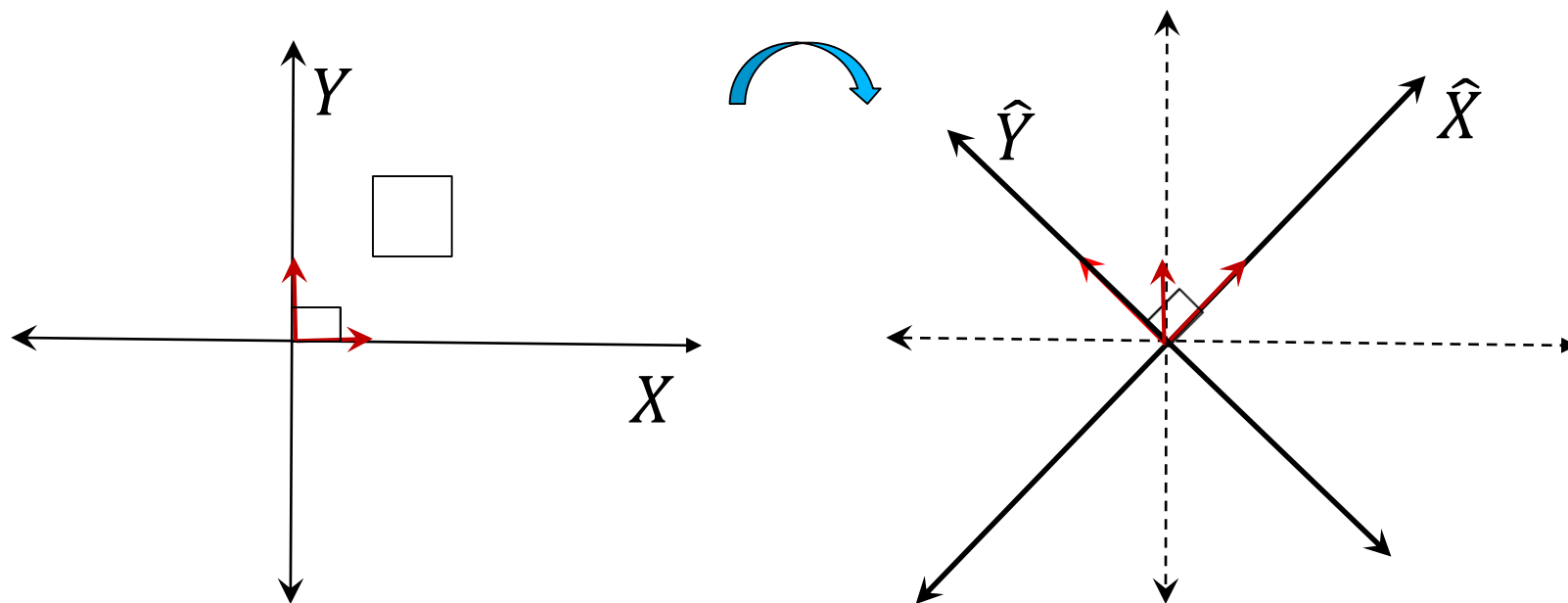


Problema anterior

Então podemos considerar as bases

$$\beta = \{(1,0), (0,1)\} \text{ e } \delta = \{(1,1), (-1,1)\}$$

dessa forma os eixos são ortogonais. A construção do vetor ortogonal é **muito simples** em \mathbb{R}^2



Ortogonalizar em \mathbb{R}^3

Em \mathbb{R}^3 não é tão fácil assim.

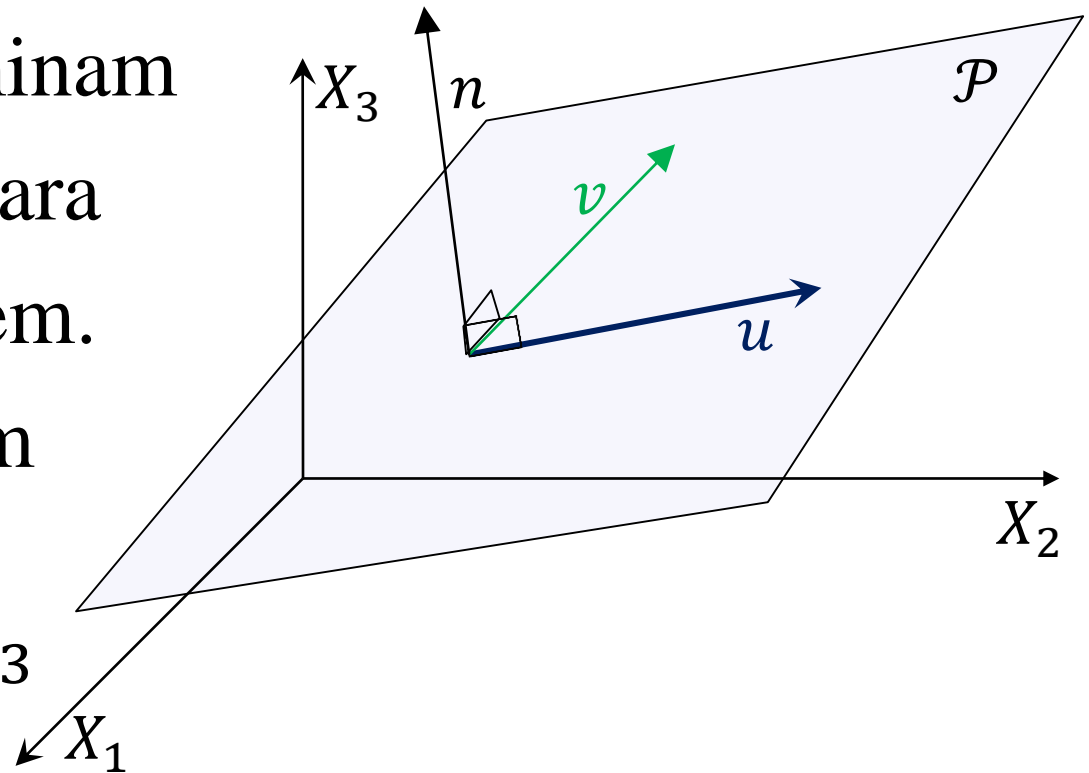
Dados vetores não nulos e não paralelos $u, v \in \mathbb{R}^3$.

Sabemos que determinam um único plano \mathcal{P} , para um ponto de passagem.

Sabemos que existem infinitos vetores

ortogonais a u em \mathbb{R}^3

Procuramos um vetor ortogonal a u mas no plano \mathcal{P} .



Ortogonalizar em \mathbb{R}^3

Resgatamos o plano \mathcal{P} .

No plano podemos girar o vetor u um ângulo de $\frac{\pi}{2}$

graus, obtendo o vetor

chamado de $u_{\mathcal{P}}^{\perp}$, ou

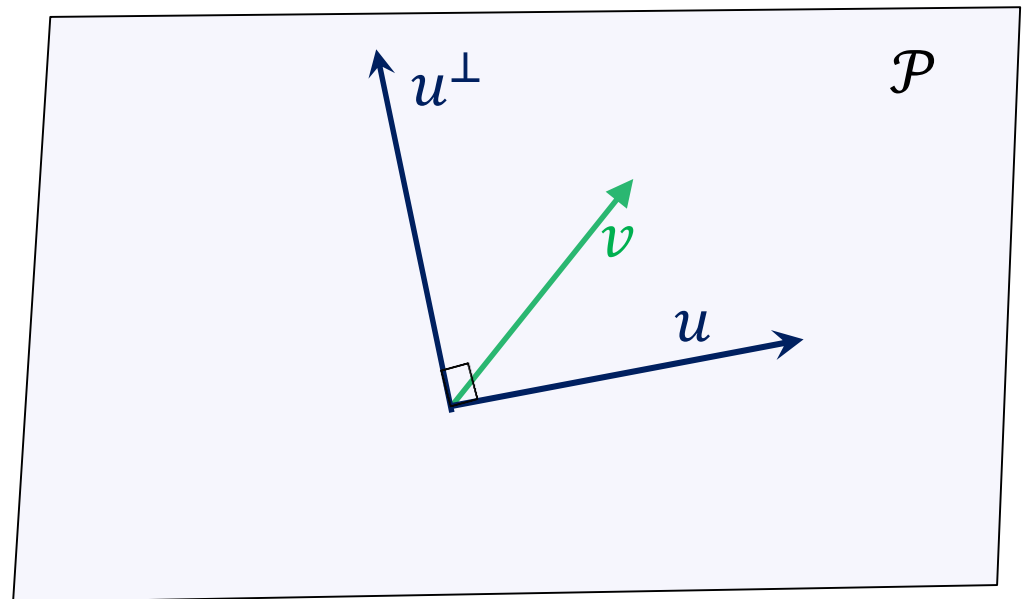
simplesmente de u^{\perp}

(no plano é único).

