ZAB 0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica
Lista 6 - Gabarito

1. Determine a área de um polígono cujos vértices são os pontos:
   $A = (4, 1)$, $B = (2, 4)$, $C = (-2, 2)$, $D = (-1, -3)$ e $E = (3, -2)$.
   Utilizar vetores e produto escalar.
   Resolução:
   A área de um triângulo formado por dois vetores u e v, pode ser calculada pela fórmula
   $$A = \frac{1}{2}\left|u \cdot v^{\perp}\right|$$
   sendo considerado o vetor v como lado base do triângulo.
   Assim, na figura formamos três triângulos que formam o polígono todo:
   $\triangle CBA$, $\triangle CEA$ e $\triangle CDE$.
   Para o $\triangle CBA$ considere como lado base ao vetor $v = CA = (6, -1)$, com $v^{\perp} = (1, 6)$,
   e $u = CB = (4, 2)$.
   A área do $\triangle CBA$ é $A_1 = \frac{1}{2}\left|u \cdot v^{\perp}\right| = \frac{1}{2}|4 + 12| = 8\, u^2$.
   Para o $\triangle CEA$ considere como lado base ao mesmo vetor v (acima), e $u = CE = (5, -4)$.
   A área do $\triangle CEA$ é $A_2 = \frac{1}{2}\left|u \cdot v^{\perp}\right| = \frac{1}{2}|5 - 24| = \frac{19}{2}\, u^2$
   Para o $\triangle CDE$ considere o lado base ao vetor $v = CE = (5, -4)$, com $v^{\perp} = (4, 5)$,
   e $u = CD = (1, -5)$.
   A área do $\triangle CDE$ é $A_3 = \frac{1}{2}\left|u \cdot v^{\perp}\right| = \frac{1}{2}|4 - 25| = \frac{21}{2}\, u^2$.
   A área total é $A = 28\, u^2$.

2. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$, não nulos, e $t \neq 0$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras e por quê?

   (a) $Proj_u\left(Proj_v u\right) = Proj_v\left(Proj_u v\right)$ então u é paralelo a $v^{\perp}$ ou $\|u\| = \|v\|$.
   (V) Observar que a igualdade apresenta:
   $$\frac{(u \cdot v)}{\|v\|^2}\frac{(v \cdot u)}{\|u\|^2}u = \frac{(v \cdot u)}{\|u\|^2}\frac{(u \cdot v)}{\|v\|^2}v \Rightarrow u = v \Rightarrow \|u\| = \|v\|.$$

   (b) $(Proj_w(u + v)) \cdot v^{\perp} \neq 0$ se $u \cdot v \neq 0$ e $w = Proj_v(tu)$.
   (F) Como $u \cdot v \neq 0$, u e v não são ortogonais, assim a projeção $Proj_v(tu) \neq 0$.
   Como $w = Proj_v(tu)$ então w é paralelo a v, $w = \alpha v \neq 0$.
   Também $Proj_w(u+v) = \beta w$, logo $(Proj_w(u + v)) \cdot v^{\perp} = \beta w \cdot v^{\perp} = \beta(\alpha v) \cdot v^{\perp} = (\beta\alpha) v \cdot v^{\perp} = 0$.

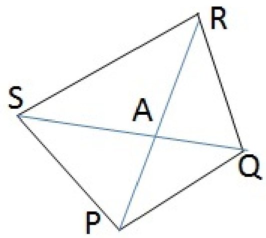
   (c) $Proj_{tv}(tu) = Proj_v u$
   (F) Observar $Proj_{tv}(tu) = \frac{tu \cdot tv}{\|tv\|^2}(tv) = \frac{t^2(u \cdot v)}{t^2\|v\|^2}(tv) = t\frac{(u \cdot v)}{\|v\|^2}v = tProj_v u$.

(d) $Proj_v(tu) = Proj_{tv}u$.

(F) Observar $Proj_v(tu) = \frac{tu \cdot v}{\|v\|^2}(v) = t\frac{(u \cdot v)}{\|v\|^2}(v) = tProj_v u$

e $Proj_{tv}u = \frac{u \cdot tv}{\|tv\|^2}(tv) = \frac{t^2(u \cdot v)}{t^2\|v\|^2}v = \frac{(u \cdot v)}{\|v\|^2}v = Proj_v u$.

3. No trapézio $PQRS$ da figura, $\|RQ\| = \|SP\|$, $S = (-4, 2)$, $Q = (10, 4)$, $PS \cdot PR = 0$ e $Proj_{QP}PR = (8, 8)$. Determinar os pontos A, P, R e o vetor PR.



