

**ZAB0161 - Álgebra Linear com
Aplicações em Geometria Analítica**

**Transformação Linear
e Matriz Associada**

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

ZAB (Dpto. de Ciências Básicas) – FZEA – USP

Transformação linear

Sejam U e W dois espaços vetoriais.

Uma **transformação linear** $L: U \rightarrow W$ é uma função de U em W tal que

$$a) L(u + v) = L(u) + L(v) \text{ para todo } u, v \in U$$

$$b) L(\alpha u) = \alpha L(u) \text{ para todo } u \in U, \alpha \in \mathbb{R}$$

As condições acima significam que a transformação linear L preserva a soma e multiplicação vezes escalar de um espaço no outro.

Transformação linear

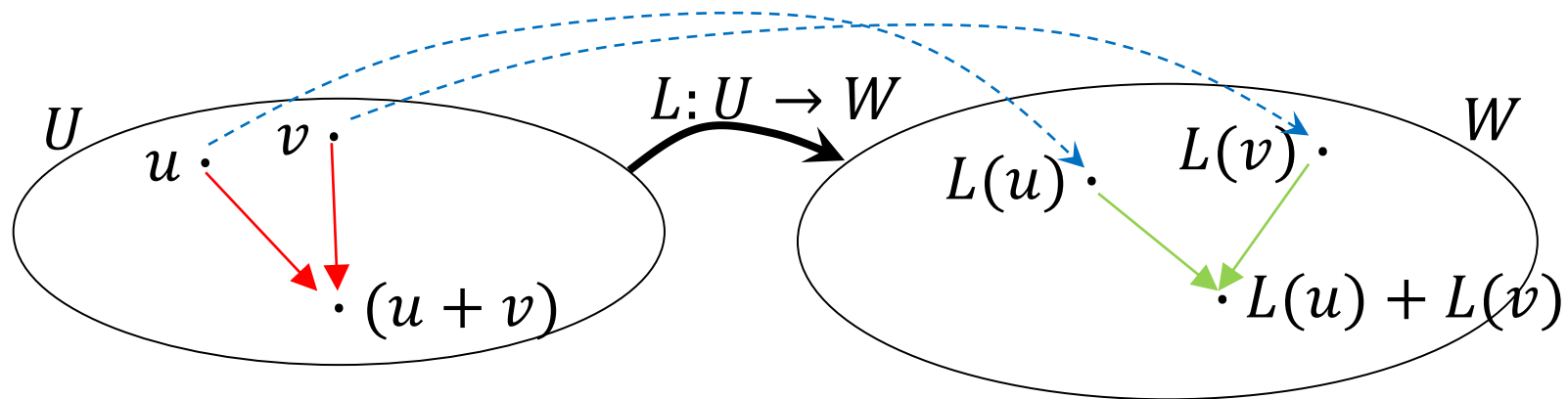
Uma **transformação linear** $L: U \rightarrow W$ é uma função de U em W tal que

a) $L(u + v) = L(u) + L(v)$ para todo $u, v \in U$

b) $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ para todo $u \in U, \alpha \in \mathbb{R}$

Soma de vetores em U

Soma de vetores em W

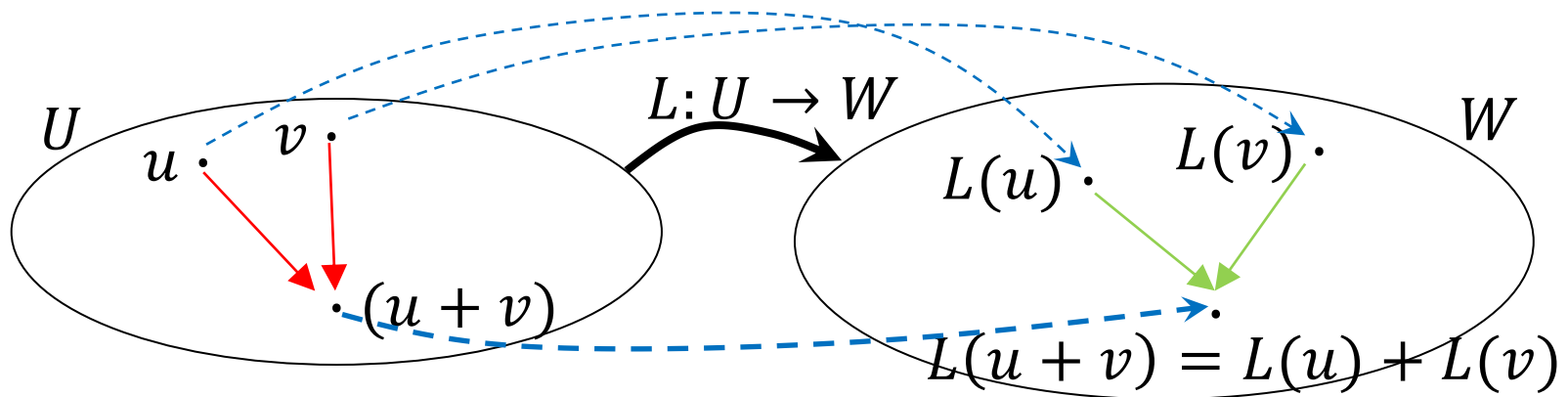


Transformação linear

Uma **transformação linear** $L: U \rightarrow W$ é uma função de U em W tal que

a) $L(u \oplus v) = L(u) \oplus L(v)$ para todo $u, v \in U$

b) $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ para todo $u \in U, \alpha \in \mathbb{R}$



Transformação linear

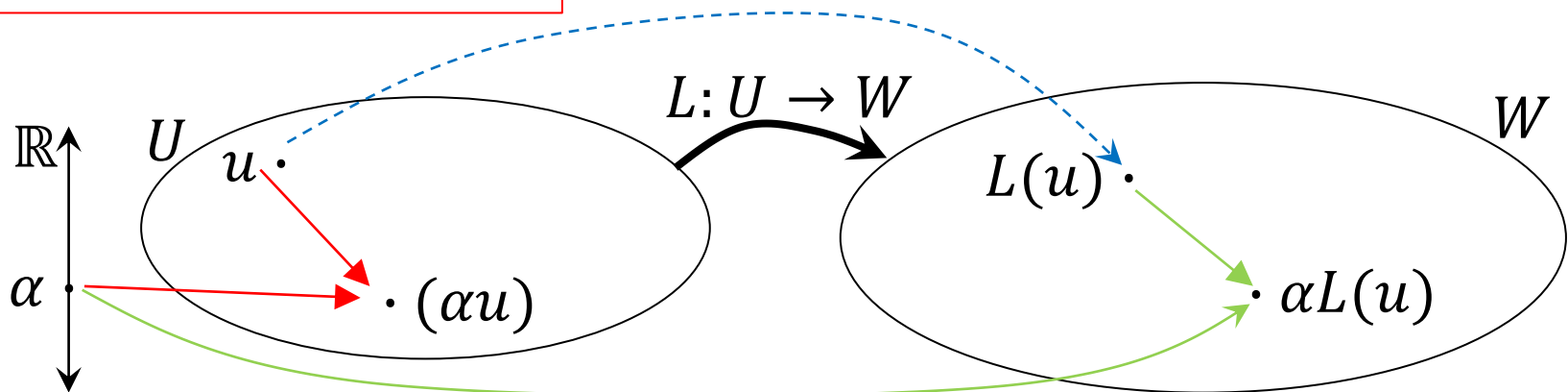
Uma **transformação linear** $L: U \rightarrow W$ é uma função de U em W tal que

a) $L(u + v) = L(u) + L(v)$ para todo $u, v \in U$

b) $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ para todo $u \in U, \alpha \in \mathbb{R}$