Nesse caso, apenas

precisamos de u , sem interessar o tamanho de v .

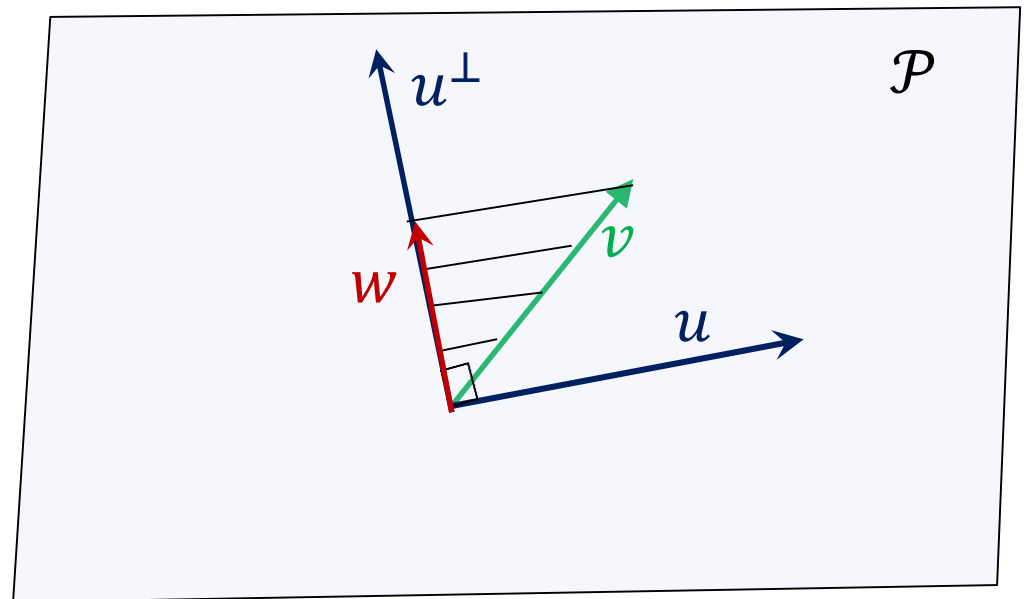
Mas, o vetor v tem importância no problema.



Ortogonalizar em \mathbb{R}^3

A ideia é orthogonalizar u no plano \mathcal{P} , **mas não qualquer orthogonal.**

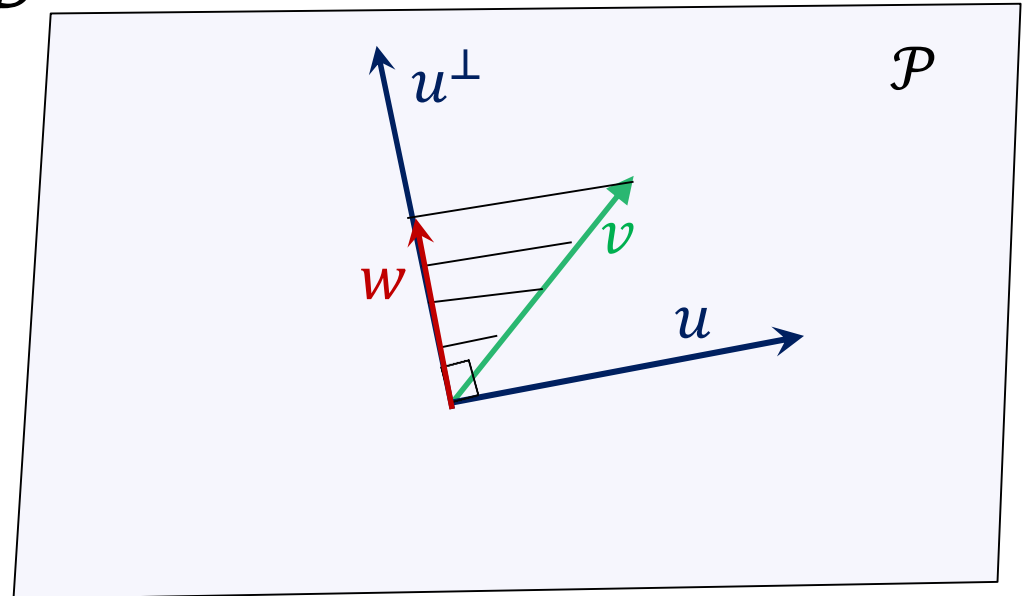
Queremos **preservar informação de v** , portanto uma ideia é conseguir um vetor que seja a projeção orthogonal de v sobre o vetor u^\perp no plano. Vetor vermelho: w .



Ortogonalizar em \mathbb{R}^3

Sempre podemos orthogonalizar u ???

- Precisamos de u e v não nulos, caso contrário não determinam um plano \mathcal{P}
- Também $u \nparallel v$, pois se são paralelos estão em uma reta e não determinam um plano único.
- Verificar que não sejam ortogonais !!!



Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em \mathbb{R}^3 . 2 vetores.

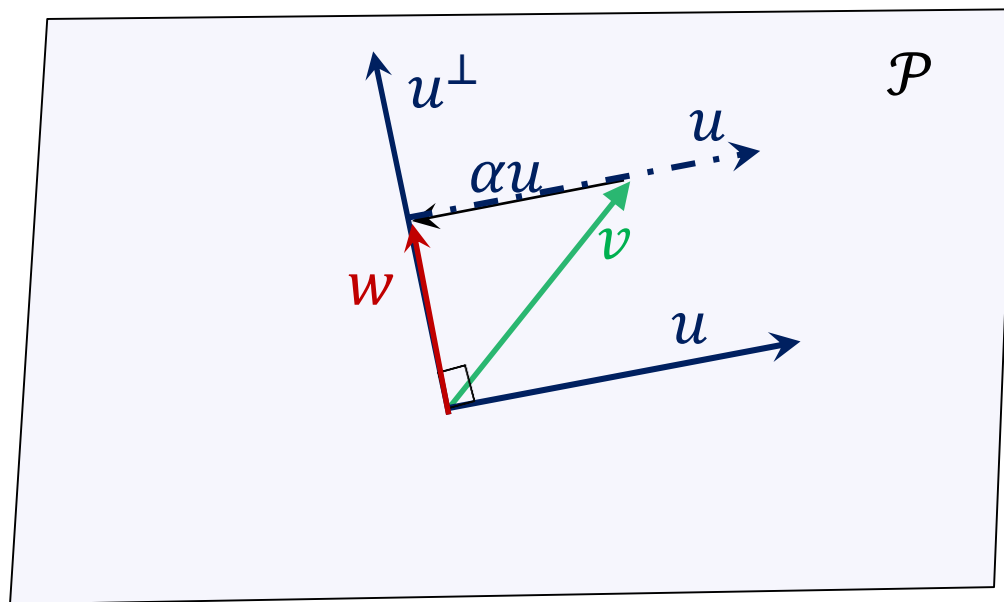
Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, não nulos, não ortogonais, e não paralelos.