Observar (desde os dados):
1. Por ser trapezio SR é paralelo a QP.
2. Como $\|RQ\| = \|SP\|$ o trapezio é isósceles, assim $\|RP\| = \|SQ\|$.
3. Os vetores PS e PR são ortogonais ($PS \cdot PR = 0$).
4. O vetor base da projeção QP é paralelo ao vetor $(8, 8)$, considerando um vetor mais simples, $QP \| (1, 1)$.

Resolução:
De 2., temos que os triângulos $\triangle RQS$ e $\triangle SPR$ são semelhantes, logo os seus ângulos correspondentes são iguais. Então, o ângulo RQS deve ser igual ao ângulo SPR.
De 3., o ângulo SPR é retângulo então RQS também, então RQ e QS são ortogonais, isto é, $QR \cdot QS = 0$.
Dessa equação podemos determinar uma relação entre as coordenadas de $R = (r_1, r_2)$, dado que os pontos S e Q são conhecidos:
$(R - Q) \cdot (S - Q) = 0$
$(r_1 - 10, r_2 - 4) \cdot (-14, -2) = 0$
$7r_1 + r_2 = 74$ ou $r_2 = 74 - 7r_1$.
De 4. e 1. temos que $QP \| SR$, então $SR \| (1, 1)$,
isto significa que SR é um múltiplo do vetor $(1, 1)$, o que se escreve:
$SR = R - S = (r_1 + 4, r_2 - 2) = \beta(1, 1)$
igualando as componentes: $r_1 + 4 = \beta$ e $r_2 - 2 = \beta$, isto é: $r_1 + 4 = r_2 - 2$, ou $r_1 = -6 + r_2$.
Substituindo a expressão anterior de r_2 temos: $r_1 = -6 + (74 - 7r_1)$ então $r_1 = \frac{17}{2}$ e $R = \left(\frac{17}{2}, \frac{29}{2}\right)$.
Para conhecer P: De 4., $(p_1 - 10, p_2 - 4) = \alpha(1, 1)$, daqui: $p_1 - 10 = p_2 - 4$, $p_1 = 6 + p_2$.
Agora de 3., temos $(-4 - p_1, 2 - p_2) \cdot \left(\frac{17}{2} - p_1, \frac{29}{2} - p_2\right) = 0$
ou $(-10 - p_2, 2 - p_2) \cdot \left(\frac{5}{2} - p_2, \frac{29}{2} - p_2\right) = 0$
ou $2p_2^2 - 9p_2 + 4 = 0$, isto é $p_2 = 4$ e $p_2 = \frac{1}{2}$.
Observar que se $p_2 = 4$, então $\|SP\| = \sqrt{200} \neq \|RQ\|$, isto significa que não podemos utilizar o valor de 4 pois contradiz o item 2.
Em consequência utilizamos $p_2 = \frac{1}{2}$, logo $P = \left(\frac{13}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Daqui: $PR = (2, 14)$.
Para determinar A perceber que SA é paralelo a SQ, pois estão na mesma diagonal.
Por serem paralelos fazemos $SA = a(SQ)$, dai $A = S + a(SQ)$.
Também PA é paralelo a PR (na mesma diagonal), logo $PA = b(PR)$, isto é $A = P + b(PR)$.
De ambas igualdades para o ponto A temos $A = S + a(SQ) = P + b(PR)$.

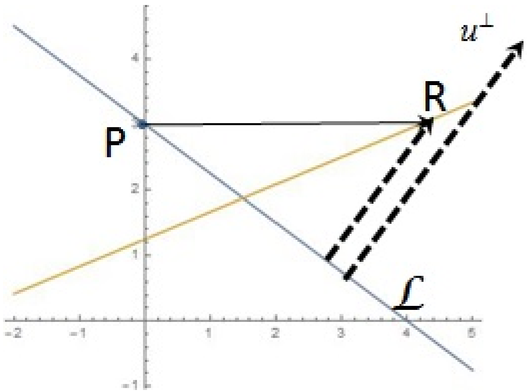


Figura 1: Questão 3 b)

Temos um sistema de duas equações com duas incognitas, resolvendo $b = \frac{7}{32}$.
Substituindo $A = \left(\frac{111}{16}, \frac{57}{16}\right)$.