Multiplicação vezes escalar em U

Multiplicação vezes escalar em W

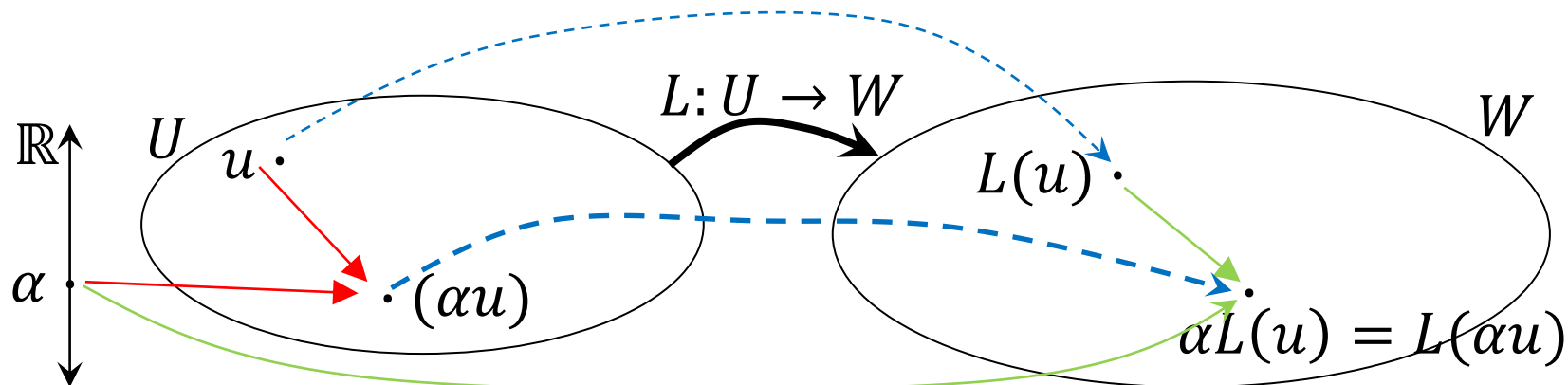


Transformação linear

Uma **transformação linear** $L: U \rightarrow W$ é uma função de U em W tal que

a) $L(u + v) = L(u) + L(v)$ para todo $u, v \in U$

b) $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ para todo $u \in U, \alpha \in \mathbb{R}$



Transformação linear

Outra forma de expressar, utilizando combinação linear em U e em W .

Sejam U e W dois espaços vetoriais.

Uma transformação linear $L: U \rightarrow W$ é uma função de U em W tal que

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$$

para todo $u, v \in U, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Exemplo: A **função linear** $L(x) = y = 2x - 7$ é uma **transformação linear** ?

Exemplos

Função linear $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $L(x) = y = 2x - 7$

Deve satisfazer $L(x + \bar{x}) = L(x) + L(\bar{x})$.

Verificando:

$$L(x + \bar{x}) = 2(x + \bar{x}) - 7 = 2x + 2\bar{x} - 7.$$

$$L(x) + L(\bar{x}) = 2x - 7 + (2\bar{x} - 7) = 2x + 2\bar{x} - 14.$$

Portanto $L(x + \bar{x}) \neq L(x) + L(\bar{x})$

A função linear dada **não é transformação linear**. Falhou na primeira condição!

Exemplos

Transformação entre espaços matriciais:

Seja $L: M_{3 \times 1} \rightarrow M_{2 \times 1}$ com $L(X) = AX$

A matriz é $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

Essa transformação "*transforma*" a matriz $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

na matriz

$$L(X) = A_{2 \times 3} X_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

Exemplos

A transformação é linear? **É transformação linear!!**

$$a) L(X + Y) = L(X) + L(Y)$$

$L(X + Y) = A(X + Y)$ pela definição e A é fixa

$L(X + Y) = AX + AY$ pela distributividade

$L(X + Y) = L(X) + L(Y)$ novamente pela definição.

$$b) L(\alpha X) = \alpha L(X)$$

$$\begin{aligned} L(\alpha X) &= A(\alpha X) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 - \alpha x_2 + 2\alpha x_3 \\ 3\alpha x_1 - 3\alpha x_2 + \alpha x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha(x_1 - x_2 + 2x_3) \\ \alpha(3x_1 - 3x_2 + x_3) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \alpha AX = \alpha L(X) \end{aligned}$$

Exemplos

Transformação translação de matrizes:

Seja $L: M_{3 \times 1} \rightarrow M_{2 \times 1}$ com $L(X) = AX + B$

A matriz é $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Essa transformação "*transforma*" a matriz $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

na matriz

$$L(X) = AX + B = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 + 7 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 1 \end{bmatrix}$$

Exemplos

A transformação é linear?

$$a) L(X + Y) = L(X) + L(Y)$$

$$L(X + Y) = A(X + Y) + B = AX + AY + B$$

$$L(X) + L(Y) = (AX + B) + (AY + B)$$

$$= AX + AY + 2B$$

Então $L(X + Y) = L(X) + L(Y)$ se $B = 0$,

mas se $B \neq 0$ **não é transformação linear.**

Exemplos

Transformação de polinômios:

Seja $L: P_2 \rightarrow P_4$

$$L(p) = t^2 p \Rightarrow L(p(t)) = t^2 p(t)$$

Essa transformação "*transforma*" um polinômio de grau 2 em um polinômio de grau 4.

Por exemplo: $p = 2t^2 - 3t - 7$ é transformado em $L(p) = 2t^4 - 3t^3 - 7t^2$

Para ver se é TL, verificamos

$$L(\alpha p + \beta q) = \alpha L(p) + \beta L(q)$$

para todo $p, q \in P_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Exemplos

$$\begin{aligned}L(\alpha p + \beta q) &= t^2(\alpha p + \beta q) = t^2(\alpha p) + t^2(\beta q) \\ &= \alpha(t^2 p) + \beta(t^2 q) = \alpha L(p) + \beta L(q)\end{aligned}$$

Portanto,

$$L(\alpha p + \beta q) = \alpha L(p) + \beta L(q)$$

para todo $p, q \in P_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

L é uma transformação linear de P_2 em P_4 .

Transformação linear

Sejam U e W dois espaços vetoriais.

Seja uma transformação linear $L: U \rightarrow W$, então para qualquer $u \in U$

$$L(0) = L(u + (-u)) = L(u) + L(-u)$$

$$L(0) = L(u) + (-1)L(u) = 0$$

Em conclusão:

Se $L: U \rightarrow W$ é uma transformação linear então

$$L(0) = 0.$$

Transformação linear

Nada garante que: Se $L(0) = 0$ então L é transformação linear. **(Não sabemos !!!)**

Exemplo: $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $L(x) = \text{sen}(x)$.

