ZAB0161 - Álgebra Linear com Aplicações em Geometria Analítica

Geometria vetorial
Retas em $\mathbb{R}^n$ $\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right)$

Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle

ZAB (Dpto. de Ciências Básicas) – FZEA – USP

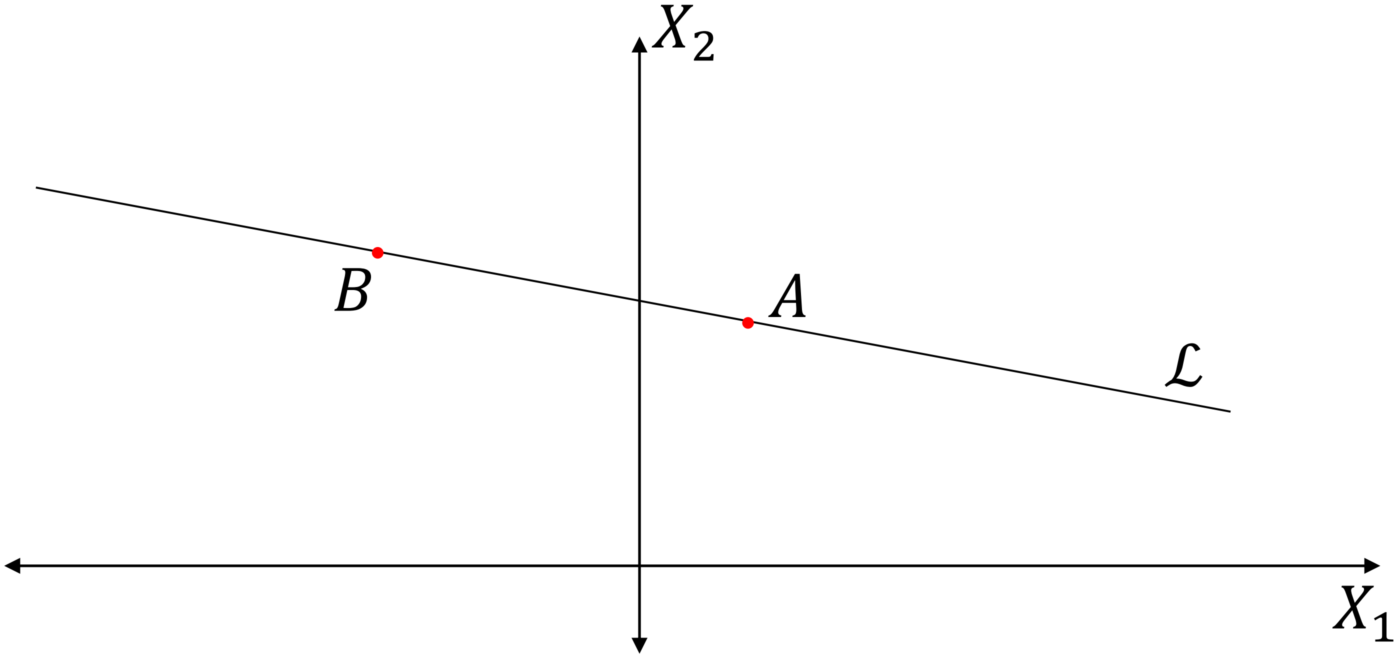
Axioma de Hilbert

Uma das premissas propostas por David Hilbert (1899) no livro “Grundlagem der Geometrie” (“Fundamentos da Geometria”) para fundamentar um tratamento moderno da geometria euclidiana foi

Dois pontos distintos A e B sempre determinam completamente uma linha reta.

Axioma de Hilbert

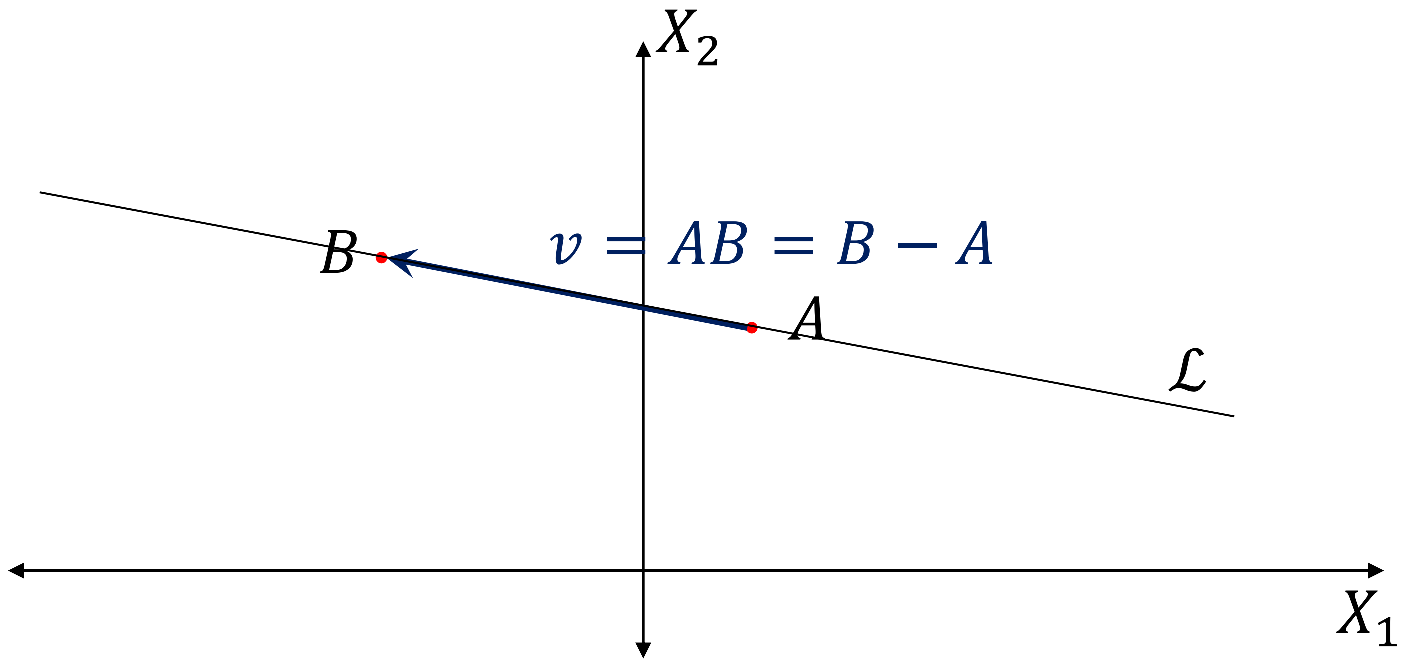
Dois pontos distintos A e B sempre determinam completamente uma linha reta.



Reta em $\mathbb{R}^2$

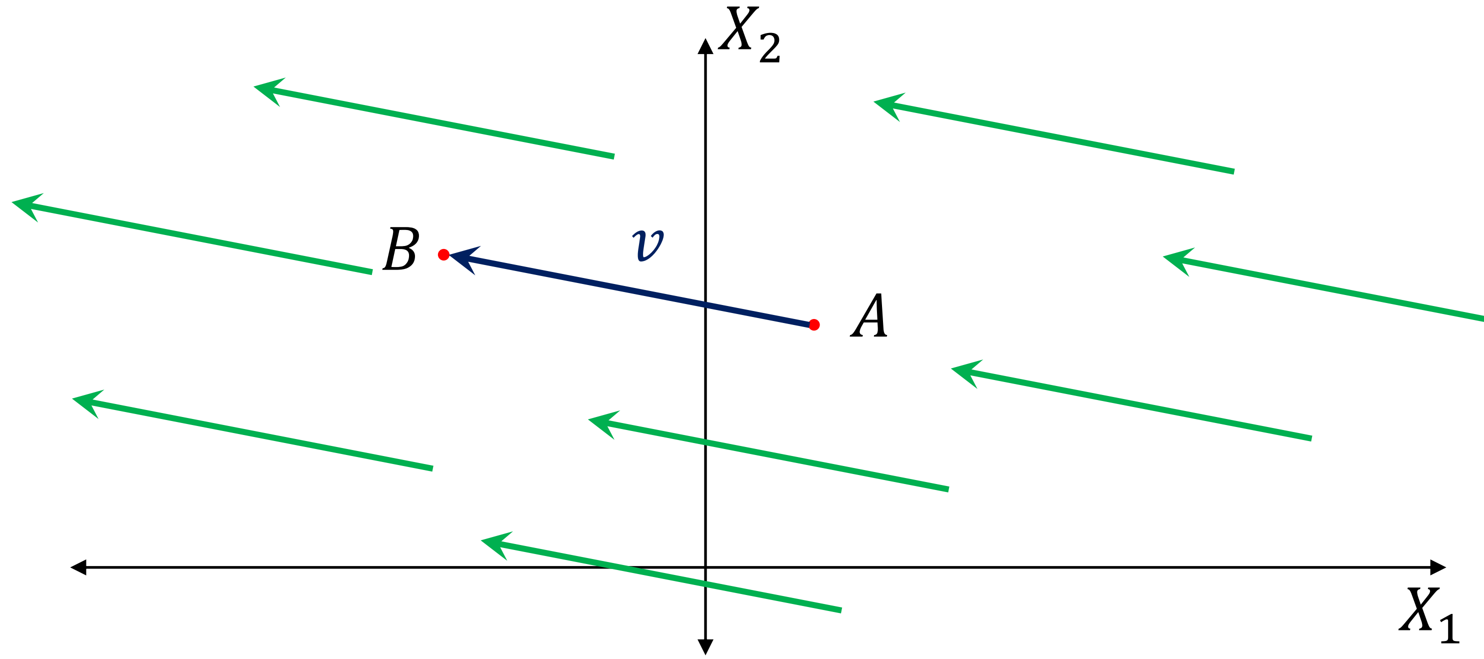
Sejam dois pontos diferentes no plano cartesiano, A e B. Construimos o vetor que une os pontos

$$v = AB = B - A$$



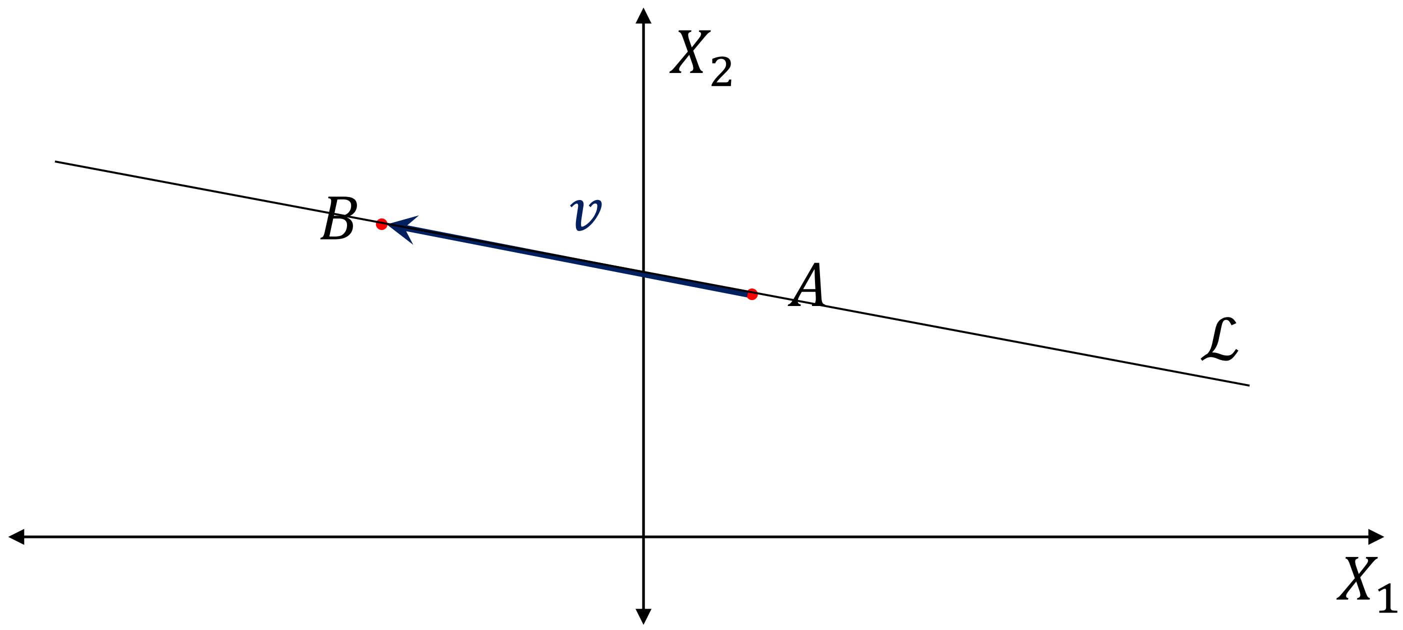
Reta em $\mathbb{R}^2$

O vetor v, $v \neq 0$, pode ser representado em qualquer posição no plano, mas apenas uma representação parte do ponto A. A representação do vetor v partindo de A é única.