Assim, u e v são os vetores de um plano único \mathcal{P} .

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt construe um vetor

$$w = v + \alpha u$$

que satisfaz $w \perp u$.



Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em \mathbb{R}^3 . 2 vetores.

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, não nulos, não ortogonais, e não paralelos.

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt construe um vetor

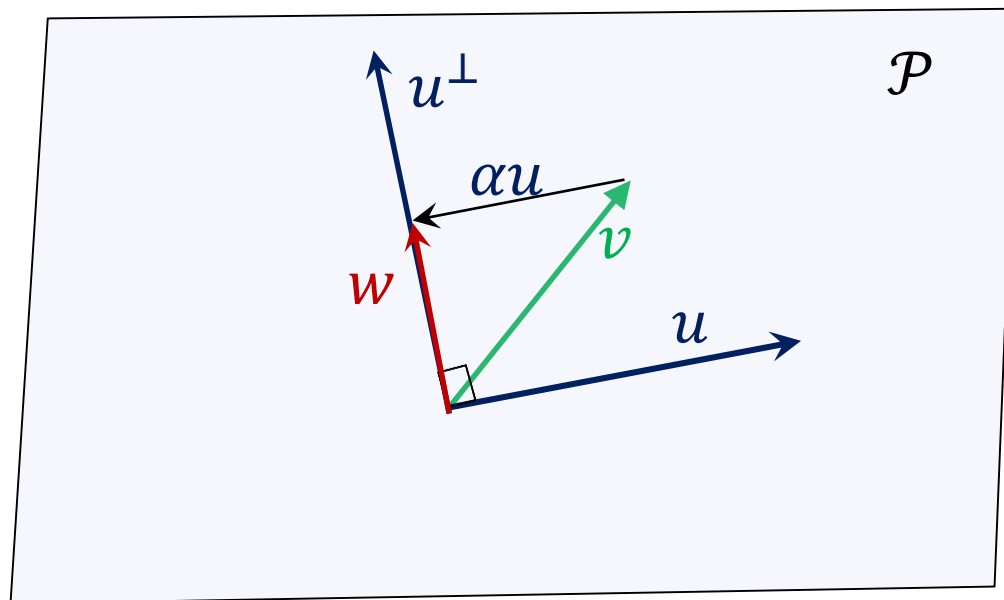
$$w = v + \alpha u$$

que satisfaz $w \perp u$.

Observar:

O vetor $w \in \mathcal{P}$, pois

u e v são os vetores de direção que geram o plano \mathcal{P} .



Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em \mathbb{R}^3 . 2 vetores.

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, não nulos, não ortogonais, e não paralelos.

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

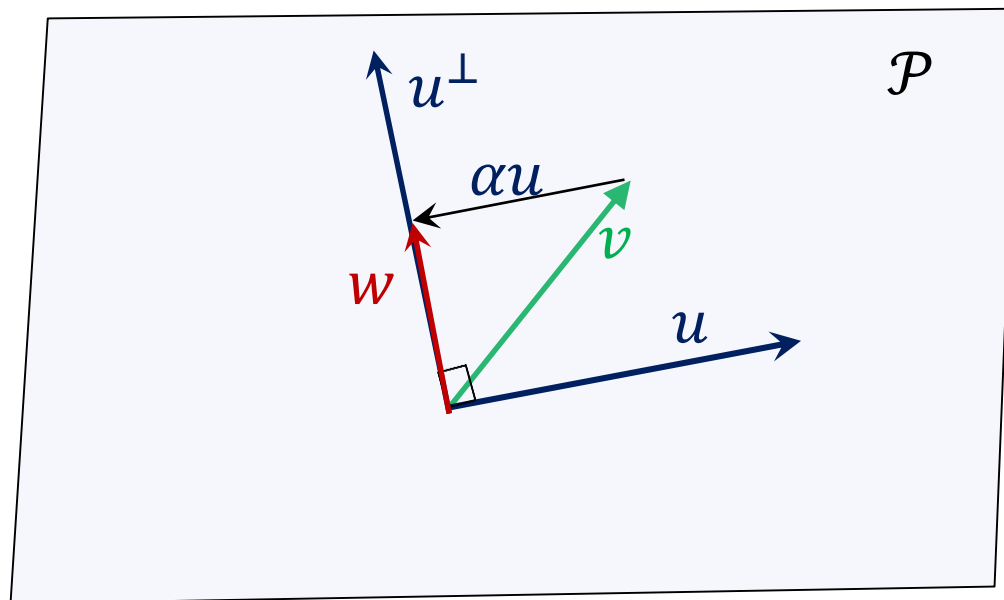
agora faz o produto

ponto vezes u ,

$$w \cdot u = v \cdot u + \alpha u \cdot u$$

como $w \cdot u = 0$, temos

$$0 = v \cdot u + \alpha u \cdot u$$



Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em \mathbb{R}^3 . 2 vetores.

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, não nulos, não ortogonais, e não paralelos.

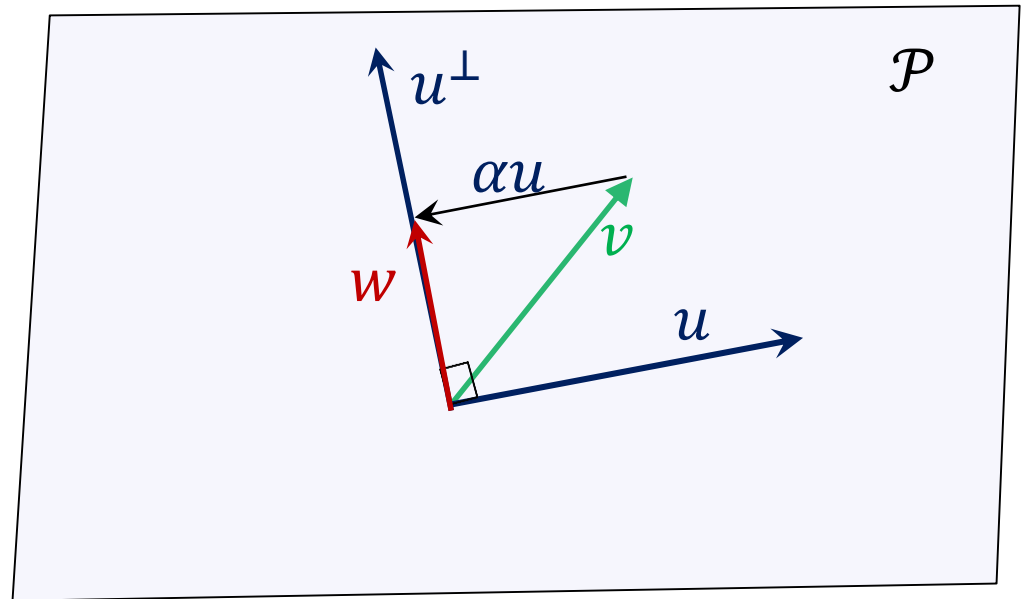
O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt permite determinar α

$$0 = v \cdot u + \alpha \|u\|^2$$

$$\alpha = -\frac{v \cdot u}{\|u\|^2}.$$

Portanto,

$$w = v - \left(\frac{v \cdot u}{\|u\|^2} \right) u$$



Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em \mathbb{R}^3 . 2 vetores.

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, não nulos, não ortogonais, e não paralelos.