Observar $L(0) = \text{sen}(0) = 0$

Mas:

$$L(x + y) = \text{sen}(x + y) = \text{sen}(x) \cos(y) + \cos(x) \text{sen}(y)$$

$$L(x) + L(y) = \text{sen}(x) + \text{sen}(y)$$

Portanto

$L(x + y) \neq L(x) + L(y)$ por exemplo para $x = y = \frac{\pi}{4}$, pois

$$L\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \text{ mas}$$

$$L\left(\frac{\pi}{4}\right) + L\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$

Transformação linear

Se $L: U \rightarrow W$ é uma transformação linear então

$$L(0) = 0.$$

Podemos **reformular** como:

Se $L(0) \neq 0$ então L não é transformação linear.

Ajuda em muitas funções:

Seja a função $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$L(x, y) = (3x + y, 2y, x + 2y + 4)$$

é uma TL ??

Como $L(0,0) = (0,0,4) \neq (0,0,0)$ então **não é TL**.

Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Sejam U e W dois espaços vetoriais.

Seja uma transformação linear $L: U \rightarrow W$.

Núcleo de uma transformação linear

Define-se o núcleo da transformação linear L , como o conjunto

$$\text{Ker}(L) = \{u \in U / L(u) = 0\}$$

Imagem de uma transformação linear

Define-se a imagem de L , como o conjunto

$$\text{Imag}(L) = \{w \in W / \text{Existe } u \in U \text{ com } L(u) = w\}$$

O $\text{Ker}(L)$ e a $\text{Imag}(L)$ são espaços vetoriais.

Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$$

Qual o núcleo e a imagem de L ?

Determine uma base para cada conjunto.

Núcleo (Kernel): $Ker(L) \subset \mathbb{R}^3$

Quais os $u \in \mathbb{R}^3$ com $L(u) = 0$?

$$(x + y, 2x + 3z) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

Daqui vemos que existem infinitas soluções.

Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$$

Núcleo (Kernel):

Temos duas equações e três incógnitas.

Temos um grau de liberdade, que pode ser o x .

Nesse caso $y = -x$ e $z = -\frac{2}{3}x$.

Então:

$$\text{Ker}(L) = \left\{ \left(x, -x, -\frac{2}{3}x \right) = x \left(1, -1, -\frac{2}{3} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$$

Todos os vetores múltiplos do vetor fixo $\left(1, -1, -\frac{2}{3} \right)$.

Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$$

O núcleo é um espaço vetorial: (é uma reta?)

$$\text{Ker}(L) = \left\{ \left(x, -x, -\frac{2}{3}x \right) = x \left(1, -1, -\frac{2}{3} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$$

Uma base do núcleo da transformação linear é o conjunto

$$\beta = \left\{ \left(1, -1, -\frac{2}{3} \right) \right\}$$

Outra base é

$$\bar{\beta} = \{ (3, -3, -2) \}$$

Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$$

Imagem: $Imag(L) \subset \mathbb{R}^2$

Pergunto, pode existir alguma dupla que não possa ser representada com as componentes de uma tripla ?

Vamos trabalhar de forma mais simples, fazendo:

$$(u, v) = (0 + u, 0 + 3\frac{v}{3}) = L(0, u, \frac{v}{3})$$

Daqui vemos que qualquer dupla (u, v) pode ser vista como imagem da tripla $(0, u, \frac{v}{3})$.

$Imag(L) = \mathbb{R}^2$, logo uma base é a base canônica.

Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Sejam U e W dois espaços vetoriais.

Seja uma transformação linear $L: U \rightarrow W$.

Uma transformação linear, por ser função, pode ser injetiva, pode ser sobrejetiva e se ambas é bijetiva.

Resultado:

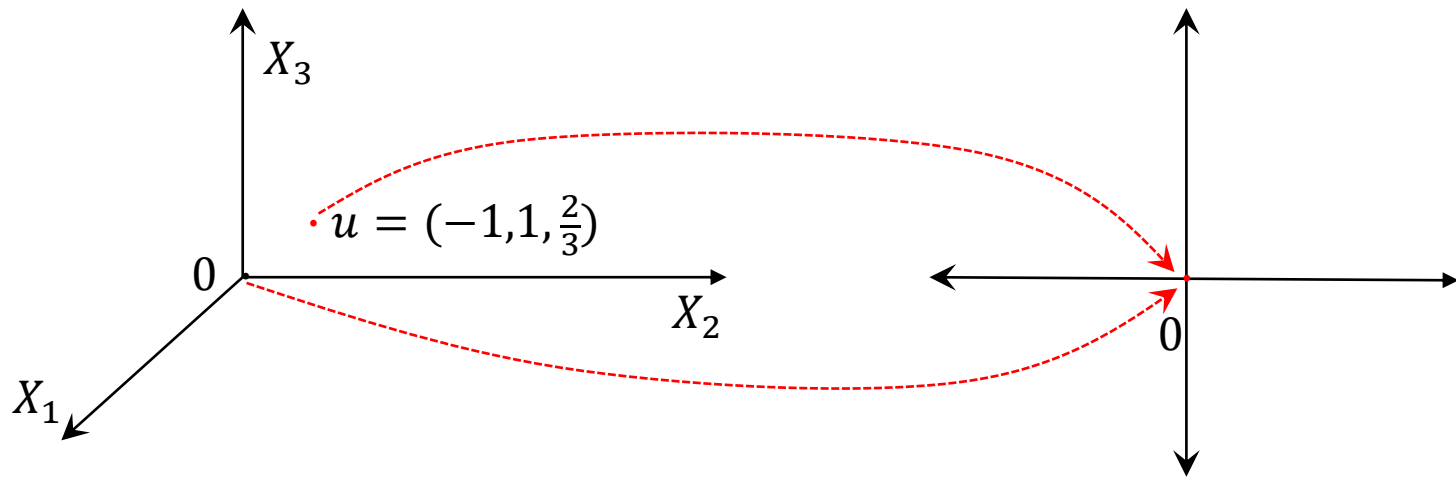
Se o núcleo de L é $Ker(L) = \{0\}$, então a transformação linear L é injetiva (um a um).

Se $Ker(L) = \{0\}$ então a base é o conjunto vazio, \emptyset .

Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Exemplos:

1. A transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$ **não é injetiva**.
Lembrar que o núcleo tinha uma base não vazia.