Reta em $\mathbb{R}^2$

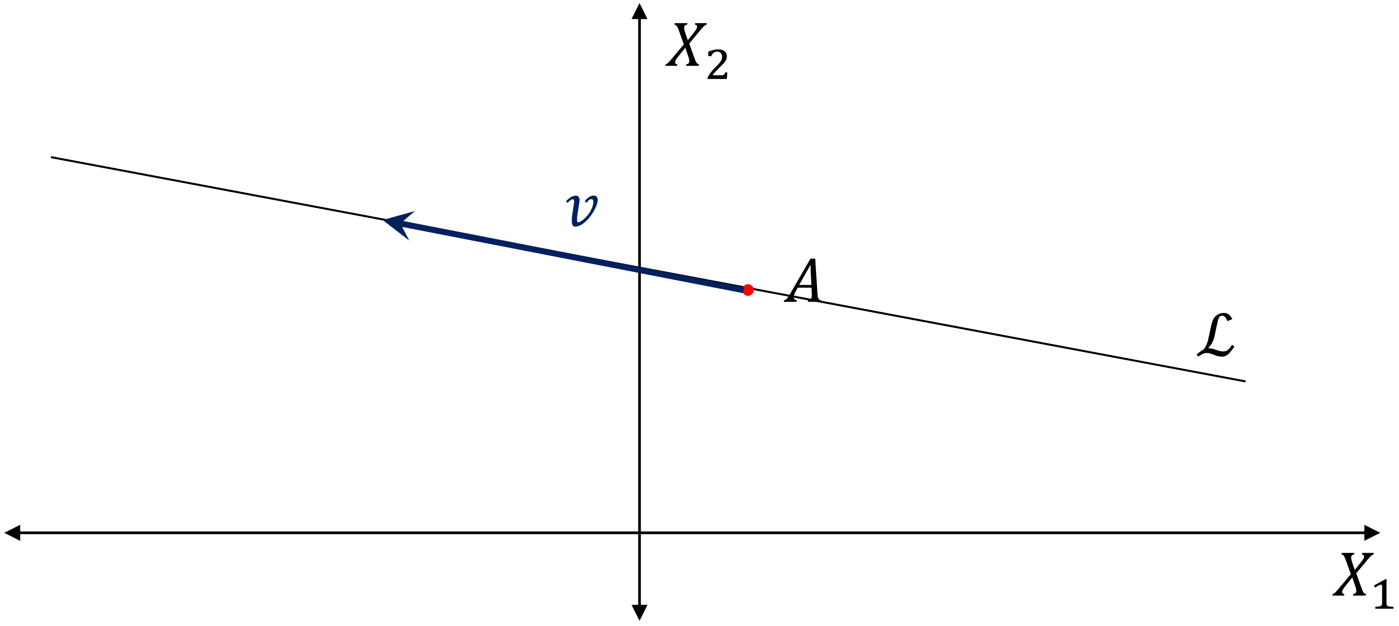
Observar: Se considerarmos o vetor, $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, e o ponto A, o ponto final é B, e não existe outra possibilidade. Assim, vamos considerar o ponto A e o vetor v para construir a única reta determinada.



Reta em $\mathbb{R}^2$

Se considerarmos o vetor, $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, e o ponto A, desconsideramos o ponto B.

Continua-se com dois elementos fixos: o ponto A e o vetor v, para construir a reta determinada.

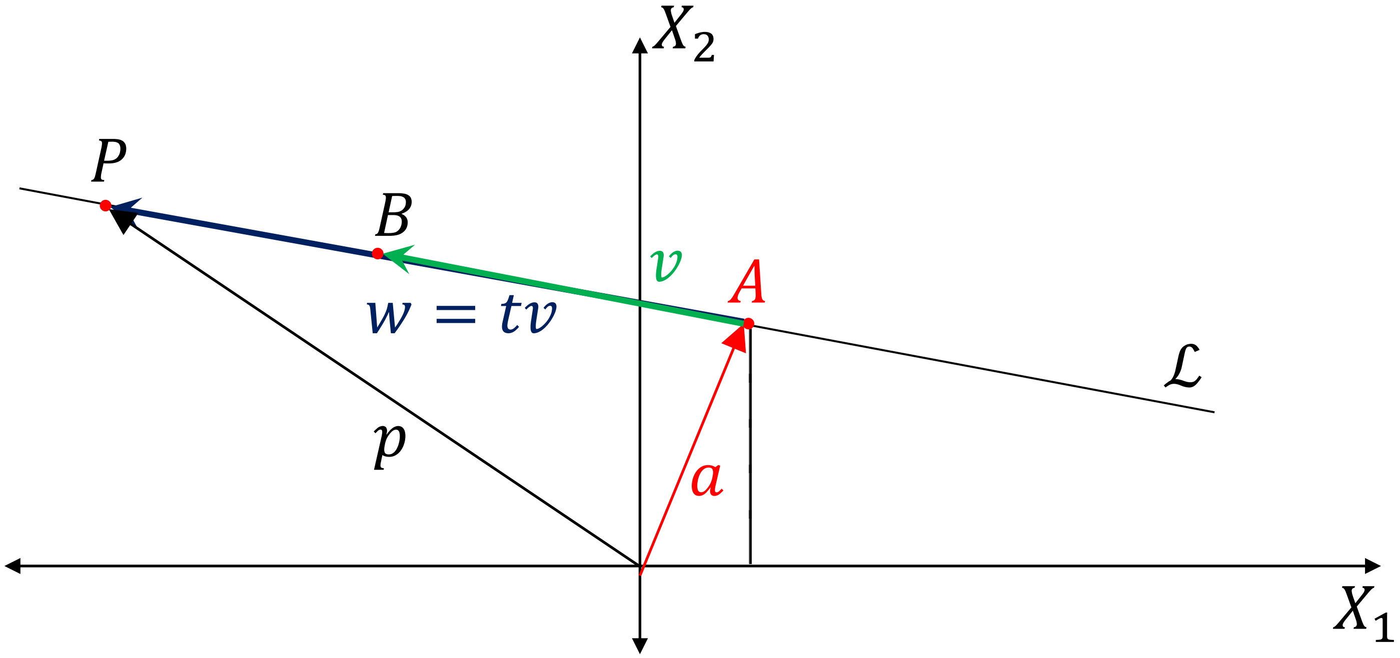


Reta em $\mathbb{R}^2$

Observar: Se construimos um vetor w paralelo a v, existe um escalar $t \in \mathbb{R}$, que satisfaz $w = tv$.

Somando, atingimos o ponto:

$$P = A + w = A + tv.$$

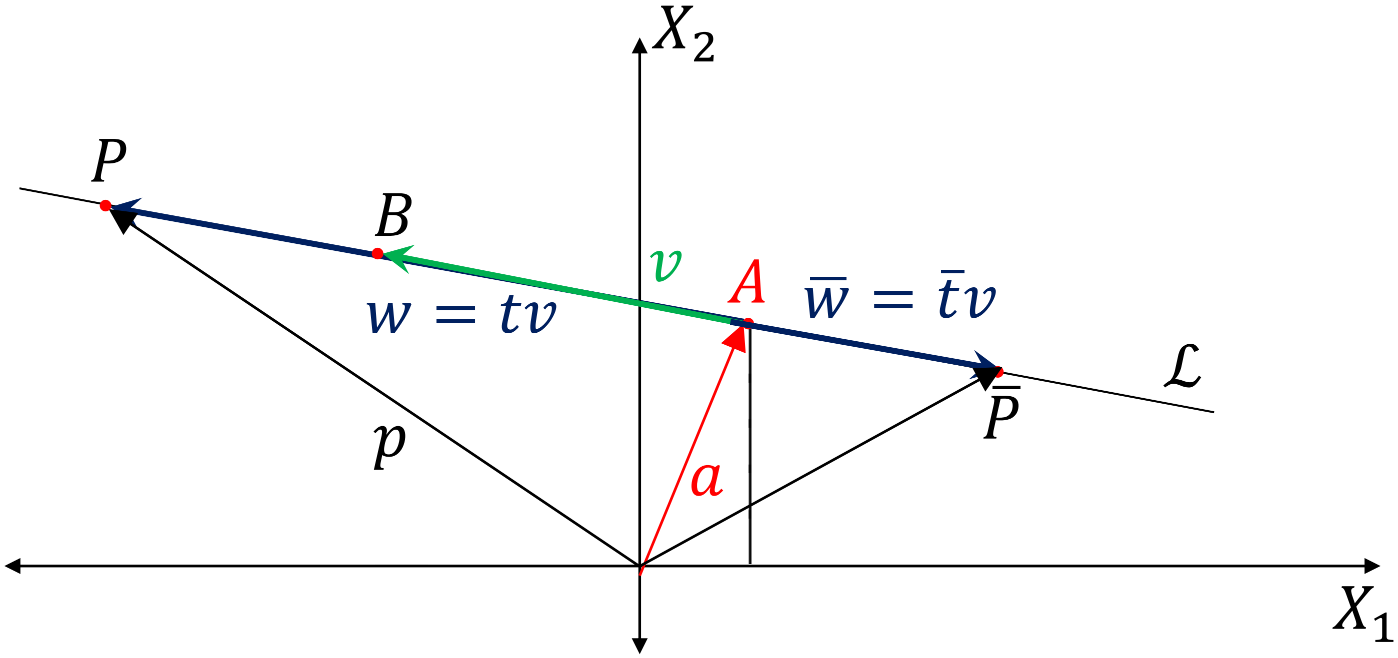


Reta em $\mathbb{R}^2$

Observar: Se construimos um vetor w paralelo a v, existe um escalar $t \in \mathbb{R}$, que satisfaz $w = tv$.

Somando, atingimos o ponto: $P = A + w = A + tv$.

Variando valores de t, atingimos pontos diferentes.



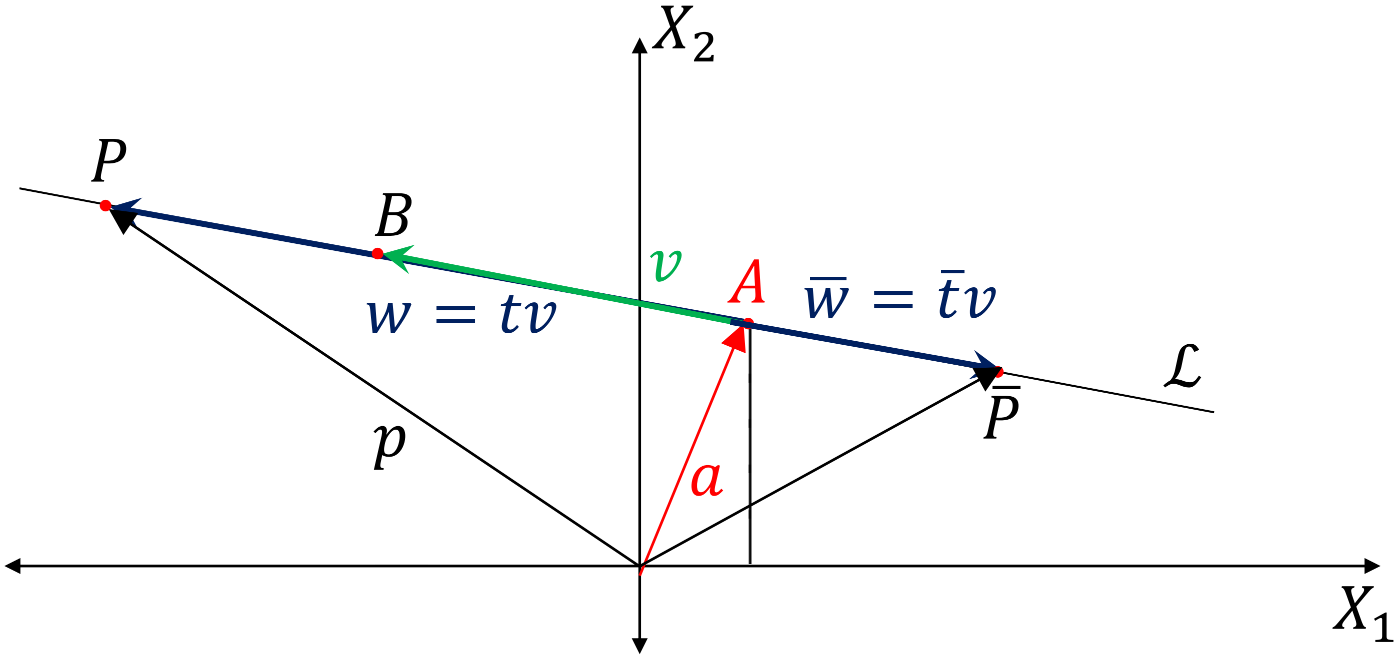
Reta em $\mathbb{R}^2$

Variando valores de t, obtemos pontos que

$$P = A + w = A + tv$$

onde $t \in \mathbb{R}$.