4. Dados os extremos $A = (1, 1)$ e $B = (10, 7)$ do segmento de reta AB, determine o ponto Q que divide AB em dois segmentos na relação de $(-2) : (-1)$.
Resolução: A relação é dada para os dois segmentos (vetores) que foram gerados pela divisão, portanto: $AQ = \frac{(-2)}{(-1)}QB$,
assim $Q - A = \frac{2}{1}(B - Q)$, $Q = A + 2B - 2Q$, então $3Q = A + 2B = (21, 15)$,
logo $Q = (7, 5)$.

5. Os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) da reta $5x - 12y + 15 = 0$ distam 3 unidades da reta $\mathcal{L} :\ (3, 4) \cdot ((x, y) - (0, 3)) = 0$, determine $x_1 + x_2$.
Resolução: Observar que a reta $\mathcal{L} :\ (3, 4) \cdot ((x, y) - (0, 3)) = 0$ tem ponto de passagem $P = (0, 3)$ e um vetor ortogonal $u^\perp = (3, 4)$.
Procuramos um(ns) ponto(s) R na primeira reta dada tal que a projeção do vetor PR sobre o $u^\perp$ seja de tamanho 3.
Como R pertence a primeira reta, tem a forma $R = \left(r, \frac{5}{12}r + \frac{15}{12}\right)$, então $PR = \left(r, \frac{5}{12}r - \frac{21}{12}\right)$, vide Figura 1.

$\|Proj_{u^\perp} PR\| = 3$, então

$$\|Proj_{u^\perp} PR\| = \left\| \frac{PR \cdot u^\perp}{\|u^\perp\|^2} u^\perp \right\| = \left| \frac{PR \cdot u^\perp}{\|u^\perp\|^2} \right| \|u^\perp\| =$$

$$= \left| \frac{PR \cdot u^\perp}{\|u^\perp\|} \right| = \left| \frac{3r + \frac{5}{3}r - 7}{5} \right| = \left| \frac{14}{15}r - \frac{7}{5} \right| = 3.$$

Assim temos duas soluções: $\frac{14}{15}r - \frac{7}{5} = 3$ e $\frac{14}{15}r - \frac{7}{5} = -3$.
Da primeira equação obtemos $x_1 = \frac{33}{7}$ e da segunda $x_2 = -\frac{12}{7}$, logo $x_1 + x_2 = \frac{21}{7} = 3$.

6. Determine as equações paramétricas das bissectriz das retas
$\mathcal{L}_1 :\ 4x - 3y = -10$ e $\mathcal{L}_2 :\ 7x + y - 20 = 0$,
que correspondem ao ângulo agudo e ao ângulo obtuso entre as retas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$.

Resolução:
O ponto de interseção das retas é $(2,6)$.
Para determinar o vetor direção de uma bissetriz entre os vetores u e v das duas retas, basta calcular os vetores unitários e somar esses vetores. Vide os slides da aula de Retas em $\mathbb{R}^n$.
Para facilitar as contas pode se expressar: $\mathcal{L}_1: \ -4x+3y=10$ e $\mathcal{L}_2: \ 7x+y=20$
E essas são equações gerais para ambas as retas.
Lembrar que desde a equação geral de uma reta $ax+by=c$, pode ser extraído um vetor ortogonal à reta igual a (a,b).
Assim, se u é o vetor de direção da reta $\mathcal{L}_1$, então $u^{\perp}=(-4,3)$, isso significa que $u=(3,4)$.
Para o vetor de direção da reta $\mathcal{L}_2$, $v^{\perp}=(7,1)$, portanto $v=(1,-7)$.
Para encontrar a bissetriz do ângulo agudo, devem ser considerados vetores de igual medida, portanto considera-se os vetores unitários de u e v: $u_u=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ e $v_u=\left(\frac{\sqrt{2}}{10},-\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)$, e a soma é $w=\left(\frac{6+\sqrt{2}}{10},\frac{8-7\sqrt{2}}{10}\right)$.
Lembrar que o vetor de direção de uma reta pode ser qualquer vetor paralelo a algum vetor determinado, isto é, não precisamos utilizar w, posso utilizar qualquer paralelo a ele. Se multiplicar w vezes 10 (para tirar as frações), temos um vetor paralelo mais simples, o qual vou tomar como vetor de direção, então $\bar{w}=\left(6+\sqrt{2},8-7\sqrt{2}\right)$.
Assim com o vetor direção e o ponto de passagem (que é o ponto de interseção das duas retas) temos:

$$\begin{cases} x=2+(6+\sqrt{2})t \\ y=6+(8-7\sqrt{2})t \end{cases}.$$

Para calcular a segunda bissetriz, considere o inverso de um vetor, por exemplo $-u$ e o v (sempre do mesmo tamanho, de preferência unitários). O vetor direção é $w_2=-u_u+v_u$ e simplificando $\bar{w_2}=(-6+\sqrt{2},-8-7\sqrt{2})$ e com o ponto de passagem temos as equações paramétricas