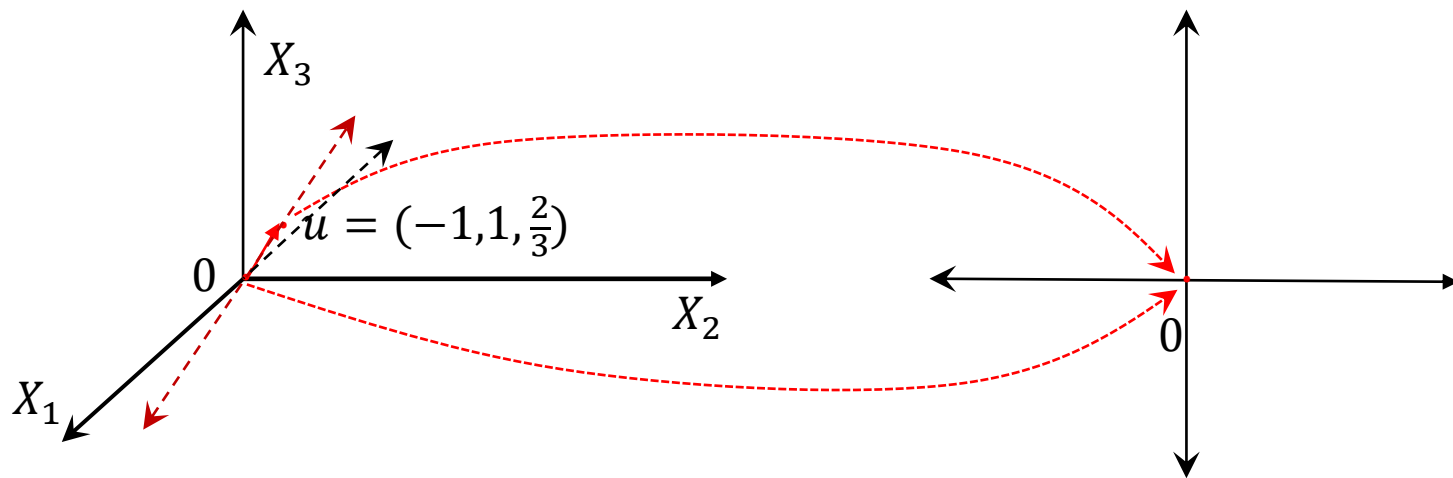
Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Exemplos:

1. A transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z) \text{ não é injetiva.}$$

Observar que toda a reta (vermelha) tem imagem o zero em \mathbb{R}^2 .



Núcleo e Imagem de uma Transformação linear

Exemplos:

1. A transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z) \text{ não é injetiva.}$$

Lembrar que o núcleo tinha uma base não vazia.

2. A transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2$, com

$$L(x, y, z) = xt^2 + yt + z$$

A única forma de formar o polinômio zero é com

$$\text{Ker}(L) = \{(0,0,0)\}$$

E para qualquer polinômio $p = at^2 + bt + c$ existe a tripla (a, b, c) que $L(a, b, c) = p$. **L é sobrejetiva.**

Vetores como matrizes coluna

Seja U um espaço vetorial de dimensão n , isto é

$$\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$$

é uma base de U .

Lembrar que todo vetor de U é combinação linear dos elementos da base, então, se $x \in U$ temos

$$x = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_n\beta_n$$

Considerando a base fixa, podemos associar todo vetor com a matriz dos coeficientes únicos que precisa o vetor para ser representado como combinação linear dos elementos da base.

Vetores como matrizes coluna

Seja U um espaço vetorial de dimensão n , isto é

$$\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$$

é uma base de U .

Considerando a combinação linear de $x \in U$, temos

$$x = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_n\beta_n \cong \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}_\beta$$

Cuidado, tem que preservar a ordem em β .

Vetores como matrizes coluna

Seja U um espaço vetorial e $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ base

Considerando a combinação linear de $x \in U$, temos

$$x = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_n\beta_n \cong \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}_\beta$$

Observar:

A base será considerada como conjunto ordenado.

Se a base tem n elementos, a matriz associada será de ordem $n \times 1$.

Vetores como matrizes coluna

Exemplo: Seja \mathbb{R}^2 e a base

$$\beta = \{(1,0), (0,1)\} = \{\beta_1, \beta_2\}$$

Sabemos que: $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1) = x_1\beta_1 + x_2\beta_2$$

$$x = (x_1, x_2) \cong \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_\beta = x_1\beta_1 + x_2\beta_2$$

Assim: $(2,1) \cong \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cong 2(1,0) + 1(0,1)$

$$(4, -\frac{1}{3}) \cong \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cong 4\beta_1 - \frac{1}{3}\beta_2$$

Por ser a base canônica não precisa ser referenciada.

Vetores como matrizes coluna

Exemplo: Seja \mathbb{R}^2 e a base

$$\beta = \{(0,1), (1,0)\} = \{\beta_1, \beta_2\}$$

Sabemos que: $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1) = x_1\beta_2 + x_2\beta_1$$

$$x = (x_1, x_2) \cong \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}_\beta$$

$$\text{Assim: } (2,1) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}_\beta \quad \text{e} \quad (4, -\frac{1}{3}) \cong \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 4 \end{bmatrix}_\beta$$

Por não ser a base canônica, esta deve ser referenciada informando a base utilizada.

Vetores como matrizes coluna

Exemplo: Seja \mathbb{R}^2 e a base

$$\beta = \{(1,1), (-1,1)\} = \{\beta_1, \beta_2\}$$

Sabemos que: $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$x = c_1(1,1) + c_2(-1,1) = (c_1 - c_2, c_1 + c_2)$$

Resolvendo: $c_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ e $c_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$

$$x = (x_1, x_2) \cong \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \end{bmatrix}_{\beta}$$

Assim: $(2,1) \cong \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}_{\beta}$ e $(2,1) = \frac{3}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(-1,1)$.

Vetores como matrizes coluna

Exemplo: Seja \mathbb{R}^4 e a base canônica

$$\beta = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

Sabemos que: $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

$$x = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 + x_4\beta_4 \cong \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Podemos dizer: O espaço \mathbb{R}^4 com a base β é equivalente ao espaço de matrizes $M_{4 \times 1}$ com a base

$$\bar{\beta} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Vetores como matrizes coluna

Exemplo: Seja o espaço de polinômios P_3 e a base

$$\beta = \{t^3, t^2, t, 1\} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$$

Sabemos que: $p = p_3t^3 + p_2t^2 + p_1t + p_0 \in P_3$

$$p = p_3\beta_1 + p_2\beta_2 + p_1\beta_3 + p_0\beta_4$$

Assim

$$p = p_3t^3 + p_2t^2 + p_1t + p_0 \cong \begin{bmatrix} p_3 \\ p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{bmatrix}_\beta$$

P_3 com a base β é equivalente a $M_{4 \times 1}$ com a $\bar{\beta}$.

Utilizando vetores como matriz coluna

Para exemplificar, utilizaremos

A transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$$

e os espaços vetoriais com as bases canônicas.