Formamos o conjunto de todos os pontos possíveis.



Equação vetorial de uma Reta em $\mathbb{R}^2$

Dado um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^2$, e dado um ponto fixo A, então define-se uma reta $\mathcal{L}$ como o conjunto de pontos que satisfaçam

$$\mathcal{L} = \{P \ / \ P = A + tv, t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{L}\colon \ P = A + tv, t \in \mathbb{R}$$

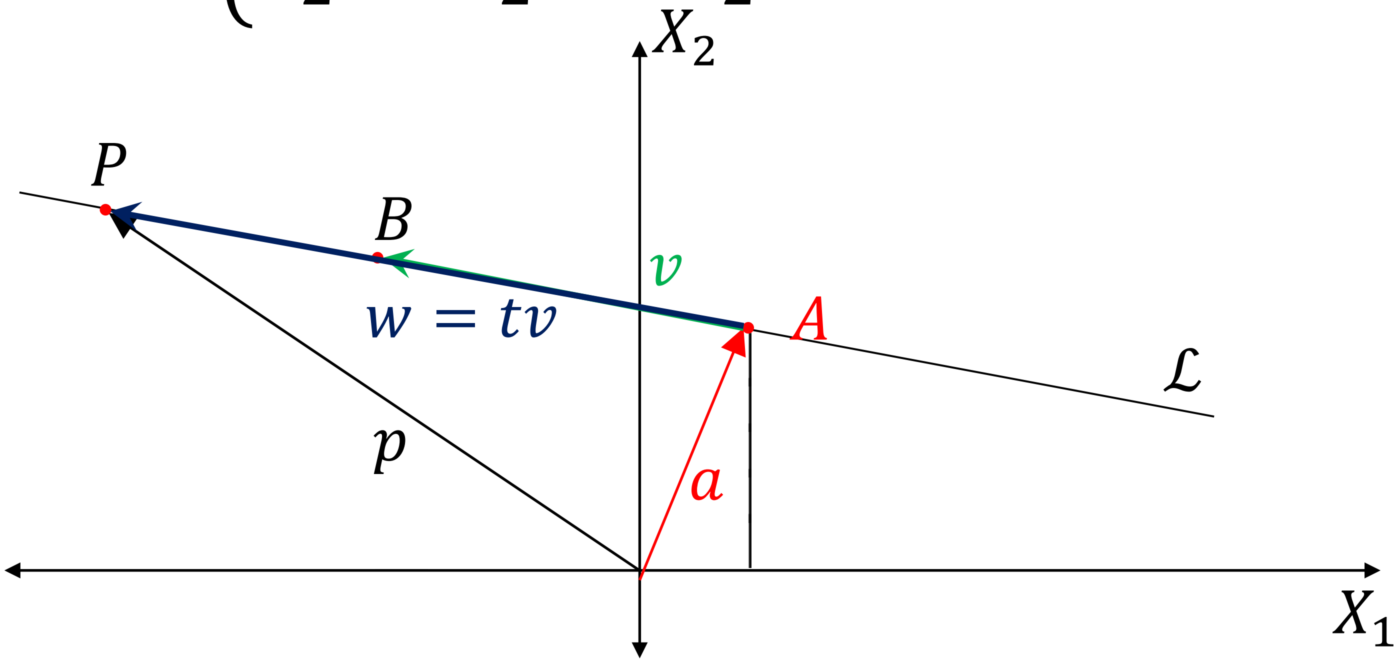
A equação dada é chamada de **equação vetorial** da reta $\mathcal{L}$. O vetor v, não nulo, é chamado de **vetor de direção** da reta $\mathcal{L}$. O ponto fixo A é chamado de **ponto de passagem** da reta $\mathcal{L}$.

Equações paramétricas da Reta em $\mathbb{R}^2$

Se $P = (x_1, x_2) \in \mathcal{L}$, então $\mathcal{L}: P = A + tv$

$$\mathcal{L}: (x_1, x_2) = (a_1, a_2) + t(v_1, v_2)$$

$$\mathcal{L}: \begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 \\ x_2 = a_2 + tv_2 \end{cases} \text{, onde } t \in \mathbb{R}$$

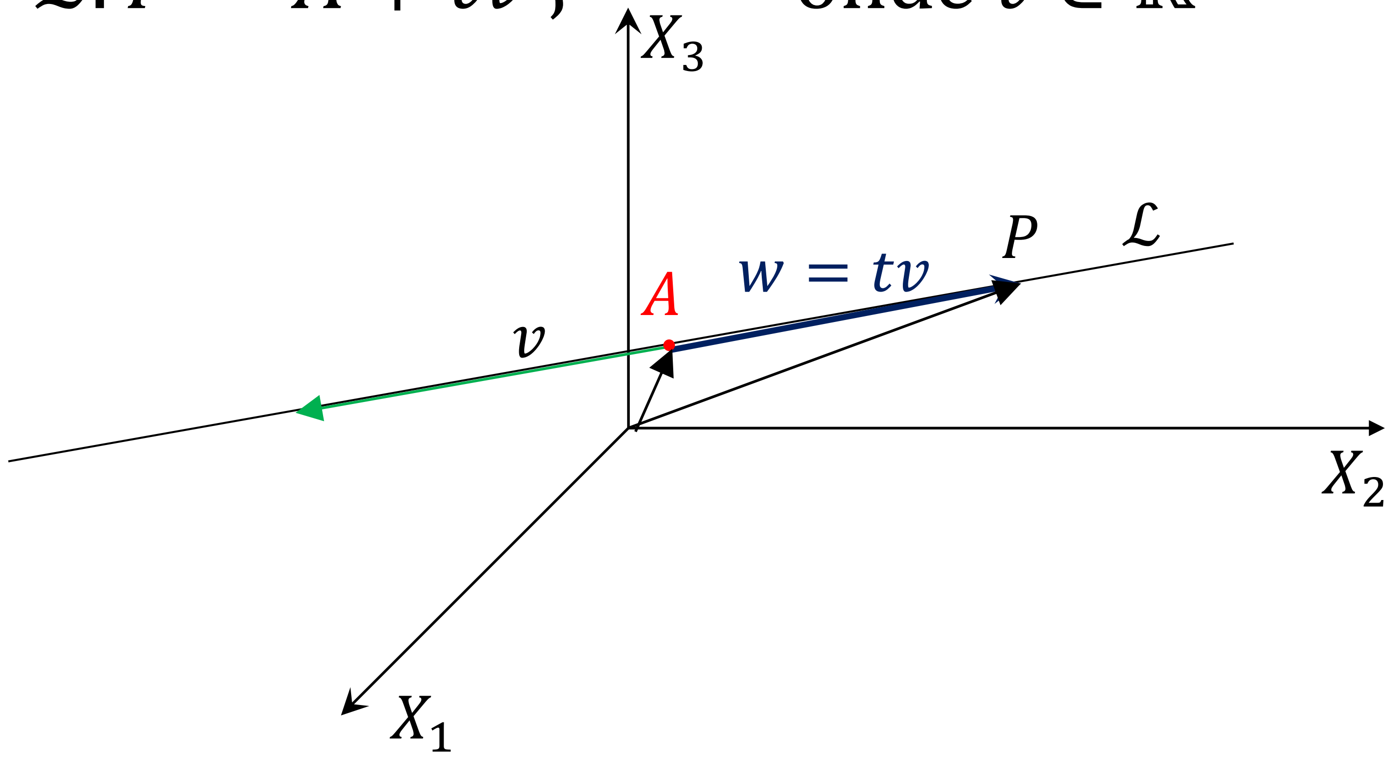


Dá um sistema de equações paramétricas da reta $\mathcal{L}$.

Reta em $\mathbb{R}^3$

Em $\mathbb{R}^3$, similarmente. Se usarmos um vetor v, não nulo, (**vetor de direção**) e o ponto fixo A (**ponto de passagem**), construimos o conjunto de pontos

$$\mathcal{L}: P = A + tv \,, \qquad \text{onde } t \in \mathbb{R}$$

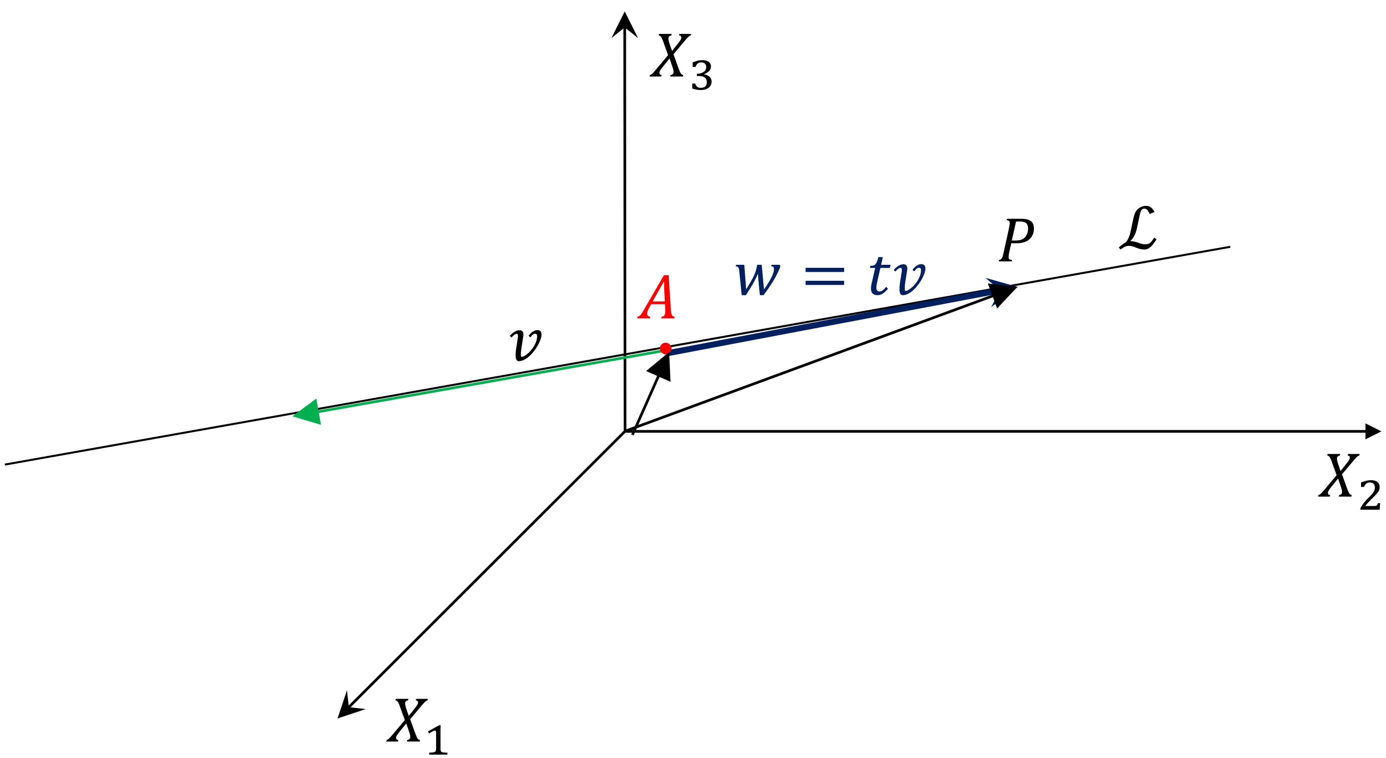


Reta em $\mathbb{R}^3$

Portanto, podemos construir o conjunto do pontos $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}: P = A + tv\,, \qquad \text{onde } t \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}: (x_1, x_2, x_3) = (a_1, a_2, a_3) + t(v_1, v_2, v_3)$$



Equação vetorial da Reta em $\mathbb{R}^n$

Estendemos a definição para $\mathbb{R}^n$

Dado um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^n$, vetor de direção, e dado um ponto de passagem fixo A, então define-se a reta $\mathcal{L}$ como o conjunto de pontos que satisfazem

$$\mathcal{L} = \{P \ / \ P = A + tv, t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{L}: P = A + tv \qquad t \in \mathbb{R}$$

A equação, válida para todos os pontos da reta, é chamada de **equação vetorial** da reta $\mathcal{L}$.

