

# **ZAB0161 - Álgebra Linear com Aplicações em Geometria Analítica**

## **Os espaços vetoriais**

$$\mathbb{R}^n \left( \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \right)$$

**Prof. Dr. Jorge Lizardo Díaz Calle**

*ZAB (Dpto. de Ciências Básicas) – FZEA – USP*

# O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

---

- Sejam os espaços vetoriais

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

com as seguintes operações:

# O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

---

- Sejam os espaços vetoriais

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

com as seguintes operações:

Adição: Sejam  $x$  e  $y \in \mathbb{R}^n$  define-se

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

# O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

---

- Sejam os espaços vetoriais

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

com as seguintes operações:

Adição: Sejam  $x$  e  $y \in \mathbb{R}^n$  define-se

$$x \oplus y = (x_1, \dots, x_n) \oplus (y_1, \dots, y_n) = (x_1 \oplus y_1, \dots, x_n \oplus y_n)$$

Soma de vetores com  $n$  componentes

Soma de reais

# O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

---

- Sejam os espaços vetoriais

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

com as seguintes operações:

Adição: Sejam  $x$  e  $y \in \mathbb{R}^n$  define-se

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Multiplicação vezes escalar: Sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  define-se

$$\alpha x = \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Multiplicação de reais

Multiplicação vezes escalar de um vetor com  $n$  componentes

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  é um espaço vetorial.

# O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

---

- Sejam os espaços vetoriais

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

com as seguintes operações:

Adição: Sejam  $x$  e  $y \in \mathbb{R}^n$  define-se

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Multiplicação vezes escalar: Sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  define-se

$$\alpha x = \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  é um espaço vetorial.

Uma base para  $\mathbb{R}^n$ .

$$\beta = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$$

# O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

---

- Sejam os espaços vetoriais

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

com as seguintes operações:

Adição: Sejam  $x$  e  $y \in \mathbb{R}^n$  define-se

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Multiplicação vezes escalar: Sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  define-se

$$\alpha x = \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Observar: Para cada  $n$  temos um conjunto:  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots$

Assume-se que  $\mathbb{R}$ , com suas operações e propriedades, já foi estudado pelos alunos da presente disciplina.

# Espaços de interesse: $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

---

- Os principais espaços vetoriais a estudar são:
  - O espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$  chamado de Plano,
  - O espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  chamado de Espaço.
- Cada espaço com as operações usuais de soma e multiplicação vezes escalar (para duplas e triplas).
- Realizaremos as extensões para os espaços  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 3$ .

# Espaços de interesse: $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

---

- Os principais espaços vetoriais a estudar são:
  - O espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$  chamado de Plano,
  - O espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  chamado de Espaço.
- Cada espaço com as operações usuais de soma e multiplicação vezes escalar (para duplas e triplas).
- Realizaremos as extensões para os espaços  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 3$ .
- Podemos considerar que nós estamos no espaço  $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, t) / x, y, z, t(\text{tempo}) \in \mathbb{R}\}$ .

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

O espaço vetorial

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) / x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

com a adição:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

e multiplicação vezes escalar:

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

A base canônica(simples) de  $\mathbb{R}^2$  é

$$\beta = \{(1,0), (0,1)\}$$

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

O espaço vetorial

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) / x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