Representando como matrizes coluna, temos

$$(x, y, z) \cong \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$(x + y, 2x + 3z) \cong \begin{bmatrix} x + y \\ 2x + 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Utilizando vetores como matriz coluna

A transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$L(x, y, z) = (x + y, 2x + 3z)$$

$$(x, y, z) \cong \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$(x + y, 2x + 3z) \cong \begin{bmatrix} x + y \\ 2x + 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Assim, podemos representar como

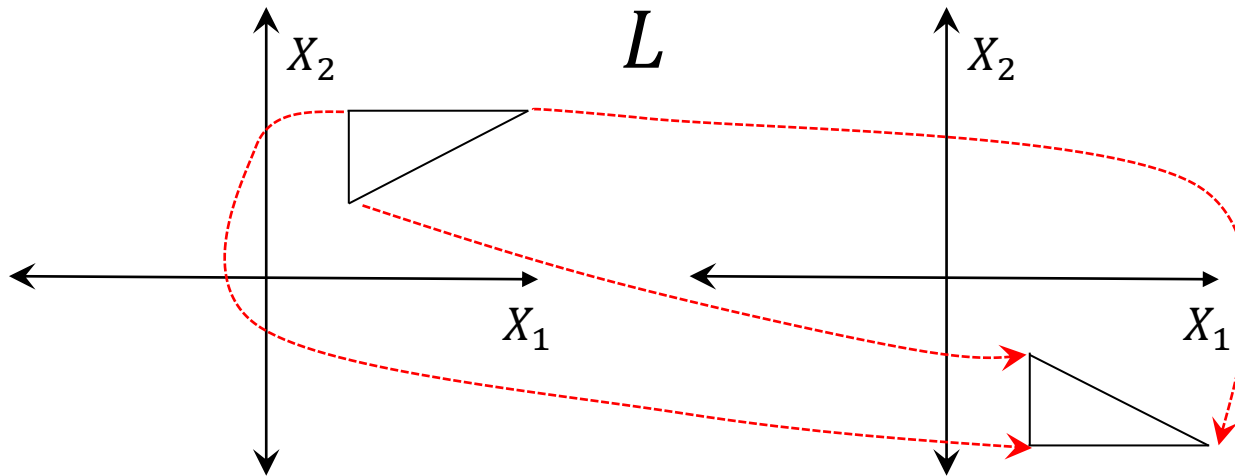
$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad ???$$

Transformação linear reflexão no eixo X_1

Veamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
chamada de reflexão com o eixo X_1 (X):

$$L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2) \Leftrightarrow L(x, y) = (x, -y)$$

Graficamente:

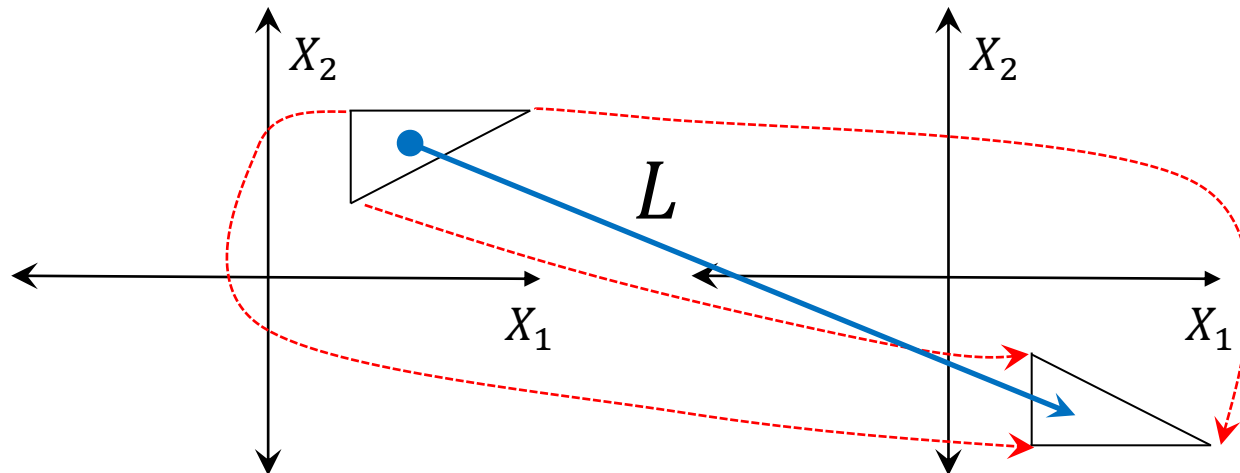


Transformação linear reflexão no eixo X_1

Veamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
chamada de reflexão com o eixo X_1 :

$$L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$$

Graficamente:

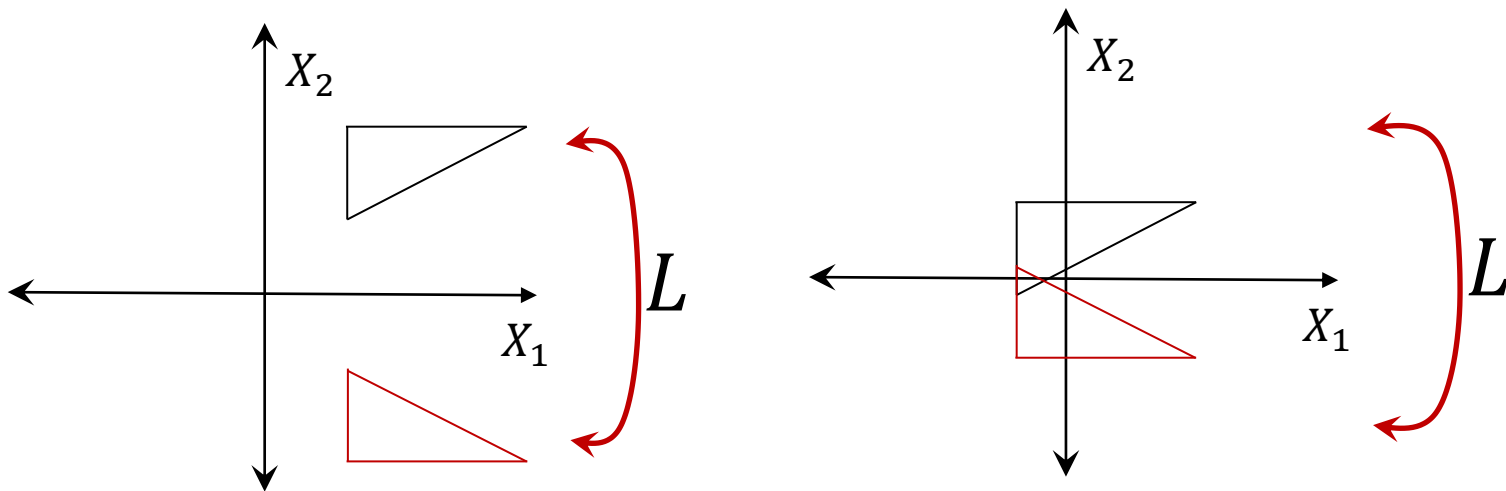


Transformação linear reflexão no eixo X_1

Veamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
chamada de reflexão com o eixo X_1 :

$$L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$$

Graficamente:



O eixo X_1 funciona como um "espelho" em L .