$$\begin{cases} x=2+(-6+\sqrt{2})t \\ y=6+(-8-7\sqrt{2})t \end{cases}.$$

INCREMENTO:
Otra forma de encontrar a segunda bissetriz, é saber que no plano as duas bissetrizes formam sempre um ângulo reto (90°). Isso significa que se temos o vetor de direção da primeira bissetriz $\bar{w}=\left(6+\sqrt{2},8-7\sqrt{2}\right)$, o vetor da segunda bissetriz é um ortogonal $\bar{w}^{\perp}=\left(-8+7\sqrt{2},6+\sqrt{2}\right)$, então as equações paramétricas tomam a forma

$$\begin{cases} x=2+(-8+7\sqrt{2})t \\ y=6+(6+\sqrt{2})t \end{cases}.$$

Parecem muito diferentes, o aluno pode demostrar com algumas contas que $\bar{w}^{\perp}\|\bar{w_2}$.

7. Sejam as retas $\mathcal{L}_1: \ (x,y,z)=(1,0,-1)+t(1,1,2)$ e $\mathcal{L}_2: \ (x,y,z)=(-1,3,4)+r(-2,3,1)$. Determine a equação vetorial da reta $\mathcal{L}$ que é ortogonal às rectas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, e que intersepta (cruza) ambas. Achar os pontos de intersecção.
Resolução: Se $\mathcal{L}$ é ortogonal a $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, o vetor direção de $\mathcal{L}$ será ortogonal aos vetores direção das outras duas retas simultaneamente. Logo um vetor direção será o produto vetorial
$w=(1,1,2)x(-2,3,1)=(-5,-5,5)=-5(1,1,-1)$.
A equação da reta $\mathcal{L}$ precisa de um ponto de passagem, como $\mathcal{L}$ intersepta $\mathcal{L}_1$, vamos a utilizar esse ponto $(x_1,y_1,z_1)\in\mathcal{L}_1\cap\mathcal{L}$, como ponto de passagem, então a equação é
$\mathcal{L}:(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+s(1,1,-1)$.

Por ser ponto de $\mathcal{L}_1$ podemos escrever
$\mathcal{L} : (x, y, z) = (1, 0, -1) + t_1(1, 1, 2) + s(1, 1, -1) = (1 + t_1 + s, t_1 + s, -1 + 2t_1 - s)$.
Por outro lado, como $\mathcal{L}$ cruza $\mathcal{L}_2$, existe um ponto em $\mathcal{L}_2$ que também é ponto de $\mathcal{L}$, $(x_2, y_2, z_2) = (-1, 3, 4) + r_2(-2, 3, 1) = (-1 - 2r_2, 3 + 3r_2, 4 + r_2)$.
Por ser ponto de $\mathcal{L}$, substituimos na equação de $\mathcal{L}$ obtendo:
$\mathcal{L} : (-1 - 2r_2, 3 + 3r_2, 4 + r_2) = (1 + t_1 + s, t_1 + s, -1 + 2t_1 - s)$.
O que dá um sistema linear de 3 equações com 3 incognitas. Levando a matriz estendida, temos:

$$\left\{ \begin{array}{c} 2r_2 + t_1 + s = -2 \\ -3r_2 + t_1 + s = 3 \\ -r_2 + 2t_1 - s = 5 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix},$$

cuja solução é $r_2 = -1$, $t_1 = \frac{4}{3}$ e $s = -\frac{4}{3}$.
Assim: $(x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}$ e $(x_2, y_2, z_2) = (1, 0, 3) \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}$.
A equação vetorial da reta$\mathcal{L}$ é $\mathcal{L} : (x, y, z) = (1, 0, 3) + s(1, 1, -1)$.