Reta em $\mathbb{R}^n$

Observar que a equação vetorial é um conjunto de várias equações.

Dado um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, \dots, v_n)$,

e um ponto de passagem $A = (a_1, \dots, a_n)$, então a

reta $\mathcal{L}$ é o conjunto de pontos $P = (x_1, \dots, x_n)$

que satisfaçam:

$$\mathcal{L}: (x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n) + t(v_1, \dots, v_n)$$

onde $t \in \mathbb{R}$.

Reta em $\mathbb{R}^n$

Então a equação vetorial da reta $\mathcal{L}$, pode ser expressada pelas equações de cada componente:

$$\mathcal{L}: \begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 \\ x_2 = a_2 + tv_2 \\ \qquad \vdots \\ x_n = a_n + tv_n \end{cases}$$

onde $t \in \mathbb{R}$.

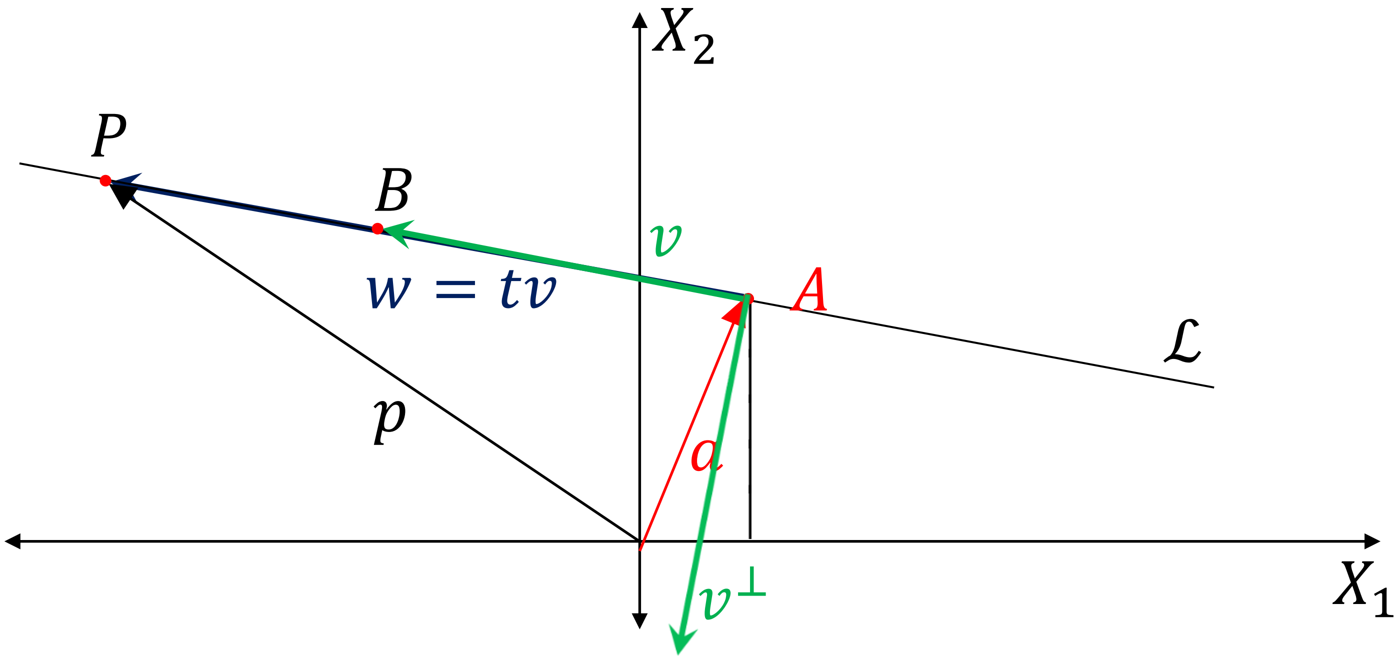
Chamamos de **equações paramétricas** da reta $\mathcal{L}$.

Apenas para Retas em $\mathbb{R}^2$

Voltando para $\mathbb{R}^2$, se $P \in \mathcal{L}$, então

$$(x_1, x_2) = (a_1, a_2) + t(v_1, v_2)$$

Lembrar: Para qualquer vetor $v = (v_1, v_2)$ podemos construir um ortogonal $v^\perp = (-v_2, v_1)$.



Apenas para Retas em $\mathbb{R}^2$

Aplicando o produto escalar vezes o vetor ortogonal

$$(x_1, x_2) = (a_1, a_2) + t(v_1, v_2)$$

$$(x_1, x_2) \cdot v^{\perp} = (a_1, a_2) \cdot v^{\perp} + t(v_1, v_2) \cdot v^{\perp}$$

O produto dos vetores $v \cdot v^{\perp} = 0$. Então

$$(x_1, x_2) \cdot (-v_2, v_1) = (a_1, a_2) \cdot (-v_2, v_1)$$

$$-v_2 x_1 + v_1 x_2 = -v_2 a_1 + v_1 a_2$$

Como v e a são conhecidos, vamos denotar por

$$c = -v_2 a_1 + v_1 a_2$$

Assim

$$-v_2 x_1 + v_1 x_2 = c$$

Apenas para Retas em $\mathbb{R}^2$

Como é válido para qualquer $P = (x_1, x_2) \in \mathcal{L}$, então a reta é definida pela equação

$$\mathcal{L}: -v_2 x_1 + v_1 x_2 = c$$

Como v_1 e v_2 são números reais denotamos por $a = -v_2$ e $b = v_1$, assim temos outra equação

$$\mathcal{L}: a x_1 + b x_2 = c$$

A expressão é chamada de **equação geral** da reta $\mathcal{L}$.

Se utilizarmos $P = (x, y) \in \mathcal{L}$ temos a expressão

$$\mathcal{L}: ax + by = c$$

Resumo: Equações de uma Reta em $\mathbb{R}^2$

Dado um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^2$, e dado um ponto de passagem fixo A, então a **equação vetorial** da reta determinada é

$$\mathcal{L}: P = A + tv, t \in \mathbb{R}$$

As **equações paramétricas** da mesma reta são:

$$\mathcal{L}: \begin{cases} x_1 = a_1 + tv_1 \\ x_2 = a_2 + tv_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

A **equação geral** da reta $\mathcal{L}$ é

$$\mathcal{L}: -v_2 x_1 + v_1 x_2 = -v_2 a_1 + v_1 a_2$$

$$\mathcal{L}: ax_1 + bx_2 = c$$

Inclinação de uma reta em $\mathbb{R}^2$

Dado um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^2$, e dado um ponto de passagem fixo A, então da **equação geral** de $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}: -v_2 x_1 + v_1 x_2 = c$$

onde $c = -v_2 a_1 + v_1 a_2$.

Apenas, se $\boldsymbol{v_1 \neq 0}$, podemos escrever

$$\mathcal{L}: v_1 x_2 = v_2 x_1 + c$$

$$\mathcal{L}: x_2 = \frac{v_2}{v_1} x_1 + \frac{c}{v_1}$$

Quando utilizamos a expressão $\mathcal{L}: y = m\,x + n$

o valor m é chamado de inclinação da reta $\mathcal{L}$. Assim:

$$m = \frac{v_2}{v_1}$$

Exemplo 1

Olhando do alto da linha de produção pode-se observar dois trajetos retos que os colaboradores utilizam para se deslocar. Determine as equações paramétricas das bissetrizes dos trajetos

$\mathcal{L}_1: 4x - 3y = -10$

$\mathcal{L}_2: 7x + y - 20 = 0$

Resolução

O que podemos resgatar dos dados?

Vetor ortogonal a reta $\mathcal{L}_1$: $v^{\perp} = (4, -3)$, então o vetor direção é $v = (-3, -4)$.

Exemplo 1

Vetor ortogonal a reta $\mathcal{L}_2$: $u^{\perp} = (7,1)$, então o vetor direção é $u = (1, -7)$.

Se igualamos ambas equações gerais das retas, obtemos o **ponto comúm** (ponto de interseção)

Se $R = (r_1, r_2) \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ então

$$\begin{cases} 4r_1 - 3r_2 = -10 \\ 7r_1 + r_2 = 20 \end{cases}$$

A solução dá $R = (2,6\ )$

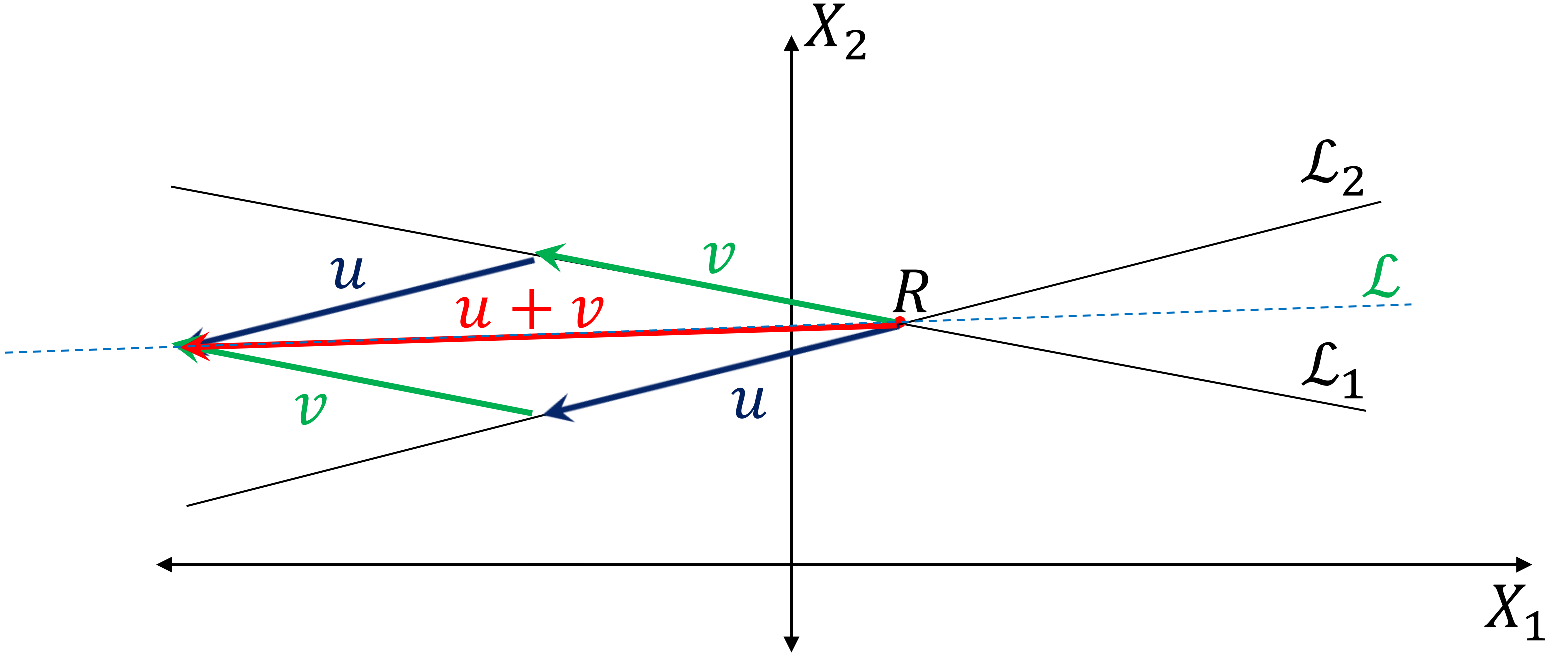
Voltando na teoria: Bissetriz em $\mathbb{R}^2$

Para conhecer a bissetriz entre duas retas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, primeiro precissamos conhecer o ponto de interseção entre elas, a bissetriz passa pelo mesmo ponto. Depois conhecer os vetores de direção das retas mas com **igual medida**, assim a soma dá o vetor direção da bissetriz.

Lembrar: Para todo vetor não nulo v, podemos construir o seu vetor unitário, medida: $\|v_u\| = 1$.