com a adição:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

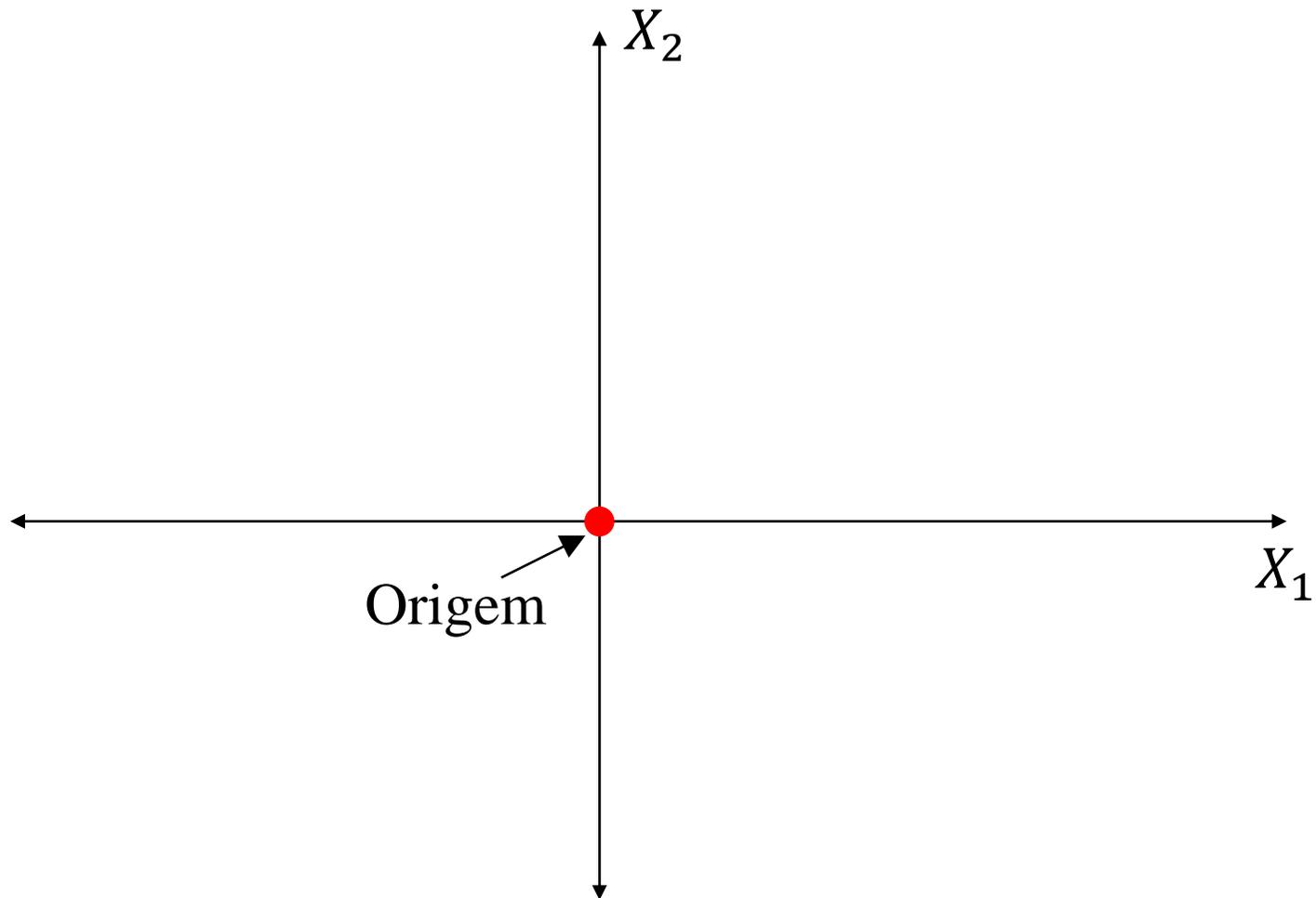
e multiplicação vezes escalar:

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

Sua representação se dá em um **plano cartesiano**, no qual é escolhido um ponto de referência chamado origem, uma reta horizontal  $X_1$  (eixo de abcissas) passando pela origem, e outra reta vertical  $X_2$  (eixo de ordenadas) também passa pela origem.

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---



# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

Se  $x \in \mathbb{R}^2$  escreve-se  $x = (x_1, x_2)$  onde  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ .

Cada dupla é representado graficamente como um ponto, onde:

1. à origem é considerada como ponto de partida.
2. a primeira componente representa um deslocamento desde a origem na orientação da reta  $X_1$ , com sentido definido pelo sinal da componente, e
3. a segunda componente representa um segundo deslocamento na orientação da reta  $X_2$ .

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

Se  $x \in \mathbb{R}^2$  escreve-se  $x = (x_1, x_2)$  onde  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ .

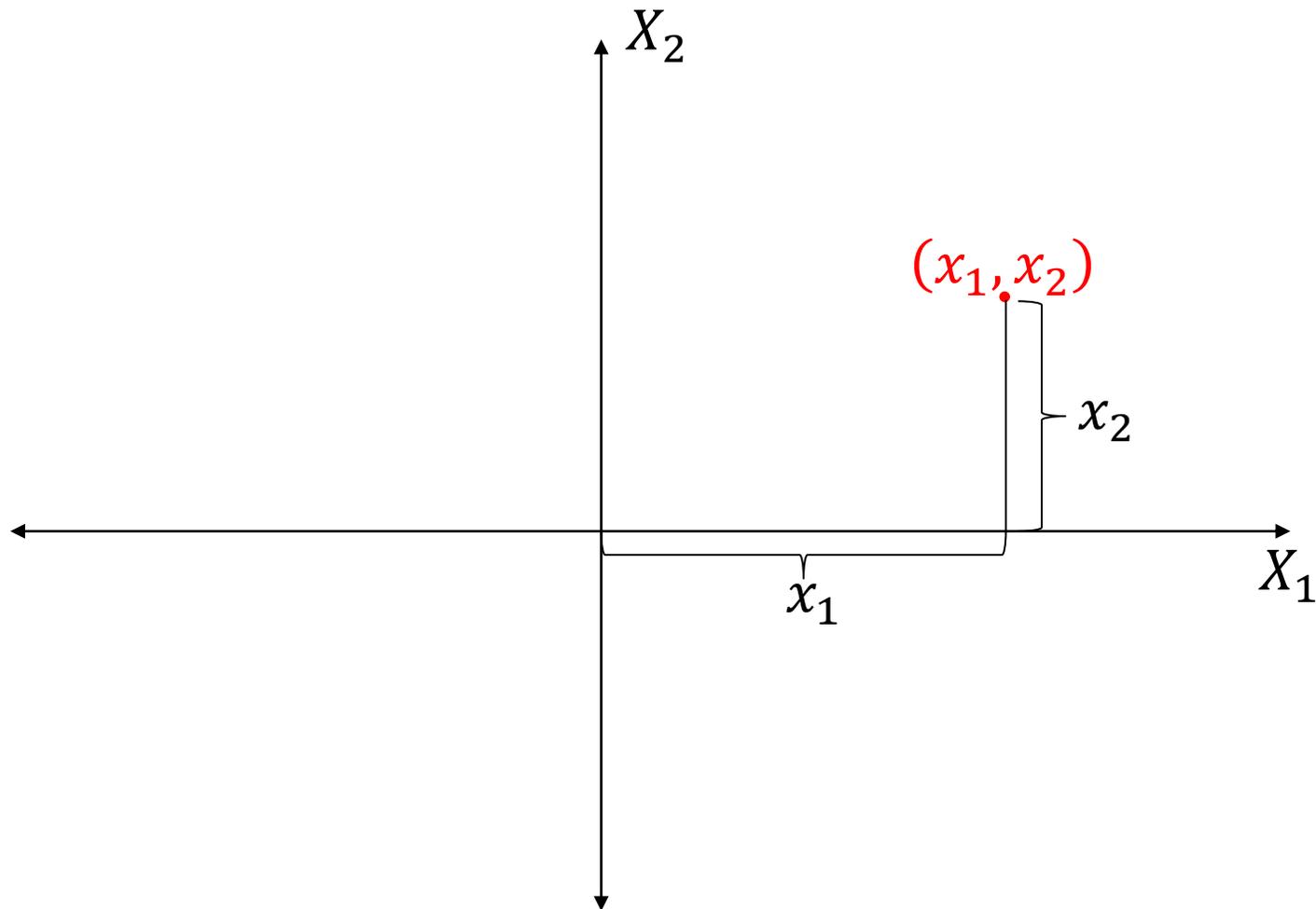
A posição final alcançada, um ponto, é a representação da dupla.

Isto é uma associação:

Associamos um ponto do plano cartesiano com uma dupla de números reais, ou elemento de  $\mathbb{R}^2$ .