Transformação linear reflexão no eixo X_1

Veamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
chamada de reflexão com o eixo X_1 :

$$L(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$$

Representando como matrizes:

$$(x_1, x_2) \cong \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (x_1, -x_2) \cong \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

Mas
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \text{ A matriz representa a TL.}$$

Transformação linear reflexão no eixo X_2

Veamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
chamada de reflexão com o eixo X_2 :

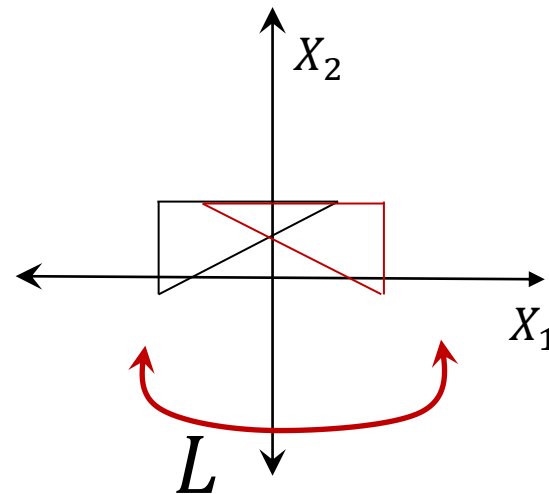
$$L(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$$

Graficamente:

$$(-x_1, x_2) \cong \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Transformação linear reflexão na origem

Vejamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
chamada de reflexão na origem:

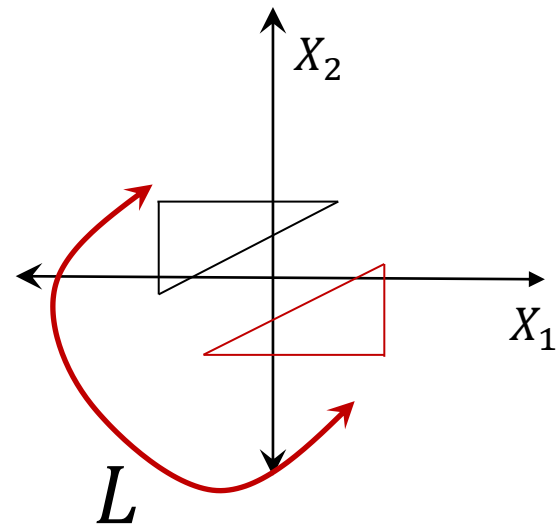
$$L(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$$

Graficamente:

$$(-x_1, -x_2) \cong \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

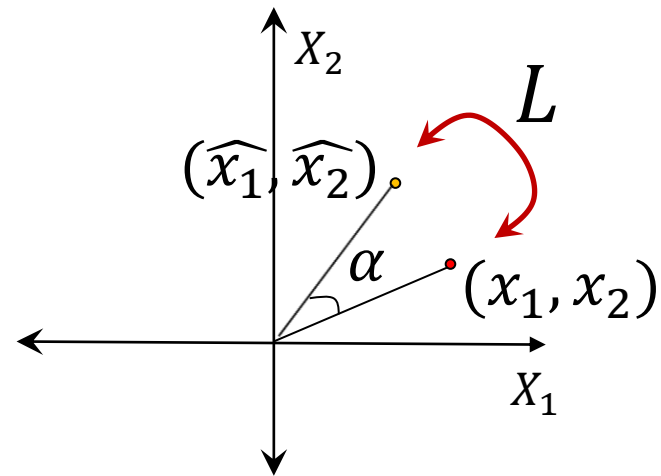
$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Transformação: rotação em um ângulo α

Veamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
chamada de rotação em um ângulo α :

$$L(x_1, x_2) = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$$



Transformação: rotação em um ângulo α

Veamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
chamada de rotação em um ângulo α :

$$L(x) = L(x_1, x_2) = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = \widehat{x}$$

Vemos que: $\|x\| = \|\widehat{x}\| = m$

$$\cos(\gamma + \alpha) = \frac{\widehat{x}_1}{m}$$

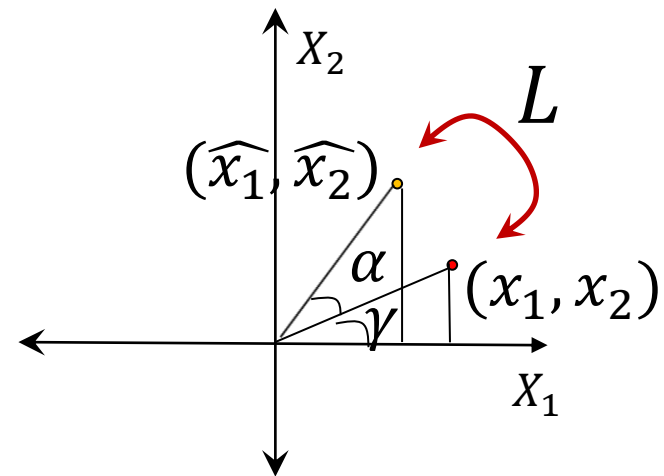
$$\text{sen}(\gamma + \alpha) = \frac{\widehat{x}_2}{m}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{x_1}{m}$$

$$\text{sen}(\gamma) = \frac{x_2}{m}$$

$$\cos(\gamma + \alpha) = \cos(\gamma) \cos(\alpha) - \text{sen}(\gamma) \text{sen}(\alpha)$$

$$\text{sen}(\gamma + \alpha) = \text{sen}(\gamma) \cos(\alpha) + \cos(\gamma) \text{sen}(\alpha)$$



Transformação: rotação em um ângulo α

Veamos uma transformação linear $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, chamada de rotação em um ângulo α :

$$L(x) = L(x_1, x_2) = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) = \widehat{x}$$

$$\cos(\gamma + \alpha) = \cos(\gamma) \cos(\alpha) - \text{sen}(\gamma) \text{sen}(\alpha)$$

$$\frac{\widehat{x}_1}{m} = \frac{x_1}{m} \cos(\alpha) - \frac{x_2}{m} \text{sen}(\alpha)$$

$$\text{sen}(\gamma + \alpha) = \text{sen}(\gamma) \cos(\alpha) + \cos(\gamma) \text{sen}(\alpha)$$

$$\frac{\widehat{x}_2}{m} = \frac{x_2}{m} \cos(\alpha) + \frac{x_1}{m} \text{sen}(\alpha)$$

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: U \rightarrow W$, entre o espaço vetorial U com base β e o espaço vetorial W com base δ .

Assim, se $X \in U$, então existe uma representação

$$X = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n$$

onde:

$$X \cong \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_\beta$$

Observar que X é um vetor variável em U .

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: U \rightarrow W$, entre o espaço vetorial U com base β e o espaço vetorial W com base δ .

Então:

$$L(X) = L(x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n)$$

$$L(X) = x_1L(\beta_1) + x_2L(\beta_2) + \cdots + x_nL(\beta_n)$$

Como os vetores $L(\beta_1), L(\beta_2), \dots, L(\beta_n)$ estão em W , devem existir representações como matrizes coluna de cada um deles baseadas na base δ .

Então as colunas são: $[L(\beta_1)]_\delta, \dots, [L(\beta_n)]_\delta$.

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: U \rightarrow W$, entre o espaço vetorial U com base β e o espaço vetorial W com base δ .

Então aplicando as equivalências com as matrizes colunas temos:

$$L \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_\beta \right) = x_1 [L(\beta_1)]_\delta + \cdots + x_n [L(\beta_n)]_\delta$$

$$L \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_\beta \right) = [[L(\beta_1)]_\delta \quad \cdots \quad [L(\beta_n)]_\delta]_\delta^\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_\beta$$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: U \rightarrow W$, entre o espaço vetorial U com base β e o espaço vetorial W com base δ .

A matriz com colunas, uma para cada elemento da base β , representada com os coeficientes da combinação linear utilizando a base δ , é chamada de matriz associada a transformação linear L :

$$[L]_{\delta}^{\beta} = [[L(\beta_1)]_{\delta} \quad \dots \quad [L(\beta_n)]_{\delta}]_{\delta}^{\beta}$$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_1$, com

$$L(a, b, c) = (a + b)t + (2a + 3c)$$

considerando as bases canônicas.