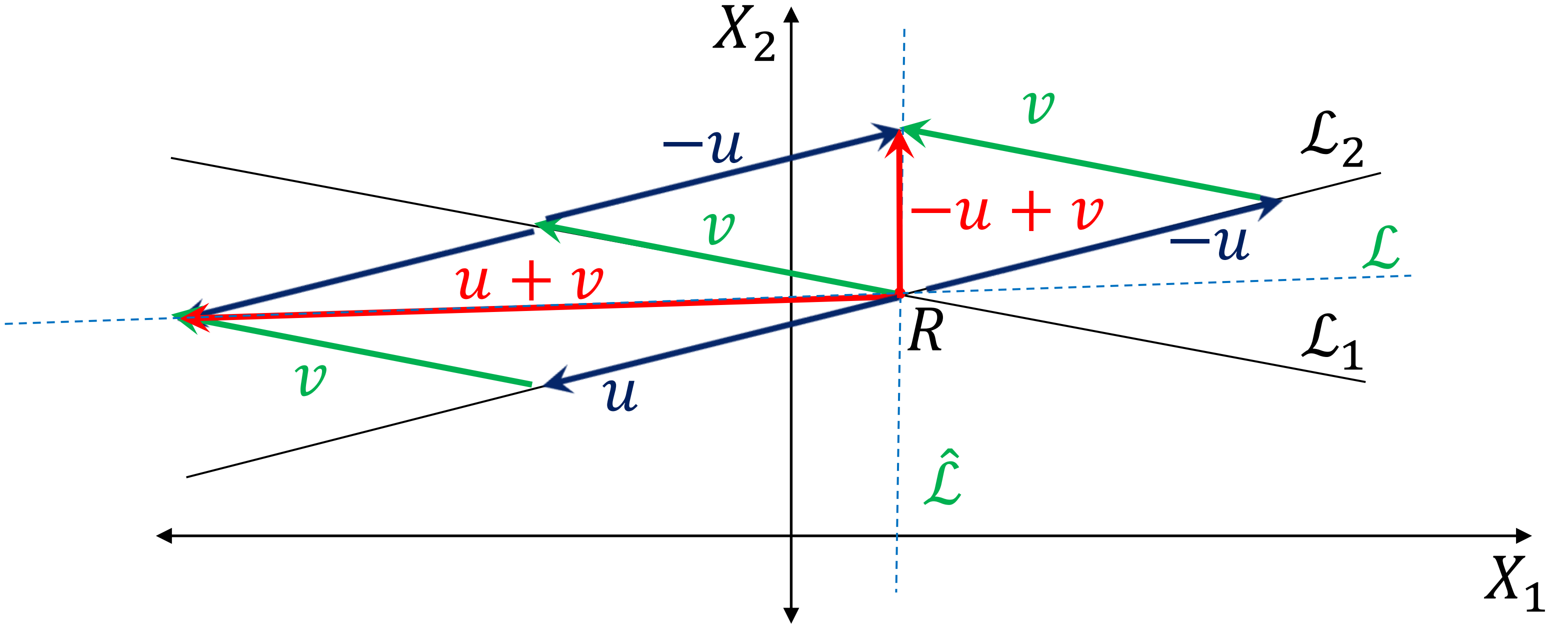
Primeira Bissetriz em $\mathbb{R}^2$

A bissetriz $\mathcal{L}$, entre as duas retas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, passa pelo ponto comúm às retas, e somando vetores do **mesmo tamanho** temos a bissetriz do ângulo entre os vetores, e será o vetor de direção da bissetriz $\mathcal{L}$.



Segunda Bissetriz em $\mathbb{R}^2$

A bissetriz $\hat{\mathcal{L}}$, entre as duas retas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, passa pelo ponto comúm às retas, e seu vetor de direção é o vetor soma do vetor de uma das reta e o inverso aditivo do vetor da outra reta (mesma medida)



Resolvendo o Exemplo

Voltando ao problema:

Olhando do alto da linha de produção pode-se observar dois trajetos retos que os colaboradores utilizam para se deslocar. Determine as equações paramétricas das bissetrizes dos trajetos

$\mathcal{L}_1 : 4x - 3y = -10$

$\mathcal{L}_2 : 7x + y - 20 = 0$

Resolução (continuação)

Vetores unitários $v_u = (-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ e $u_u = (\frac{\sqrt{2}}{10}, -\frac{7\sqrt{2}}{10})$

Ponto comúm $R = (2,6\ )$.

Resolvendo o Exemplo

O vetor de direção da primeira bissetriz é a soma

$$w = v_u + u_u = \left(\frac{-6+\sqrt{2}}{10}, \frac{-8-7\sqrt{2}}{10}\right)$$

As equações paramétricas são:

$$\mathcal{L}: \begin{cases} x_1 = 2 + \left(\frac{\sqrt{2}-6}{10}\right)t \\ x_2 = 6 - \left(\frac{8+7\sqrt{2}}{10}\right)t \end{cases}$$

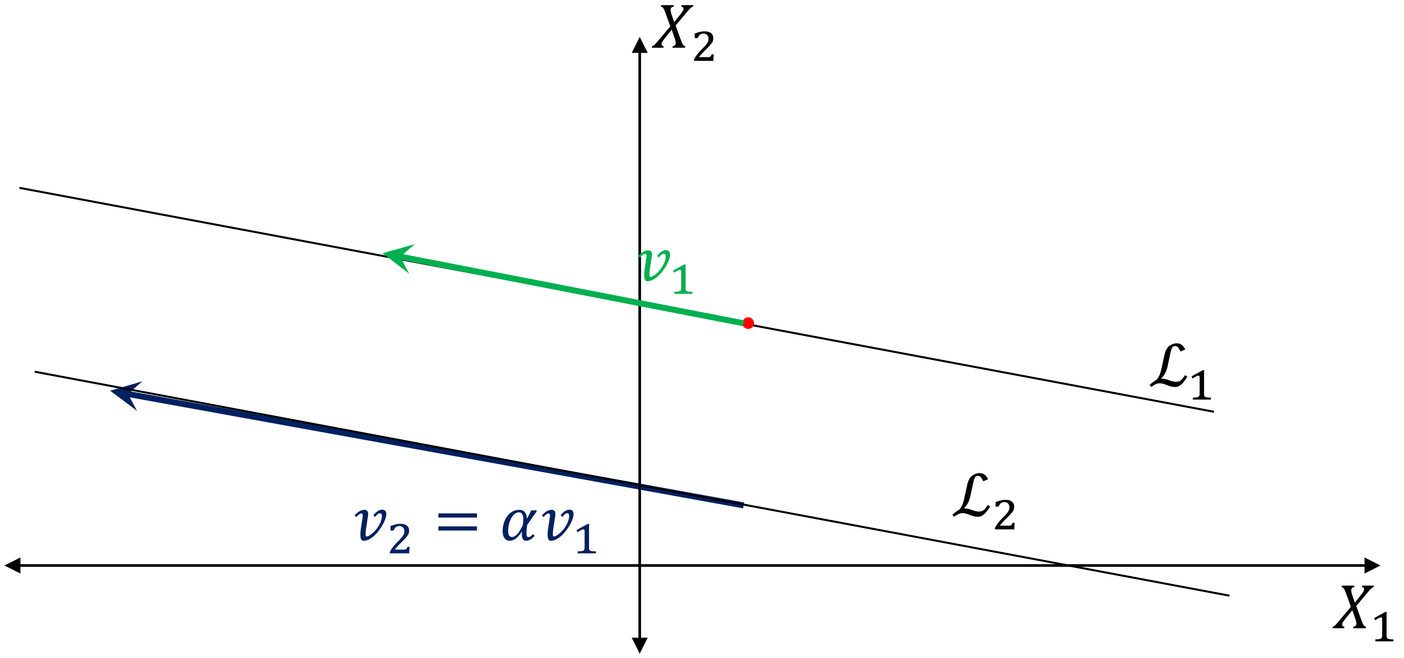
Para a segunda bissetriz, um vetor de direção é

$$\widehat{w} = -u_u + v_u.$$

Retas paralelas em $\mathbb{R}^2$

Duas retas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, são **paralelas** se seus vetores de direção são paralelos entre sí.

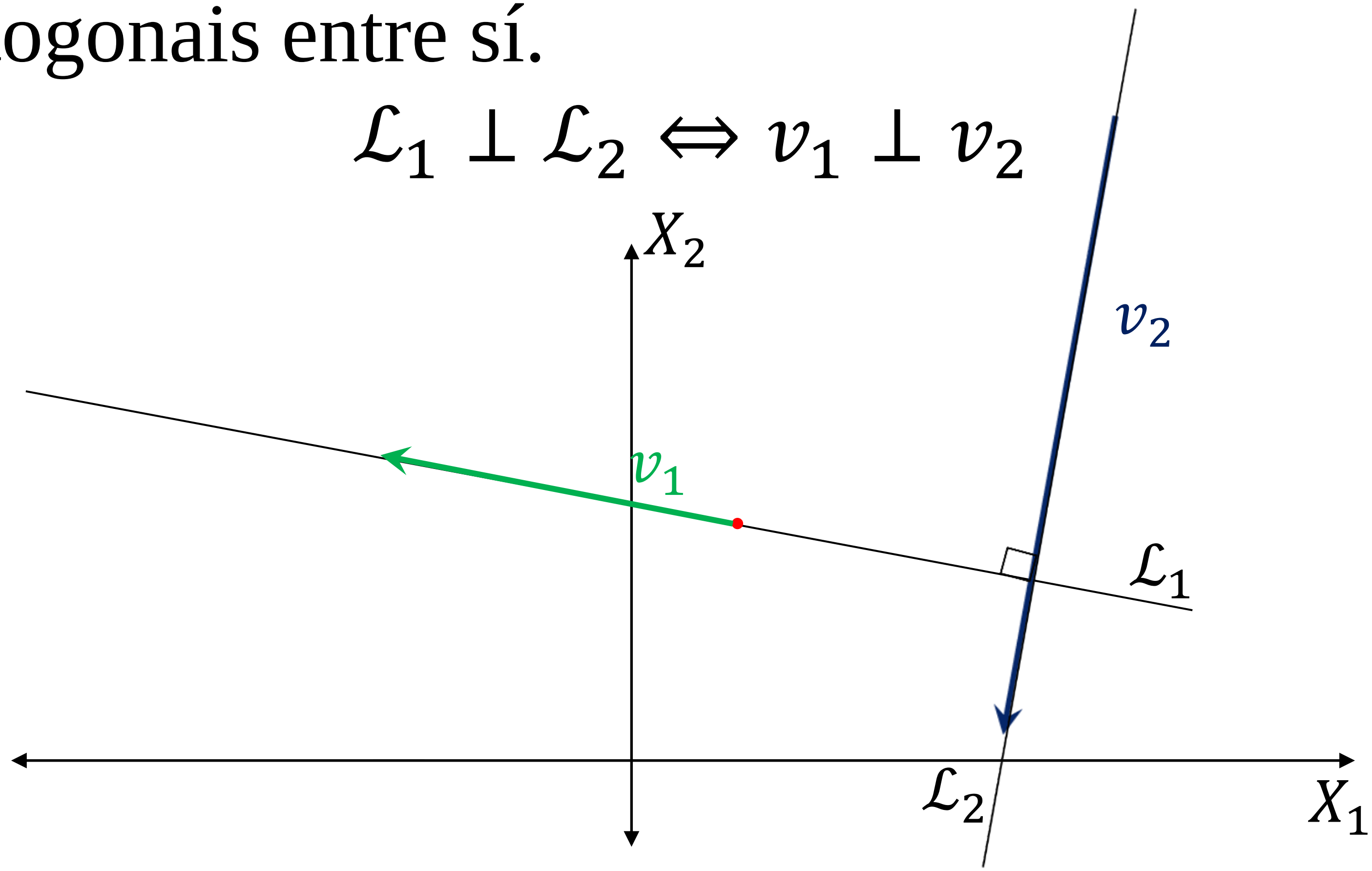
$$\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow v_1 \parallel v_2$$



Retas ortogonais em $\mathbb{R}^2$

Duas retas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, são **ortogonais** se seus vetores de direção são ortogonais entre sí.