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---



# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

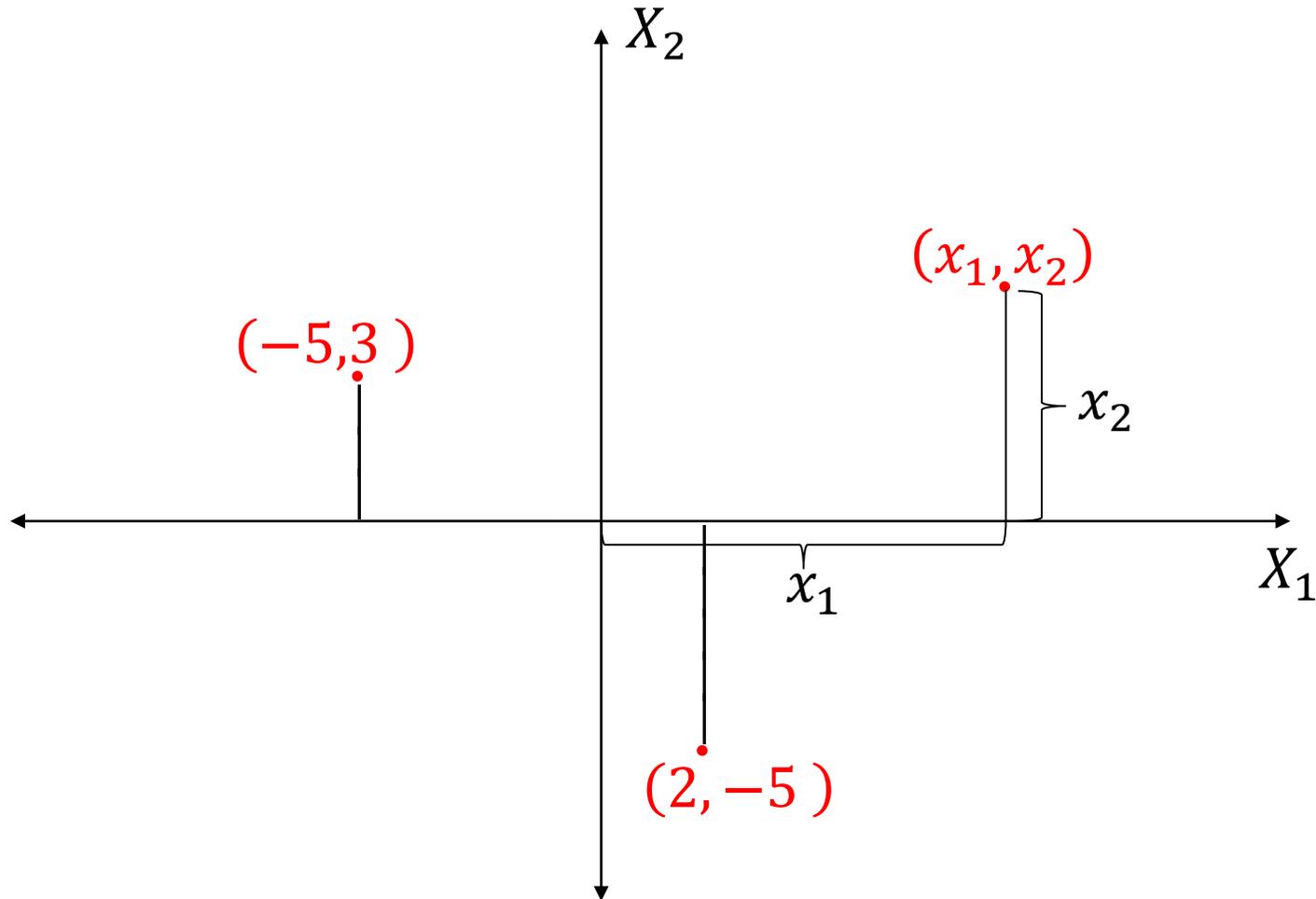
Se  $x \in \mathbb{R}^2$  escreve-se  $x = (x_1, x_2)$  onde  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ .

Exemplos:

Vide as duplas  $(-5, 3)$  e  $(2, -5)$  no plano cartesiano.