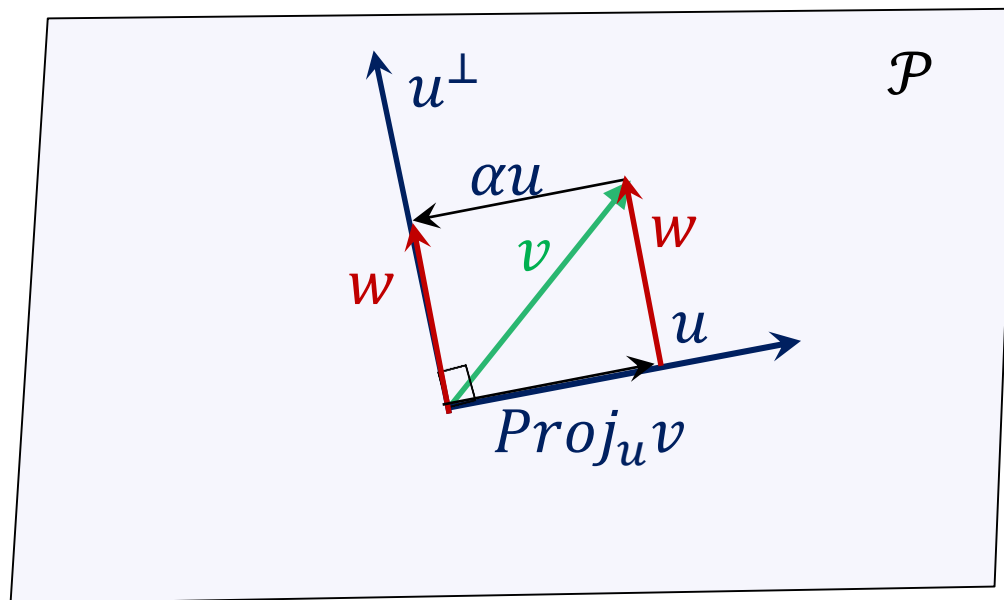
O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt determinou o vetor

$$w = v - \left(\frac{v \cdot u}{\|u\|^2} \right) u$$

que satisfaz $w \perp u$.

Observar que o vetor αu é o vetor projeção

de v sobre u com sinal negativo: $w = v - \mathbf{Proj}_u v$



Ortogonalização de Gram-Schmidt em \mathbb{R}^2

Então em \mathbb{R}^2 , podemos também aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, o qual constroi um vetor ortogonal mas sem desconsiderar o vetor $(0,1)$.

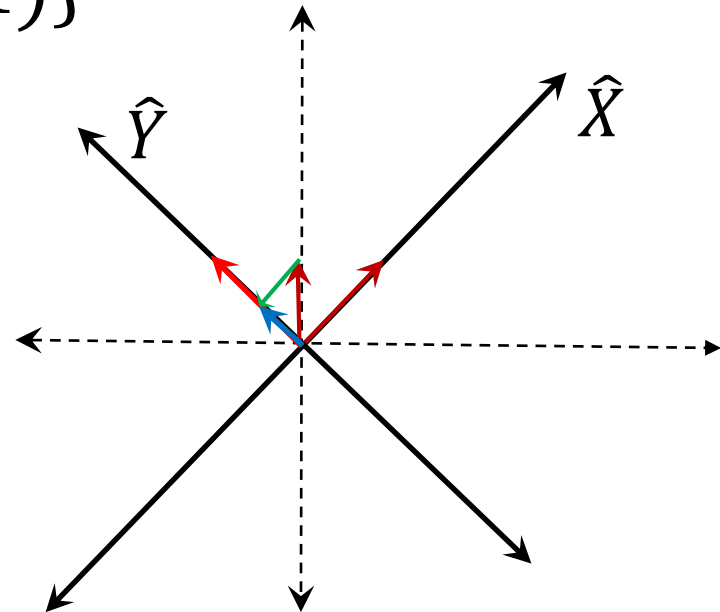
Então desde $\delta = \{(1,1), (0,1)\}$

temos $w = v - \left(\frac{v \cdot u}{\|u\|^2}\right) u$

$$v \cdot u = 1, \|u\|^2 = 2$$

$$w = (0,1) - \frac{1}{2}(1,1)$$

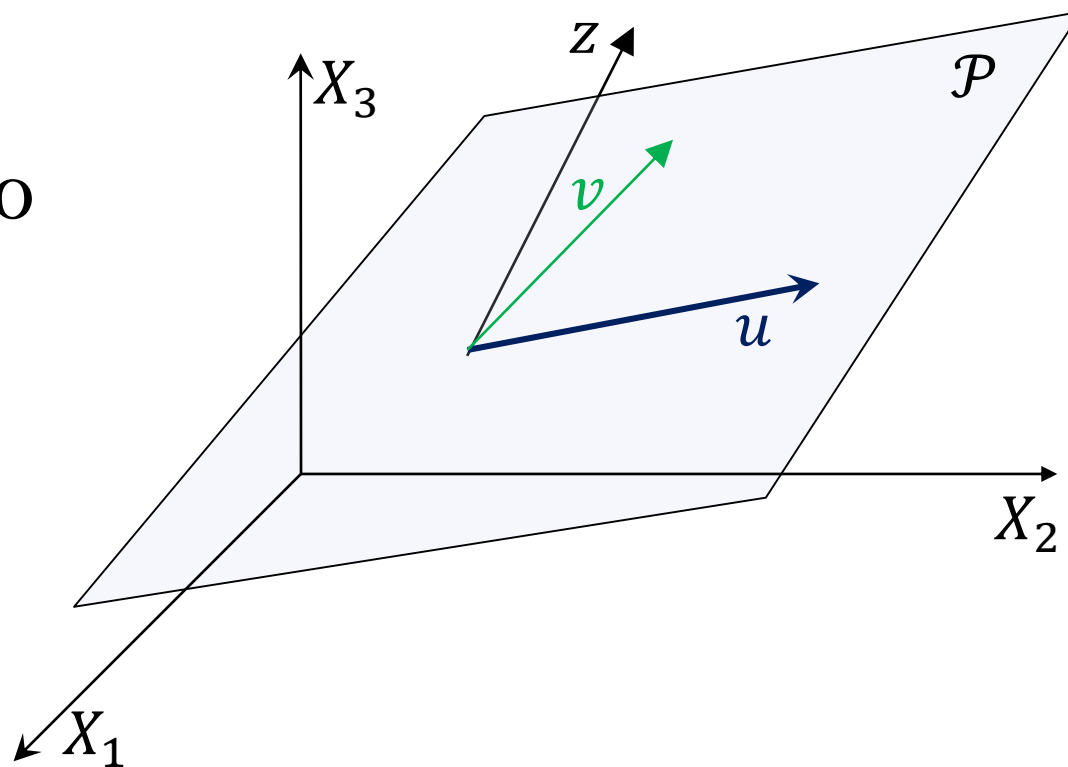
$$w = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(-1,1).$$



Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em \mathbb{R}^3 . 3 vetores.

Em \mathbb{R}^3 , podem ter sido fornecidos três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