Observar:

A base canônica em \mathbb{R}^3

$$\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

A base canônica em P_1

$$\delta = \{t, 1\} = \{\delta_1, \delta_2\}$$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_1$, com

$$L(a, b, c) = (a + b)t + (2a + 3c)$$

considerando as bases canônicas.

Por ser Transformação Linear:

$$L(a, b, c) = L(a\beta_1 + b\beta_2 + c\beta_3)$$

$$L(a, b, c) = aL(\beta_1) + bL(\beta_2) + cL(\beta_3)$$

$$\begin{cases} L(\beta_1) = t + 2 \\ L(\beta_2) = t \\ L(\beta_3) = 3 \end{cases}$$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_1$, com

$$L(a, b, c) = (a + b)t + (2a + 3c)$$

considerando as bases canônicas.

$$L(a, b, c) = aL(\beta_1) + bL(\beta_2) + cL(\beta_3)$$

$$\begin{cases} L(\beta_1) = t + 2 \\ L(\beta_2) = t \\ L(\beta_3) = 3 \end{cases}$$

Expressando os elementos de \mathbb{R}^3 e P_1 como matrizes:

$$(a, b, c) \cong \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \text{ e } L(\beta_1) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, L(\beta_2) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, L(\beta_3) \cong \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_1$, com

$$L(a, b, c) = (a + b)t + (2a + 3c)$$

considerando as bases canônicas.

$$L([X]_{\beta}) = x_1[L(\beta_1)]_{\delta} + x_2[L(\beta_2)]_{\delta} + x_3[L(\beta_3)]_{\delta}$$

$$(a, b, c) \cong \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \text{ e } L(\beta_1) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, L(\beta_2) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, L(\beta_3) \cong \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[L] \left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right) = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[L] \left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Transformação linear e matriz associada

Seja a transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_1$, com

$$L(a, b, c) = (a + b)t + (2a + 3c)$$

considerando as bases canônicas.

$$(a, b, c) \cong \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \text{ e } L(\beta_1) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, L(\beta_2) \cong \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, L(\beta_3) \cong \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[L] \left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$[L]_{\delta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{\delta}^{\beta}$$

Em conclusão, estamos associando uma transformação linear com uma matriz fixa de ordem: $\dim(P_1) \times \dim(\mathbb{R}^3)$

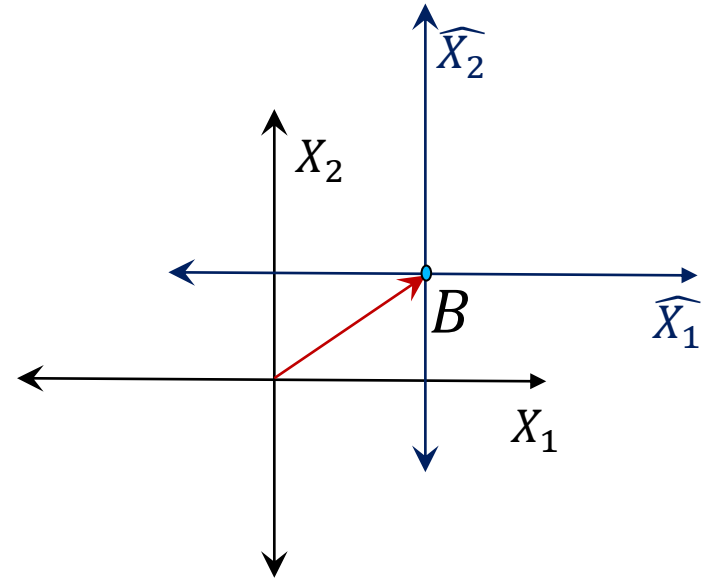
Mudança de coordenadas

Translação de eixos:

Considerando X a base atual, então para **uma mudança de coordenadas**

por translação

se faz: $X = \widehat{X} + B$



$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{x}_1 = x_1 - b_1 \\ \widehat{x}_2 = x_2 - b_2 \end{cases}$$

Exemplo

Considere a expressão:

$$2x^2 - 8x + y^2 - 2y = 3$$

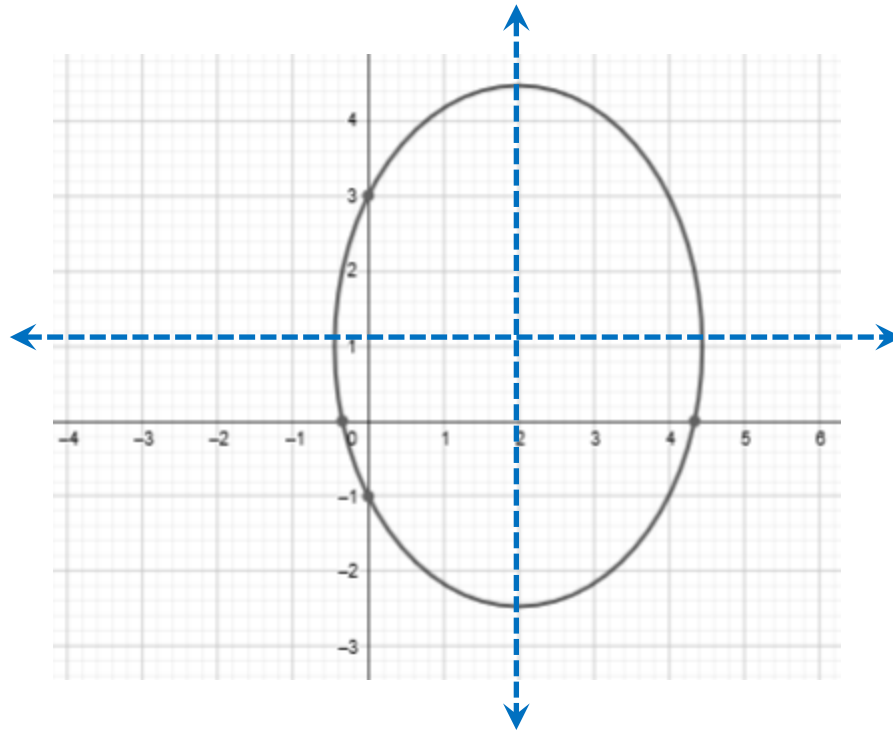
$$2(x^2 - 4x) + y^2 - 2y + 1 = 3 + 1$$

$$2(x^2 - 4x + 4) + y^2 - 2y + 1 = 3 + 1 + 8$$

$$2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 12$$

$$\begin{cases} \widehat{x}_1 = x_1 - b_1 \\ \widehat{x}_2 = x_2 - b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{x} = x - 2 \\ \widehat{y} = y - 1 \end{cases}$$
$$2\widehat{x}^2 + \widehat{y}^2 = 12$$