8. Um plano $\mathcal{P}$ contêm a reta $\mathcal{L}_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$, e é paralelo a reta $\mathcal{L}_2 : \left\{ \begin{array}{c} 2x = y + 7 \\ 3x = z \end{array} \right.$.
Determine a equação vetorial, equação geral e equações paramétricas do plano.
Resolução: Dos dados $\mathcal{L}_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2} = t$ então obtemos a representação paramétrica seguinte:

$$\mathcal{L}_1 : \left\{ \begin{array}{c} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{array} \right. .$$

Por estar a reta contida no plano, o vetor da reta pode ser considerada como um dos vetores direção do plano, o outro vetor será o vetor direção da reta paralela ao plano:

$$\mathcal{L}_2 : \left\{ \begin{array}{c} x = s \\ y = 2s - 7 \\ z = 3s \end{array} \right. .$$

Assim, os dois vetores direção são $u = (1, -1, 2)$ e $v = (1, 2, 3)$. Para a equação vetorial falta um ponto de passagem que pode ser obtido da reta contida no plano, por exemplo $P = (0, 3, -1)$.
A equação vetorial do plano é $\mathcal{P} : (x, y, z) = (0, 3, -1) + m(1, -1, 2) + r(1, 2, 3)$. As equações paramétricas

$$\mathcal{P} : \left\{ \begin{array}{c} x = m + r \\ y = 3 - m + 2r \\ z = -1 + 2m + 3r \end{array} \right. .$$

Para a equação geral obtemos o vetor normal $n = u \times v = (-7, -1, 3)$, portanto a equação geral é $\mathcal{P} : -7x - y + 3z = -6$.

9. Dado o plano $\mathcal{P} : 2x + y + z = 3$, indicar se o ponto $S = (1, 2, 2)$ está acima ou embaixo do plano. Escreva a equação vetorial do plano e as equações paramétricas do mesmo.
Resolução:
Substituindo as coordenadas do ponto no primeiro membro da equação do plano temos
$2(1) + (2) + (2) = 6 > 3$.
Assim, pode-se dizer que está acima do plano.
Para obter a equação vetorial do plano, achamos três pontos não colineares do plano e montamos dois vetores direção, por exemplo $P = (1, 0, 1)$, $Q = (0, 0, 3)$ e $R = (1, 1, 0)$.

Os vetores $u = PQ = (-1, 0, 2)$ e $v = (0, 1, -1)$.
Observar que os dois vetores são linearmente independentes (Observar: se fossem dependentes, então $u = \alpha v$, igualando as terceiras componentes teriamos $2 = \alpha(-1)$ então $\alpha = -2$; igualando as segundas componentes $0 = \alpha 1$, então $\alpha = 0$, que não é válido).
A equação vetorial do plano é $\mathcal{P} : (x, y, z) = (0, 0, 3) + t(-1, 0, 2) + s(0, 1, -1)$ e as equações paramétricas

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = -t \\ y = s \\ z = 3 + 2t - s \end{cases} .$$

10. **Desafio:** $ABCD$ é um quadrilátero, e $E = (1, 5)$ é o ponto médio de AB, $H = (4, 2)$ é o ponto médio de AD, o vetor CE é paralelo a $(2, 3)$. O vetor DE é paralelo a $(1, -2)$ e $Proj_{AB}CH = (5, 5)$. Determine os vértices A, B, C e D.
Resolução:
Dos dados paralelos obtemos as seguintes relações: $CE = m(2, 3)$, $DE = n(1, -2)$,
e como $(Proj_{AB}CH) \| AB \| AE \| EB$, podemos dizer $AE = r(5, 5)$.
Também é conhecido $HE = E - H = (-3, 3)$.
Agora: $AE = AH + HE = HD + HE = (HE + ED) + HE = 2HE + ED$.
Isto é: $(5r, 5r) = 2(-3, 3) - (n, -2n)$ o que dá o sistema $(5r + n, 5r - 2n) = (-6, 6)$.
Por Gauss-Jordan:
$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -6 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, então $r = -\frac{2}{5}$ e $n = -4$.
$AE = (-2, -2) = E - A$, isto é, $A = (1, 5) + (2, 2) = (3, 7)$.
$B = A + AB = A + 2AE = (3, 7) + (-4, -4) = (-1, 3)$. Então $AB = (-4, -4)$.
$CE = (2m, 3m)$, então $E - (2m, 3m) = C$, $C = (1 - 2m, 5 - 3m)$.
Agora utilizamos a informação do vetor projeção:

$$\frac{CH \cdot AB}{\|AB\|^2} AB = \frac{(3 + 2m, -3 + 3m) \cdot (-4, -4)}{32} (-4, -4) =$$

$$= \left(-\frac{5}{8} m\right)(-4, -4) = \left(\frac{5}{2} m, \frac{5}{2} m\right).$$

E o vetor devia ser igual a $(5, 5)$, então $\frac{m}{2} = 1$, assim $m = 2$, portanto $C = (-3, -1)$.
Para: $D = 2AH + A = 2(H - A) + A = 2H - A = (8, 4) - (3, 7) = (5, -3)$.