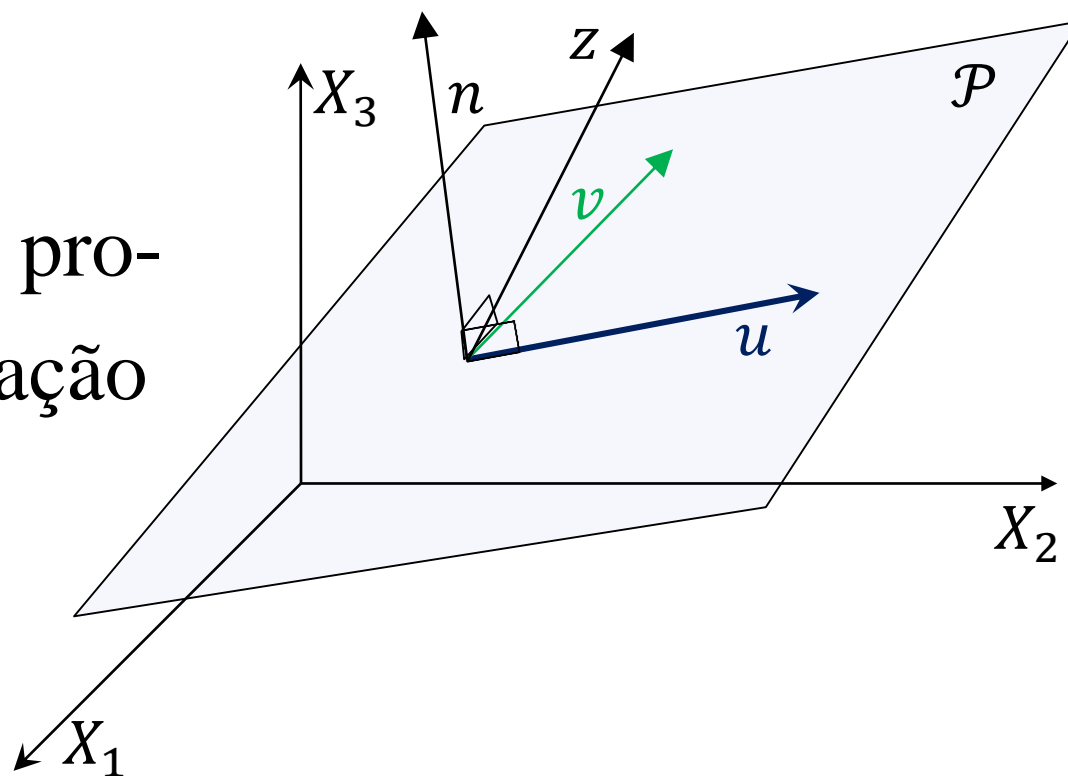
Supomos que não são ortogonais entre si, caso contrário não precisa ser realizada atividade nenhuma, ou ortogonalizar apenas dois vetores.



Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em \mathbb{R}^3 . 3 vetores.

Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

Para u e v podemos formar $w \perp u$ com o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt no plano \mathcal{P} .



Sempre pode formar n , vetor ortogonal ao plano \mathcal{P}

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em \mathbb{R}^3 . 3 vetores.

Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

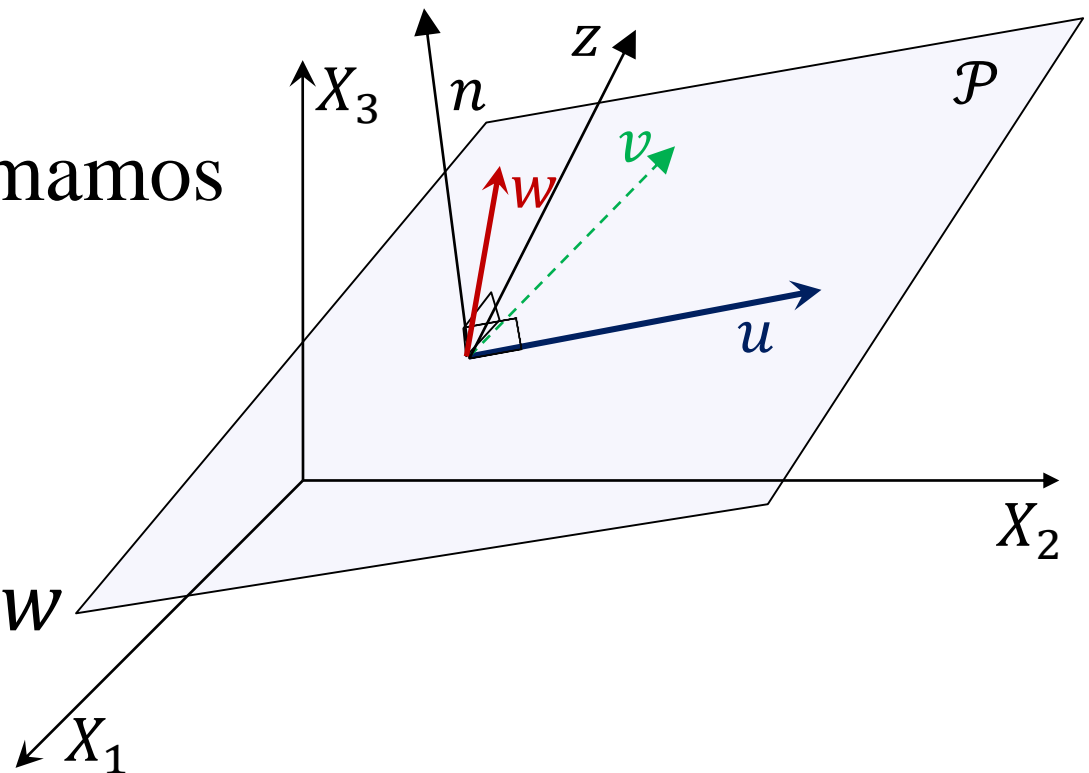
Utilizando u e v formamos

$$w = v - \left(\frac{v \cdot u}{\|u\|^2} \right) u$$

e $w \perp u$ e $w \in \mathcal{P}$.

Substituimos v pelo w

Usando z , procuramos um vetor ortogonal ao \mathcal{P} .



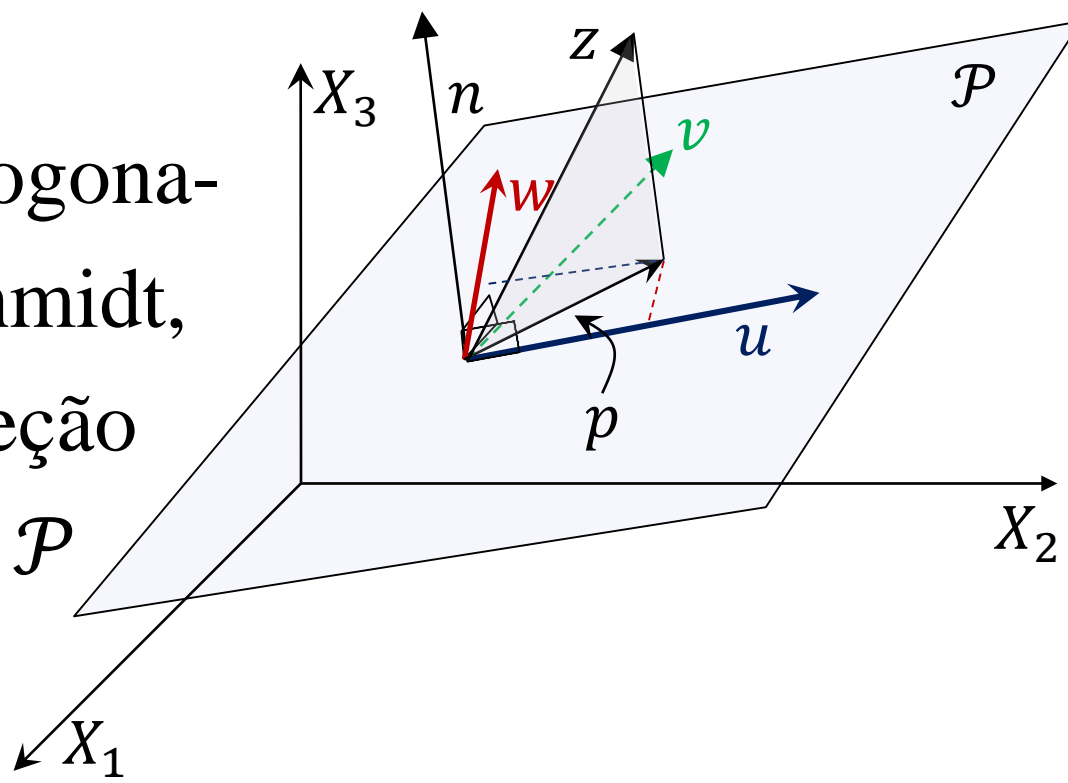
Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em \mathbb{R}^3 . 3 vetores.

Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, consideramos a projeção ortogonal de z sobre \mathcal{P}

Chamaremos de p

e esse vetor é combinação linear de u e w .