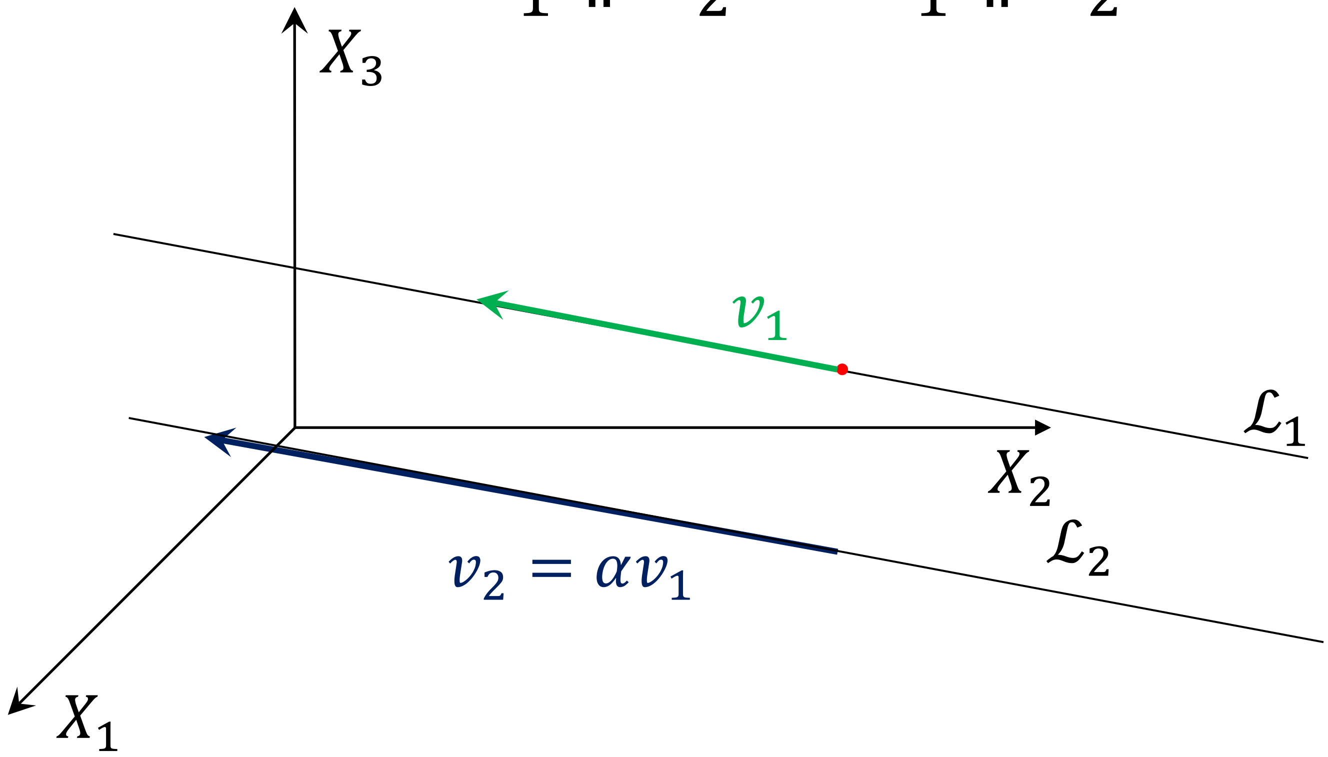
$$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$$



Retas paralelas em $\mathbb{R}^3$

Duas retas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, são **paralelas** se seus vetores de direção são paralelos entre sí.

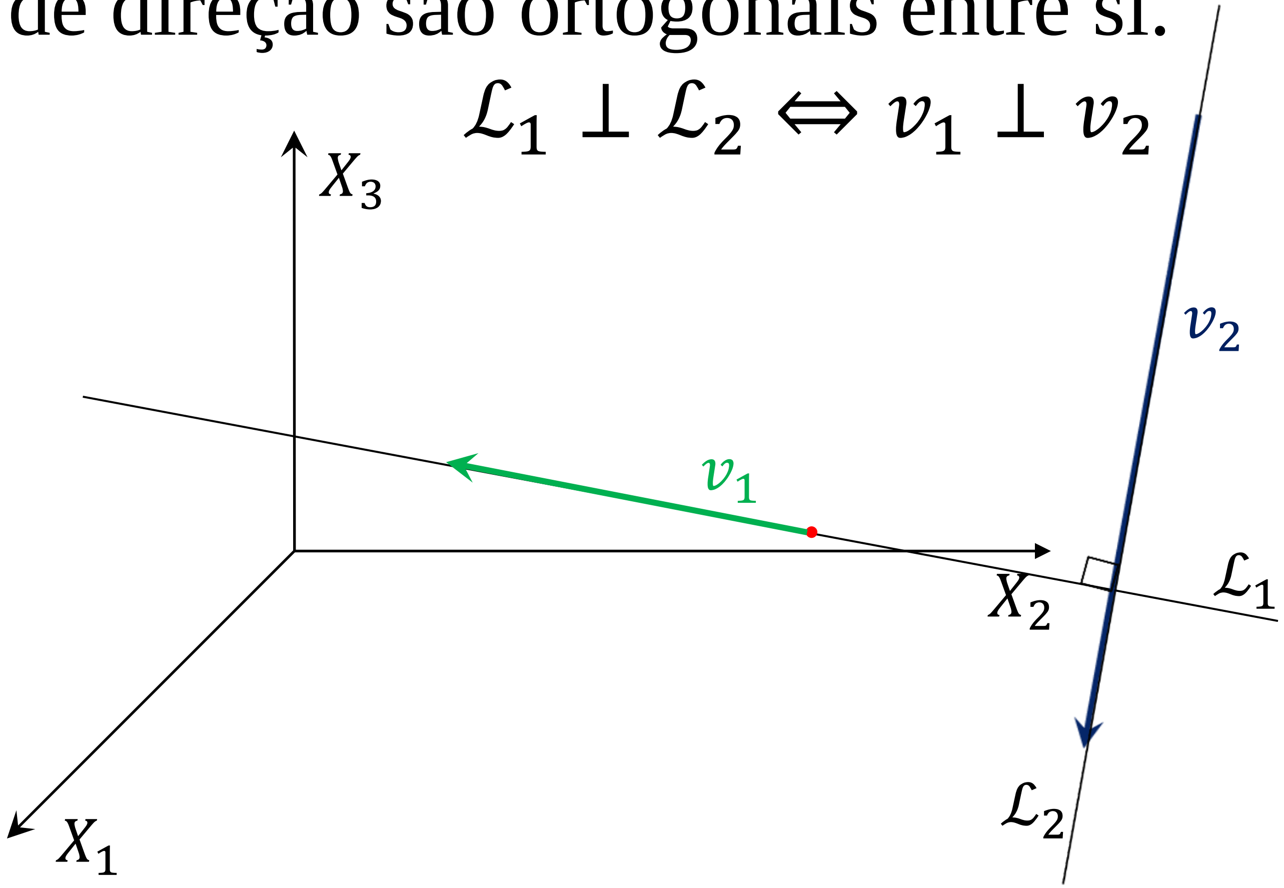
$$\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow v_1 \parallel v_2$$



Retas ortogonais em $\mathbb{R}^3$

Duas retas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, são **ortogonais** se tem um ponto comúm e seus vetores de direção são ortogonais entre sí.

$$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$$



Retas paralelas e ortogonais em $\mathbb{R}^n$

Duas retas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, são **paralelas** se seus vetores de direção são paralelos entre sí.

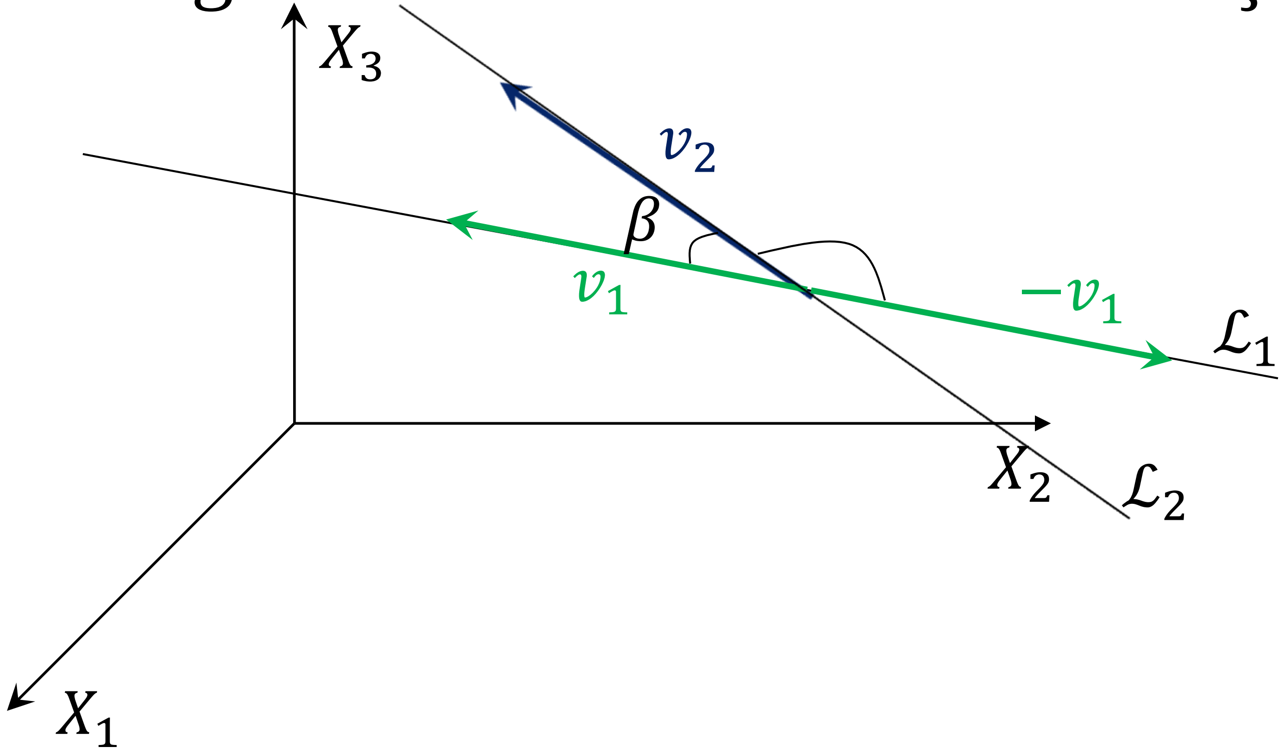
$$\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow v_1 \parallel v_2$$

Duas retas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, são **ortogonais** se tem um ponto comúm é seus vetores de direção são ortogonais entre sí.

$$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$$

Ângulo entre retas em $\mathbb{R}^n$

Duas retas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, formam dois ângulo entre elas, se existe um ponto comúm entre elas. Chamaremos de ângulo entre as retas, ao ângulo entre seus vetores de direção com $\beta \leq \frac{\pi}{2}$



Enunciado do Exemplo 2

Problema

O ângulo entre duas retas é $\alpha = \frac{\pi}{4}$, a primeira reta passa pelo ponto $A = (a, 0)$, $a < 0$,

a segunda reta passa pelo ponto $C = (0,5)$,

e o ponto B (no segundo quadrante) pertence as duas retas.

Sabendo que $AB + BC \parallel (1,5)$,

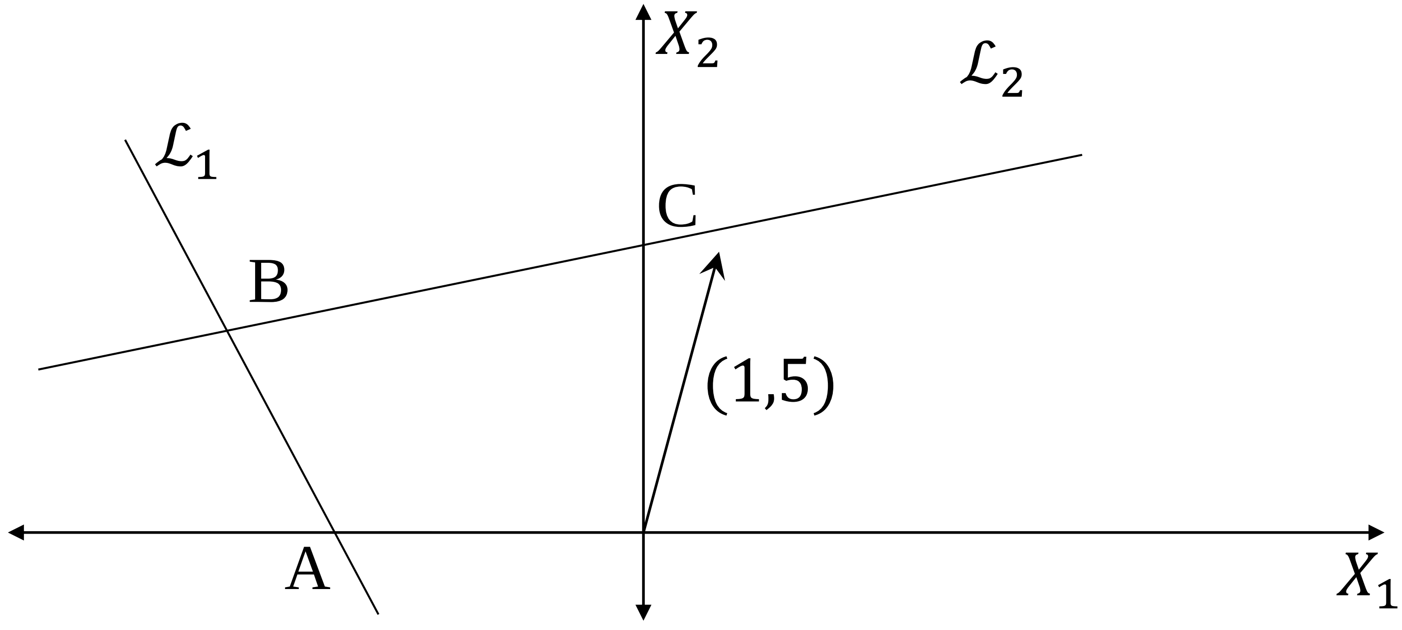
e a inclinação da primeira reta é -3,

determine a equação vetorial da bissetriz em α.