Coordenadas trasladadas



Coordenadas em XY

Coordenadas em $\hat{X}\hat{Y}$

Mudança de coordenadas

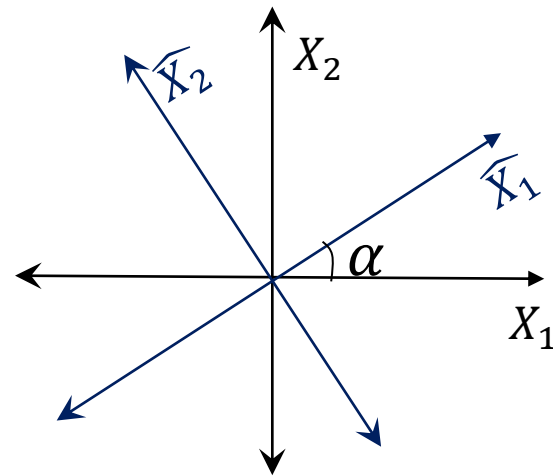
Rotação de eixos:

A matriz TL de rotação α é $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

Para uma mudança de coordenadas por rotação

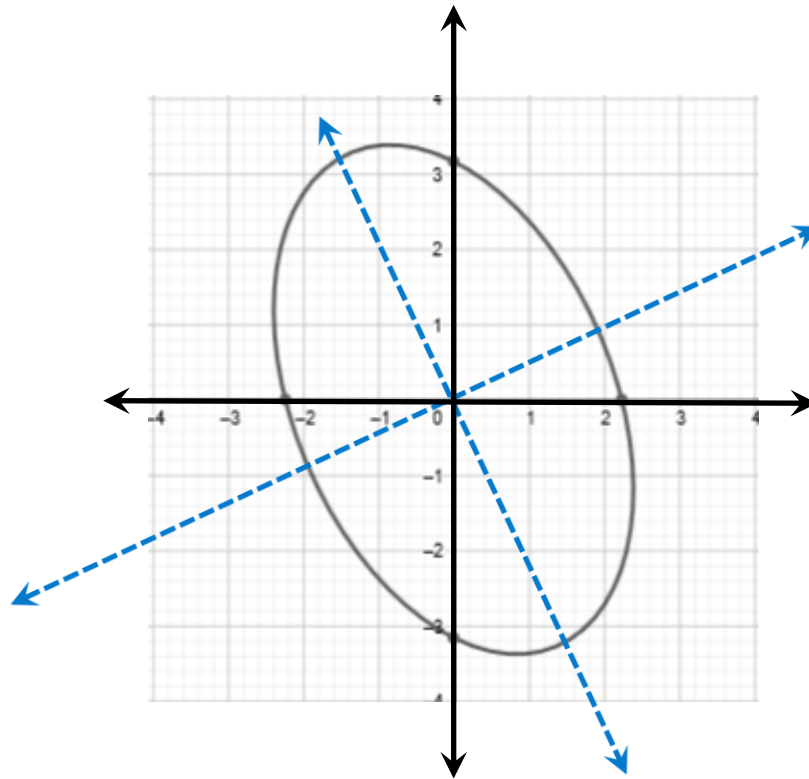
se faz: $X = A\hat{X}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x}_1 = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha \\ \hat{x}_2 = -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{cases}$$

Rotação de eixos



$$2x^2 + xy + y^2 = 10$$

Ótica geométrica

Descreve a formação de imagens utilizando um tratamento simples da luz.

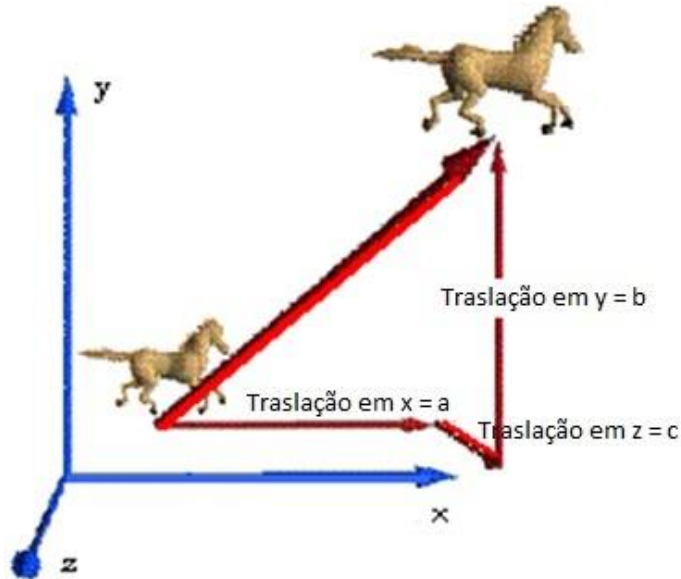
A luz é descrita por raios que representam a direção da propagação

Velocidade da luz no vácuo $c \approx 3 \times 10^8$ m/s e velocidades menores fora do vácuo.

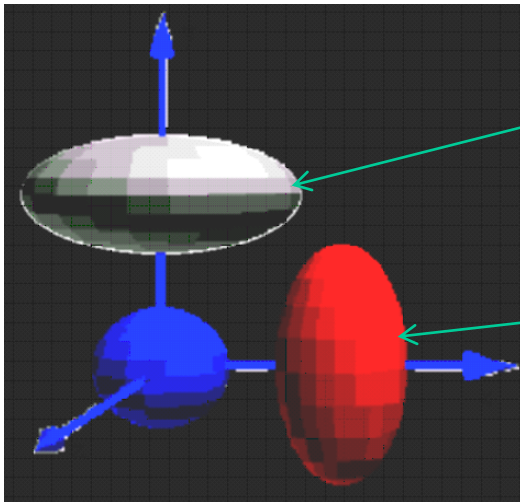
Quando a luz encontra uma interface entre dois meios acontece reflexão ou refração.

Transformações acontecem ao atravessar lentes.

Quais as transformações usadas?



A imagem do cavalo foi traslada
 $T(X) = X+B = (x,y,z) + (a,b,c)$
Transformação não linear.



A esfera foi escalonada em x e z
e depois trasladada 3 unidades em y.

A imagem transformada acima, foi
rotacionada um ângulo de $-(\pi/2)$.

Matriz de uma transformação linear

Seja o espaço dos polinômios P_2 e seja a base $B = \{2t^2, 3t - 5, 2\}$

O polinômio $p(t) = 3t^2 + 3t - 1 = \left(\frac{3}{2}\right)(2t^2) + (3t - 5) + 2(2)$

Assim, o polinômio pode ser representado por $p(t) \approx [p(t)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_B$

Rotação e translação

No caso da rotação

$$T(x, y) = (x \cos(\alpha) - y \operatorname{seno}(\alpha), x \operatorname{seno}(\alpha) + y \cos(\alpha))$$

Em formato matricial:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{seno} \alpha \\ \operatorname{seno} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos(\alpha) - y \operatorname{seno}(\alpha) \\ x \operatorname{seno}(\alpha) + y \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Forma linear com rotação e translação

$$T(x, y) = (x \cos(\alpha) - y \operatorname{seno}(\alpha) + a, x \operatorname{seno}(\alpha) + y \cos(\alpha) + b)$$

Em formato matricial:

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{seno} \alpha \\ \operatorname{seno} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos(\alpha) - y \operatorname{seno}(\alpha) + a \\ x \operatorname{seno}(\alpha) + y \cos(\alpha) + b \end{bmatrix}$$

$$T(X) = AX + B$$