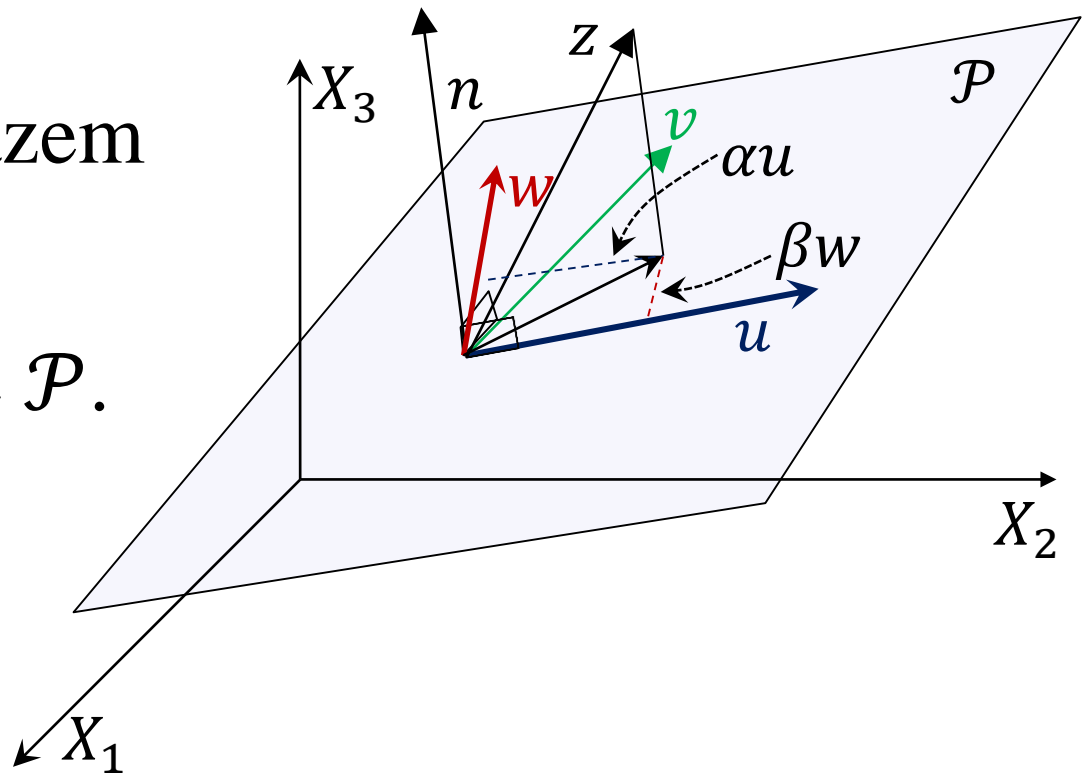
Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em \mathbb{R}^3 . 3 vetores.

Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

Existem α e β que fazem

$$p = \alpha u + \beta w$$

pois é projeção sobre \mathcal{P} .



Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em \mathbb{R}^3 . 3 vetores.

Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

Existem α e β que fazem

$$p = \alpha u + \beta w$$

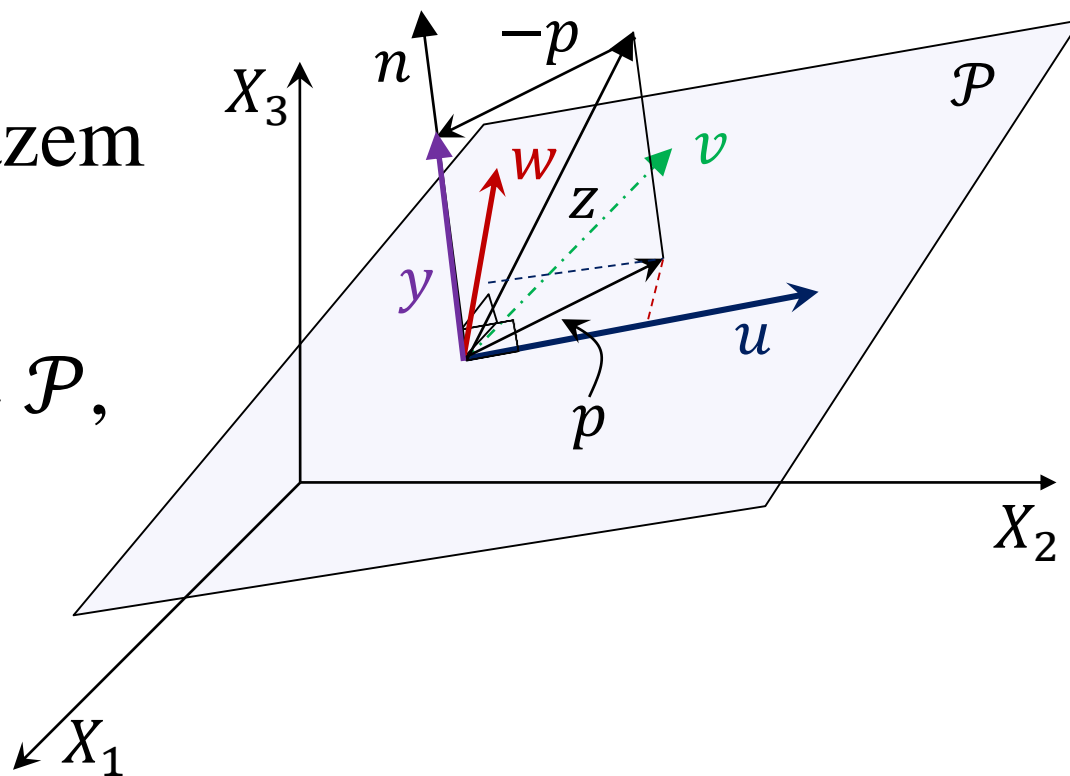
pois é projeção sobre \mathcal{P} ,

e construímos um

vetor y paralelo a n ,

$$y = z - p$$

$$y = z - \alpha u - \beta w$$



Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em \mathbb{R}^3 . 3 vetores.

Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

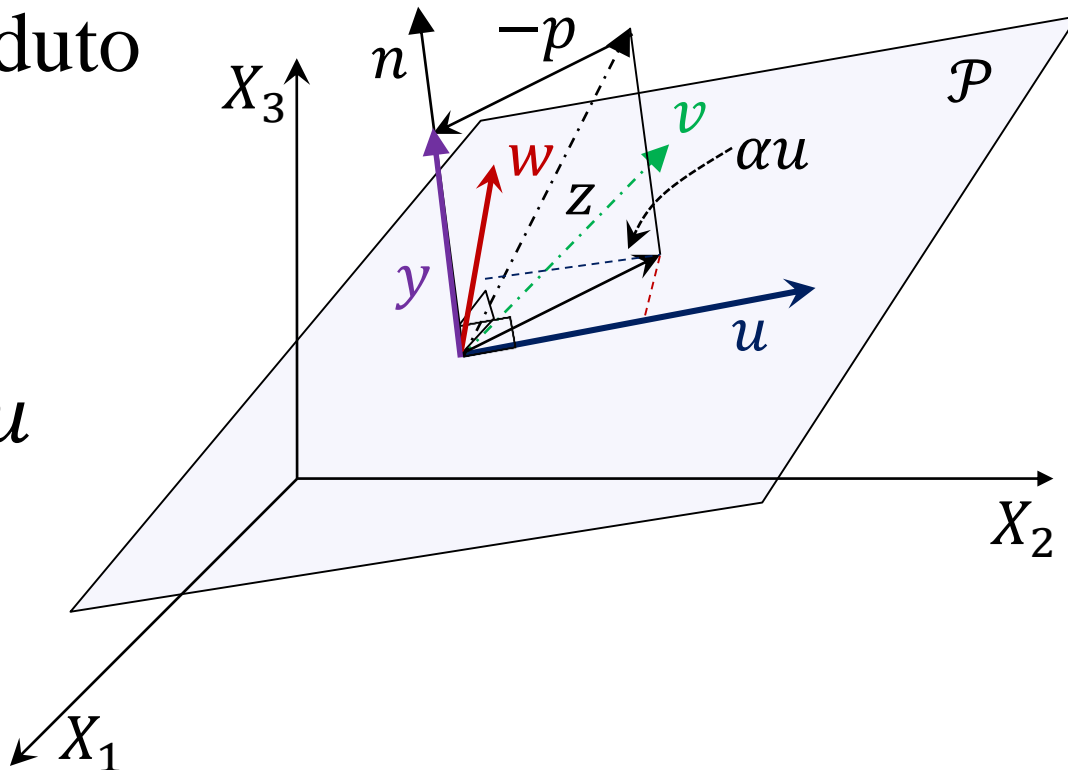
Obtemos: $y \cdot u = z \cdot u - \alpha u \cdot u - \beta w \cdot u$

multiplicando produto
ponto vezes u .

