# Produto Vetorial

# $\mathbb{R}^3$

**ZAB0161 – “Álgebra linear com aplicações em geometria analítica”**


## Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

**Dpto. de Ciências Básicas – FZEA – USP**


**15 de maio de 2020**

# ZAB0161 - Álgebra Linear com Aplicações em Geometria Analítica

# Produto vetorial

$\mathbb{R}^{3}$

**Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle**

***ZAB (Dpto. de Ciências Básicas) – FZEA – USP***

# O espaço vetorial $\mathbb{R}^3$

Operações no espaço vetorial

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

**Adição**: Sejam $x\ e\ y \in \mathbb{R}^3$ define-se

$$x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_n + y_n)$$

**Multiplicação vezes escalar**: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^3$ define-se

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in \mathbb{R}^3$$

**Produto escalar**: Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, define-se

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \in \mathbb{R}$$

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^3$

Mais uma operação no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

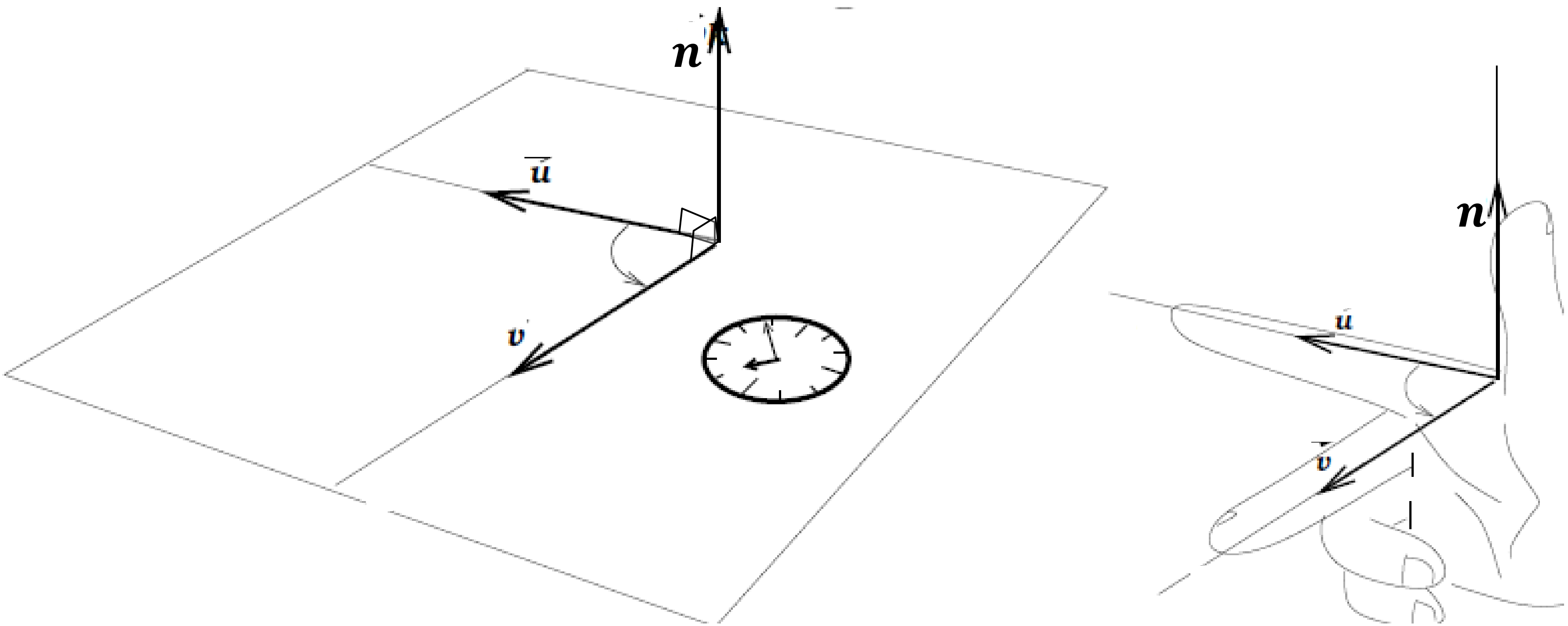
**Produto Vetorial**

Dados dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^3$, define-se o produto vetorial $u \times v$ como

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Assim, $u \times v \in \mathbb{R}^3$.

# Produto vetorial




**Propriedades**: Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $n = u \times v$, então

1. $u \perp n$ e $v \perp n$ portanto $n \cdot u = 0$ e $n \cdot v = 0$
2. $u \times v = -(v \times u)$

# Produto Vetorial

**Propriedades**: Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, então

*3.* $u \times u = 0$

*4.* $u \times 0 = 0$

*5.* $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$

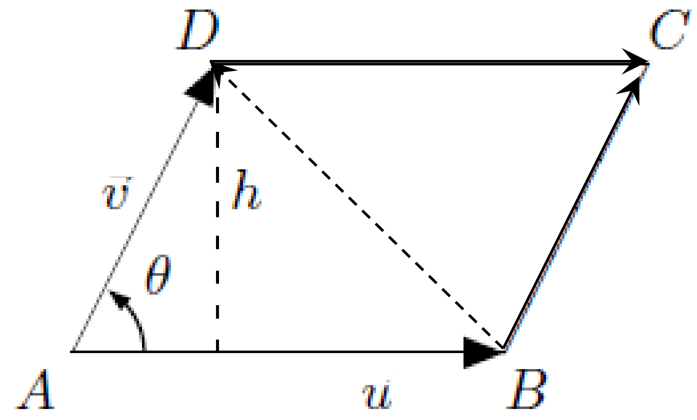
*6.* $(\alpha u) \times v = u \times (\alpha v) = \alpha(u \times v)$

7. Área del paralelogramo

$Area(ABCD) = \|u \times v\|.$

8. Área del triângulo

$Area(\triangle ABD) = \frac{1}{2}\|u \times v\|.$



# Exemplo

Considere:

$u = (2,1,2)$ e $v = (-3,1,-1)$. Calcule $n = v \times u$.

Vejamos:

$$v = (-3,1,-1)$$
$$u = (\ \ 2,1,2\ )$$
$$n = v \times u = (3,4,-5)$$

Se fosse:

$$v = (-4,-2,-4)$$
$$u = (\ \ 2,1,2)$$

então $$n = v \times u = (0,0,0)$$

# O espaço vetorial $\mathbb{R}^3$

Operações para o espaço vetorial

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

**Adição**: Sejam $x\ e\ y \in \mathbb{R}^3$ define-se

$$x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

**Multiplicação vezes escalar**: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^3$ define-se $\alpha x = \alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in \mathbb{R}^3$

**Produto escalar**: Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$, define-se

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \in \mathbb{R}$$

**Produto vetorial**:

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \in \mathbb{R}^3$$