Exemplo 2

Resolução: Dados: $C = (0,5) \quad A = (a, 0),\ a < 0$

Sabemos que o ponto A tem primeira componente negativa e está sobre o eixo X_1, mas existem muitas possibilidades, analisemos mais um pouco:

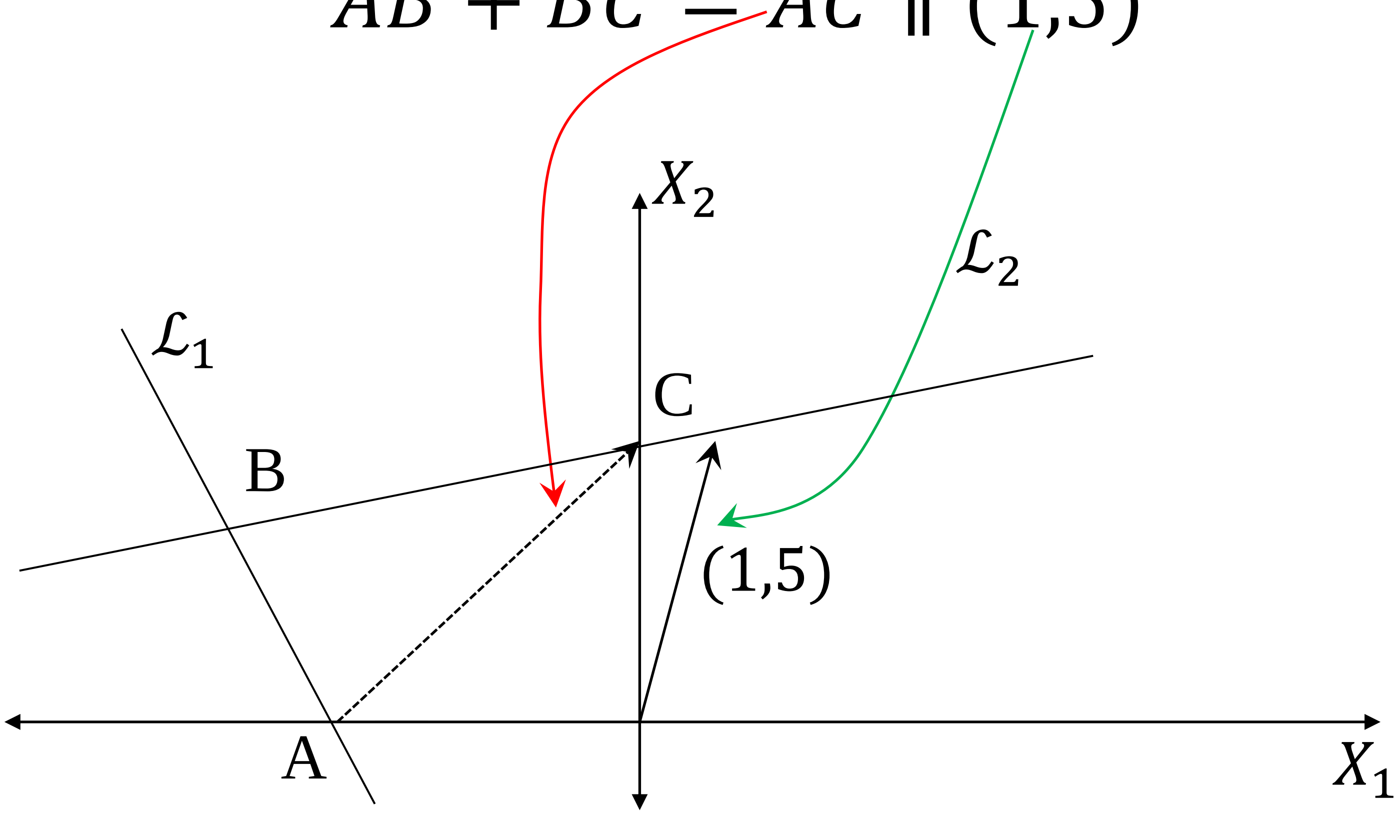


Exemplo 2

A seguinte informação é uma grande ajuda.

No desenho, não temos o paralelismo informado:

$$AB + BC = AC \parallel (1{,}5)$$

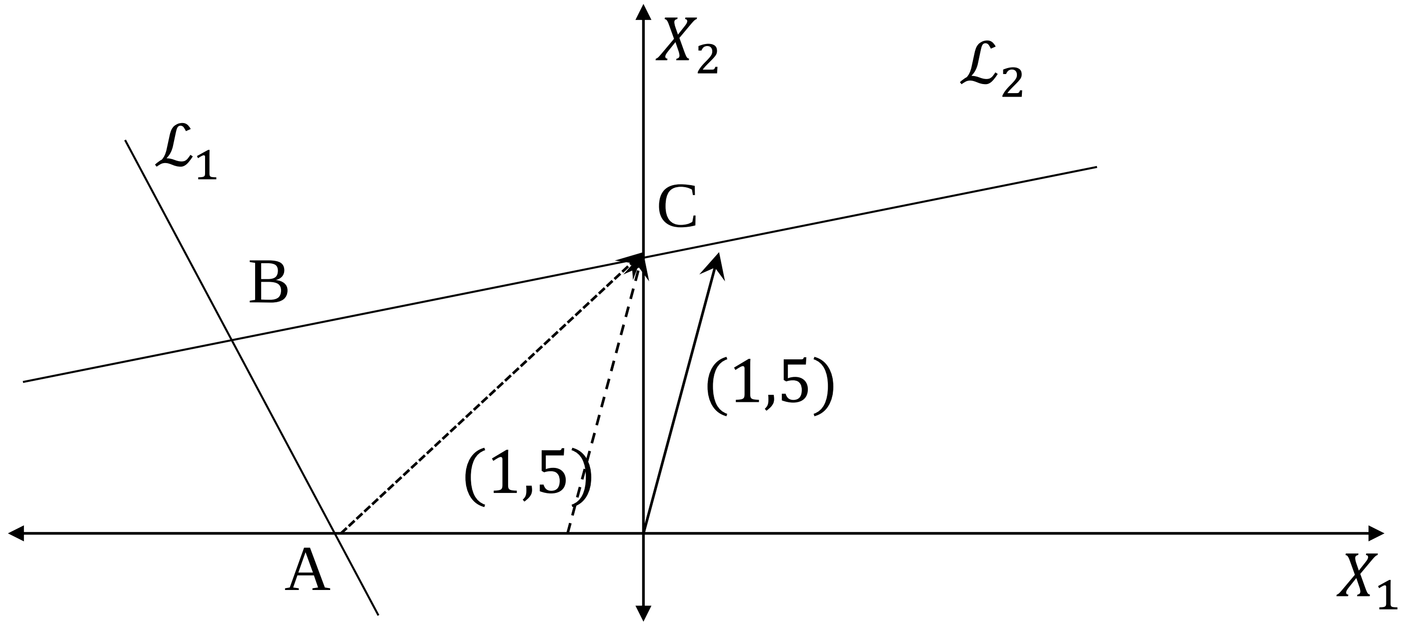


Exemplo 2

Então, é uma boa estratégia deslocar o vetor (1,5), até passar pelo ponto C conhecido.

Assim, podemos visualizar a posição real do ponto A

$$AB + BC = AC \parallel (1,5)$$



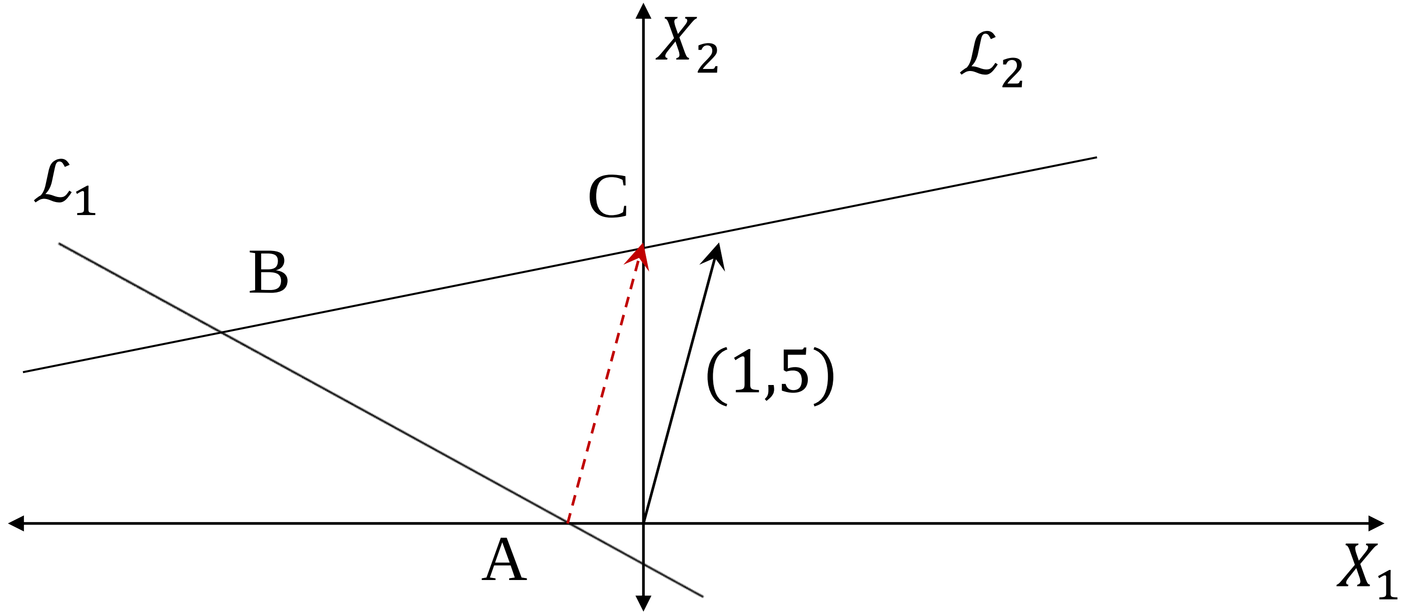
Exemplo 2

Temos a localização correta do ponto A.

Como $AC \parallel (1,5)$, temos $C - A = (-a, 5) = \beta(1,5)$

Então: $5 = 5\beta$ logo $\beta = 1$.