Então

$$0 = z \cdot u - \alpha u \cdot u$$

$$\alpha = \frac{z \cdot u}{\|u\|^2}$$



Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em \mathbb{R}^3 . 3 vetores.

Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

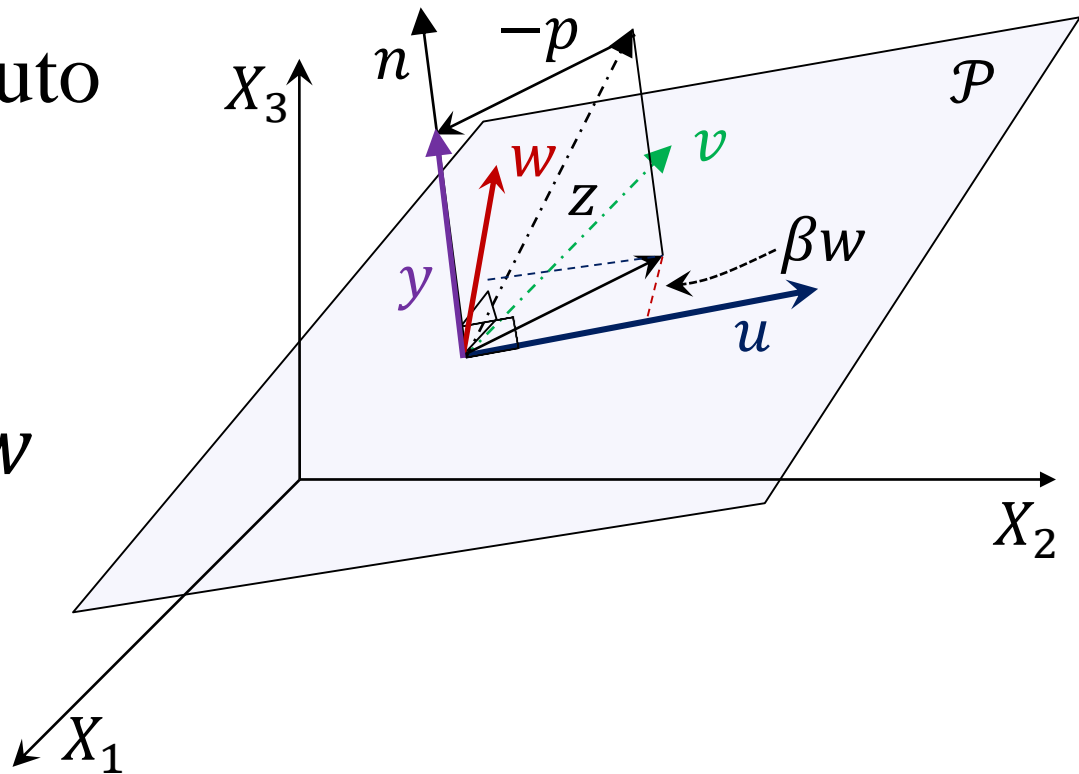
Obtemos: $y \cdot w = z \cdot w - \alpha u \cdot w - \beta w \cdot w$

multiplicando produto
ponto vezes w .

Então

$$0 = z \cdot w - \beta w \cdot w$$

$$\beta = \frac{z \cdot w}{\|w\|^2}$$



Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em \mathbb{R}^3 . 3 vetores.

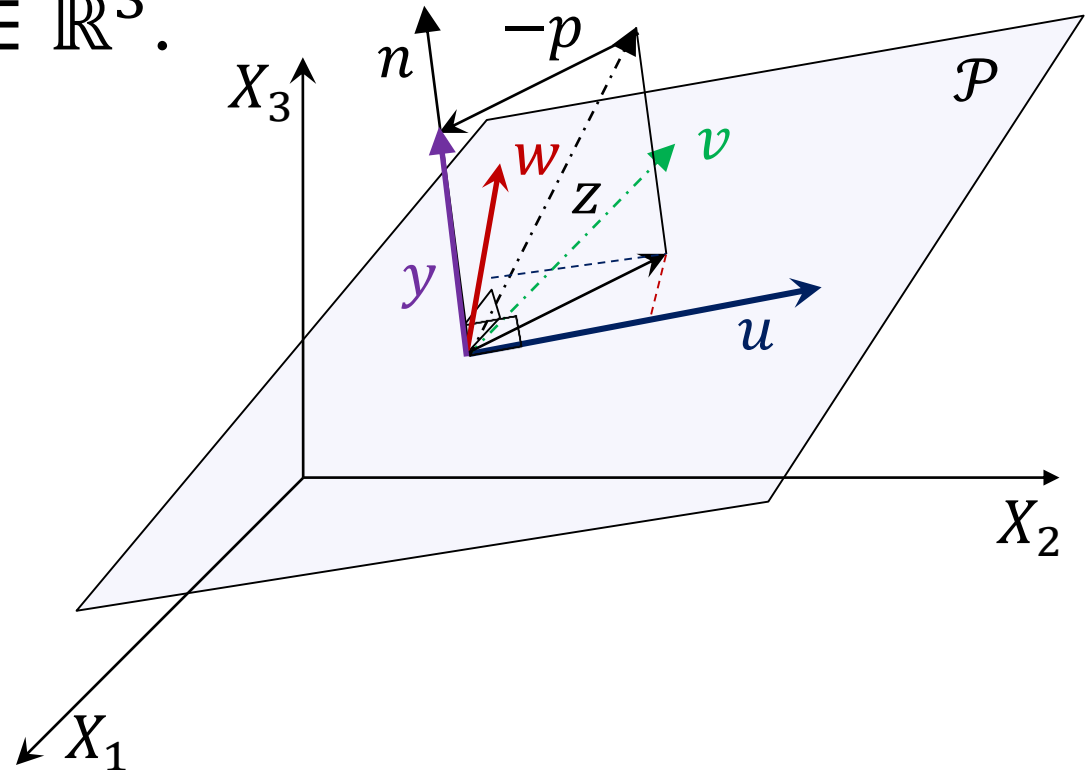
Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

Assim, de

$$y = z - \alpha u - \beta w$$

obtemos:

$$y = z - \frac{z \cdot u}{\|u\|^2} u - \frac{z \cdot w}{\|w\|^2} w$$

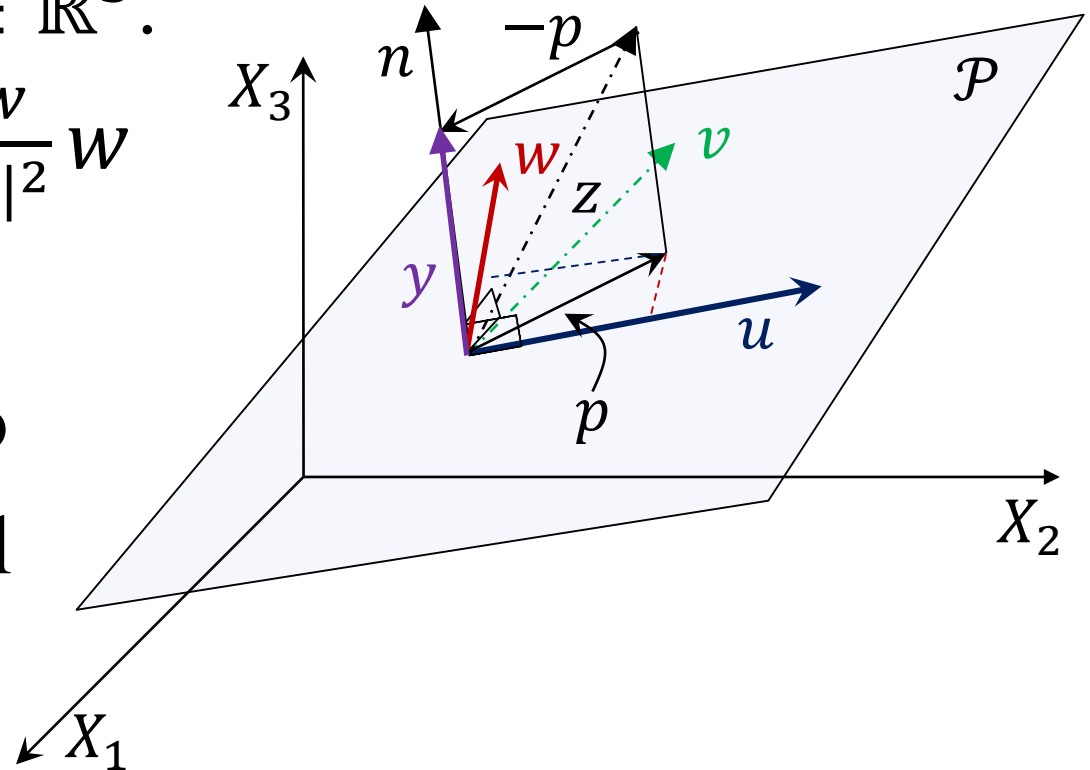


Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em \mathbb{R}^3 . 3 vetores.

Dados três vetores, não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

$$y = z - \frac{z \cdot u}{\|u\|^2} u - \frac{z \cdot w}{\|w\|^2} w$$

O vetor que sendo subtraído é chamado de projeção ortogonal de z sobre o plano \mathcal{P}



$$Proj_{\mathcal{P}} z = \frac{z \cdot u}{\|u\|^2} u + \frac{z \cdot w}{\|w\|^2} w \Rightarrow y = z - Proj_{\mathcal{P}} z$$

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt em \mathbb{R}^3 . 3 vetores.

Em resumo: Para conseguir três vetores ortogonais a partir de três não nulos, não paralelos e não coplanares $u, v, z \in \mathbb{R}^3$.

Fixamos u .

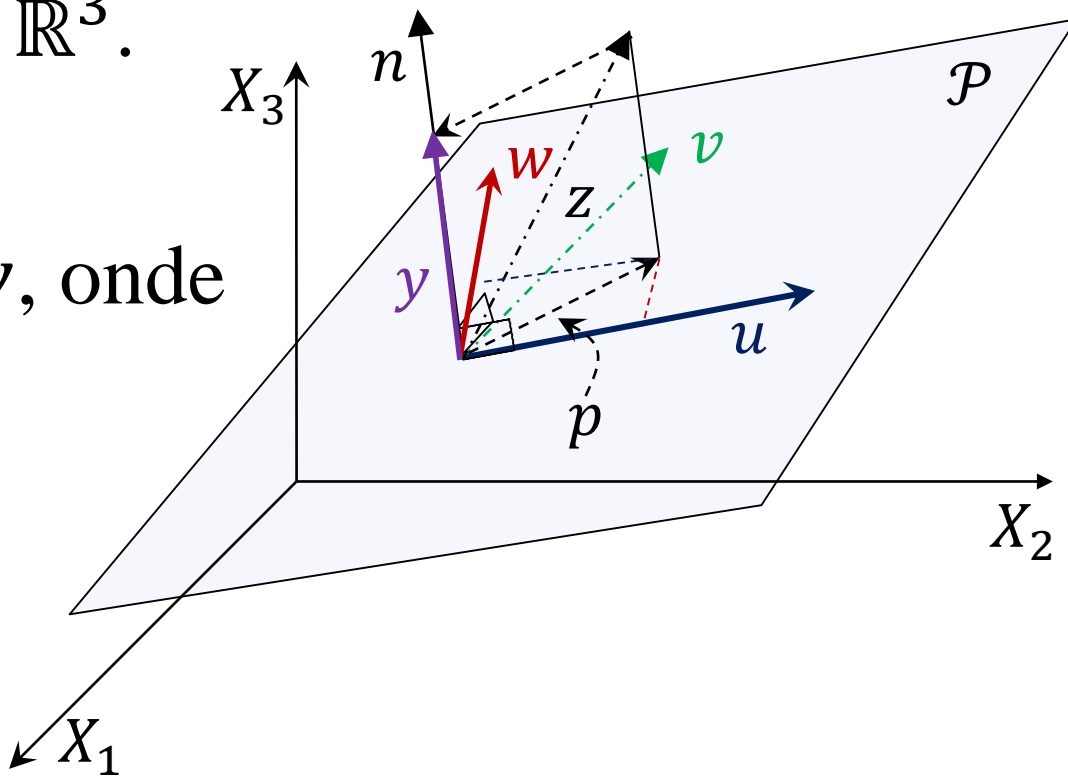
Substituimos v pelo w , onde

$$w = v - \left(\frac{v \cdot u}{\|u\|^2} \right) u$$

$$w = v - Proj_u v$$

Substituimos z pelo y

$$y = z - Proj_{\mathcal{P}} z \quad \text{ou} \quad y = z - \frac{z \cdot u}{\|u\|^2} u - \frac{z \cdot w}{\|w\|^2} w$$



Exercícios de ortogonalização

Utilizando o processo de Gram-Schmidt ortogonalize os vetores a seguir:

1. $u = (1,2,1)$ e $v = (0,2,2)$

2. $u = (2,1,1)$ e $v = (2,2,2)$

3. $u = (1,1,1)$ e $v = (1,1,0)$

4. $u = (1,0,1)$, $v = (0,1,1)$ e $z = (1,1,0)$

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{bmatrix}$,

ortonormalize os vetores coluna da matriz A .

Resolução

Usando o processo de Gram-Schmidt ortogonalize

4. $u = (1,0,1)$, $v = (0,1,1)$ e $z = (1,1,0)$

Fixamos $u = (1,0,1)$.

Ortogonalizamos $v = (0,1,1)$, então construímos

$$w = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,0,1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

Ortogonalizamos z , obtendo

$$y = (1,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,1) - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$
$$y = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow y = \frac{2}{3}(1,1,-1)$$

Exercícios de ortogonalização: Respostas

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{bmatrix}$

Ortogonalizando os vetores coluna obtemos:

$$u = (12, 6, -4), \quad w = (-69, 158, 30)$$

$$e \quad y = \left(-\frac{58}{5}, \frac{6}{5}, -33\right).$$

Falta normalizar, isto é, fazer vetores unitários.

$$\text{Por exemplo: } u_u = \frac{1}{\|u\|}u = \frac{1}{14}(12, 6, -4) = \left(\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{2}{7}\right)$$

(5. Fonte: https://www.ufrgs.br/reamat/AlgebraLinear/livro/s13-o_processo_de_ortogonalizax00e7x00e3o_de_gramx2013schmidt.html#:~:text=O%20Processo%20de%20Gram%E2%80%933Schmidt,gera%20o%20mesmo%20espa%C3%A7o%20vetorial.)