Também $-a = \beta = 1$. Portanto $A = (-1,0)$

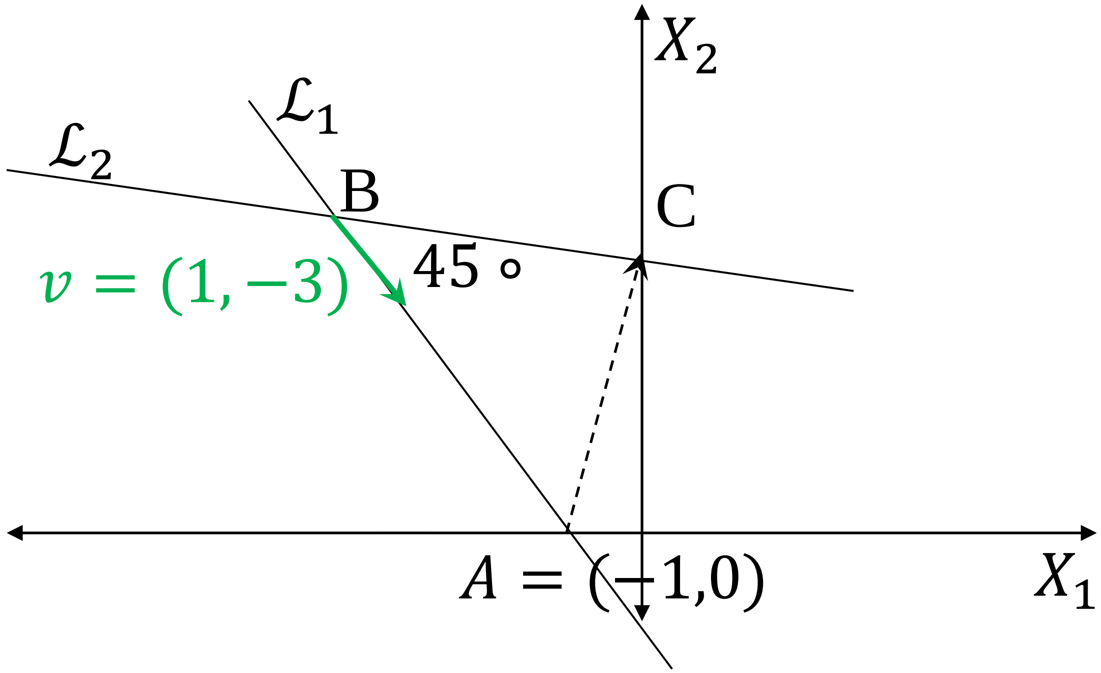


Exemplo 2

Utilizando a inclinação de $\mathcal{L}_1$, obtemos um vetor

$$m = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow -3 = \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow v = (1, -3)$$

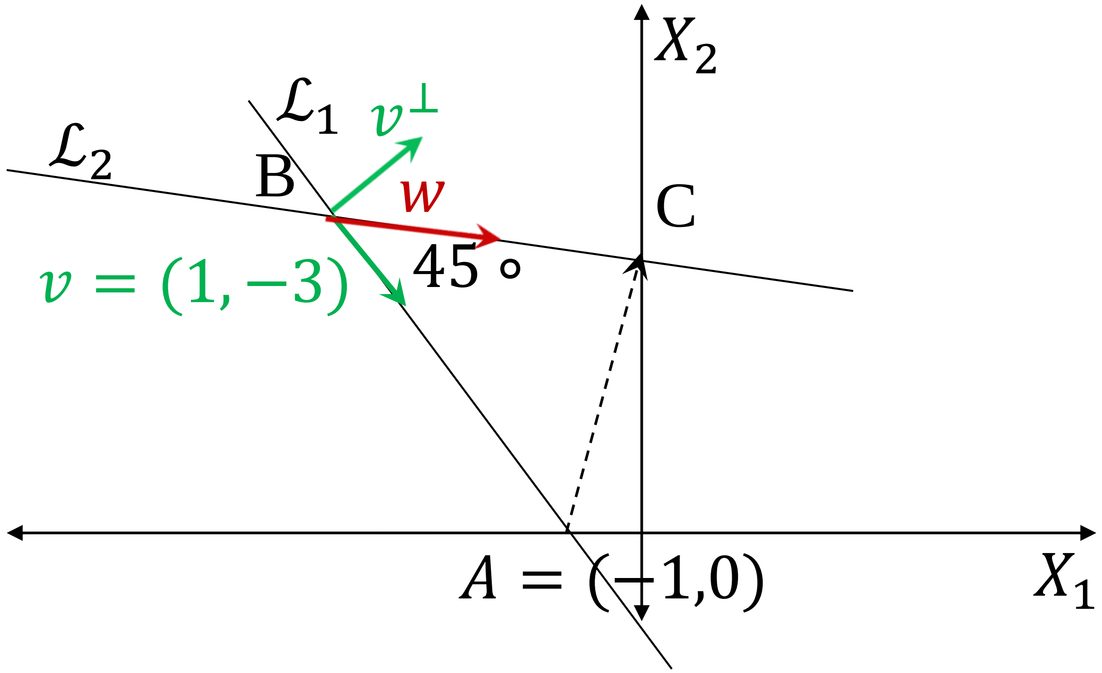
v é um vetor de direção de $\mathcal{L}_1$, orientamos de forma correta $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ pois conhecemos o ângulo



Exemplo 2

Como o vetor BC é um vetor de direção da reta $\mathcal{L}_2$, e forma um ângulo de $\frac{\pi}{4}$, ele é paralelo ao vetor soma de v e $v^{\perp}$, pois eles medem igual e formam $\frac{\pi}{2}$:

$$w = v + v^{\perp} = (1,-3) + (3,1) = (4,-2)$$

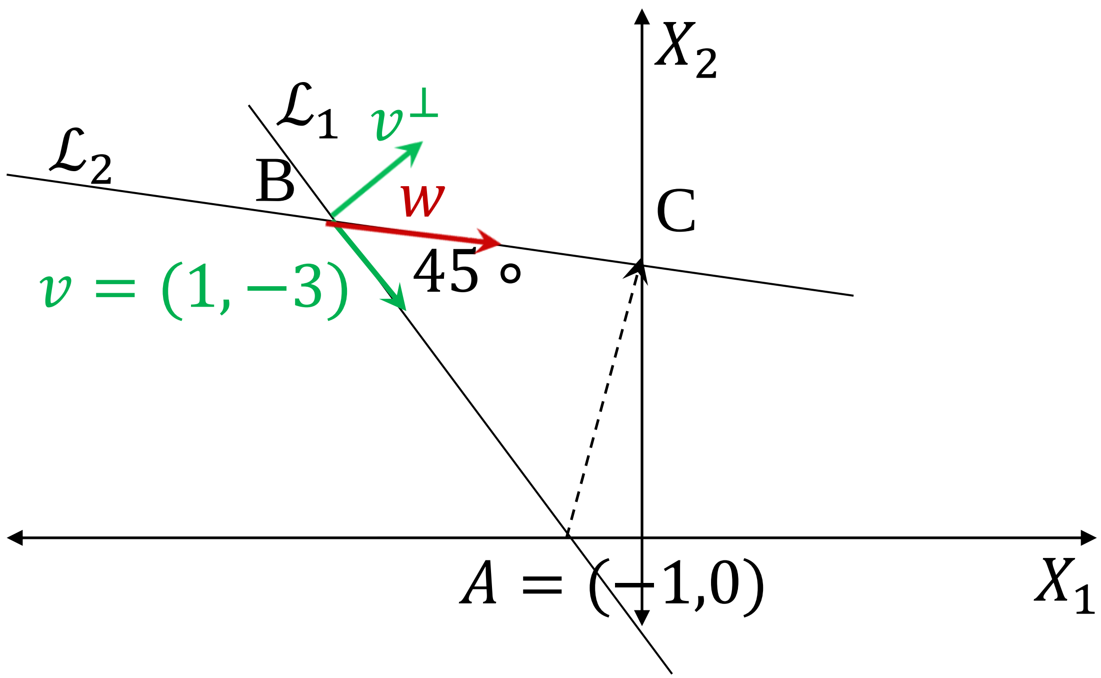


Exemplo 2

Fazendo $B = (b_1, b_2)$, temos

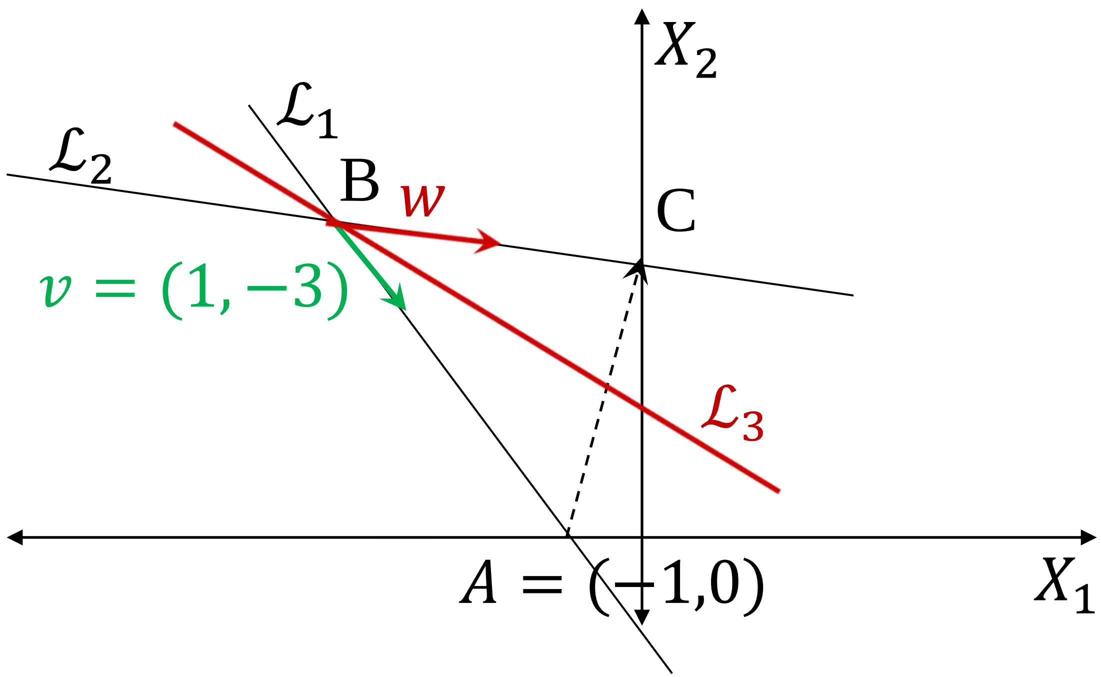
$$BA = (-1 - b_1, -b_2) \perp (3,1) \Rightarrow 3b_1 + b_2 = -3$$
$$BC = (-b_1, 5 - b_2) \perp (2,4) \Rightarrow b_1 + 2b_2 = 10$$

Resolvendo o sistema: $B = \left(-\frac{16}{5}, \frac{33}{5}\right)$



Exemplo 2

Para determinar a bissetriz $\mathcal{L}_3$ entre as retas, já temos ponto de passagem $B = \left(-\frac{16}{5}, \frac{33}{5}\right)$. O vetor de direção u será o vetor soma dos vetores unitários de v e w: $\quad u = v_u + w_u$

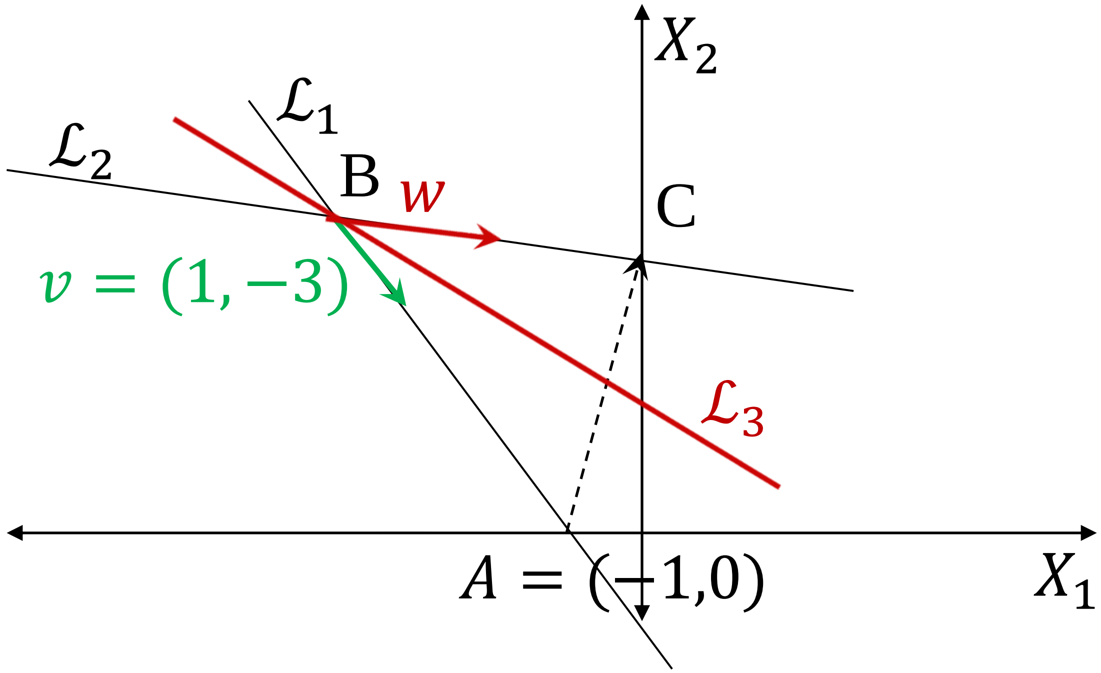


Exemplo 2

Calculando os vetores unitários:

$$v_u = \frac{1}{\|(1,-3)\|}(1,-3) = \left(\frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

$$w_u = \frac{1}{\|(4,-2)\|}(4,-2) = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$



Exemplo 2

$$u = \frac{\sqrt{5}}{10}\left(4+\sqrt{2}, -2-3\sqrt{2}\right)$$

Assim

$$\mathcal{L}_3\colon P = \left(-\frac{16}{5}, \frac{33}{5}\right) + t\left(4+\sqrt{2}, -2-3\sqrt{2}\right) \quad t \in \mathbb{R}$$