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---



# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

Observar a soma:

$$(-5,3) + (2, -5) = (-3, -2)$$

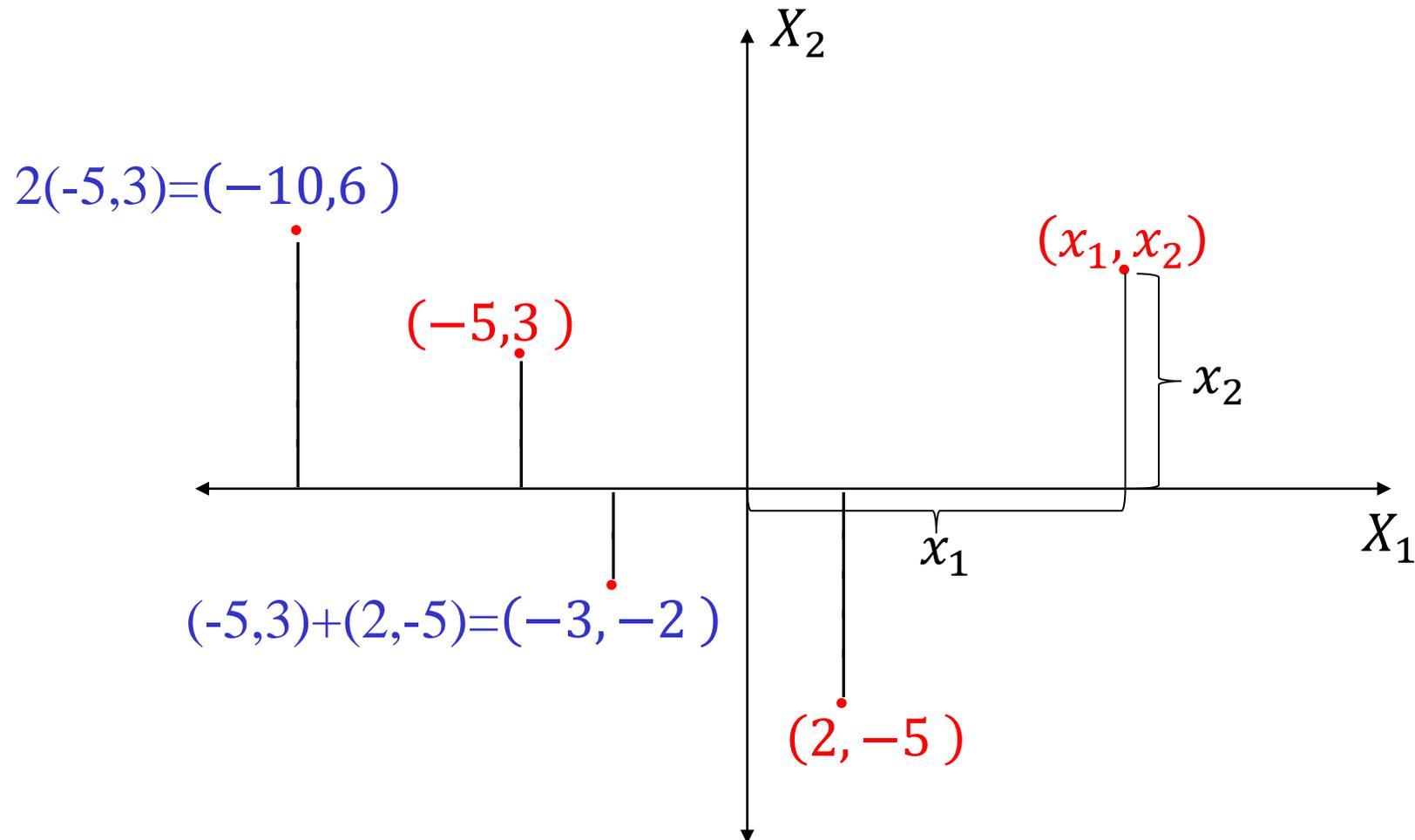
Interpretando as duplas como pontos, **como entender a soma de pontos e o resultado um outro ponto?**

Como entender a multiplicação de um escalar vezes um ponto? e o resultado é outro ponto?

$$2(-5,3) = (-10,6)$$

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---



# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

Observar a soma:

$$(-5, 3) + (2, -5) = (-3, -2)$$

Mas, se considerarmos as duplas como os deslocamentos realizados (conforme foi descrito anteriormente) teríamos que uma soma de deslocamentos (dois horizontais e dois verticais) daria como resultado um deslocamento horizontal total e um resultado vertical total.

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

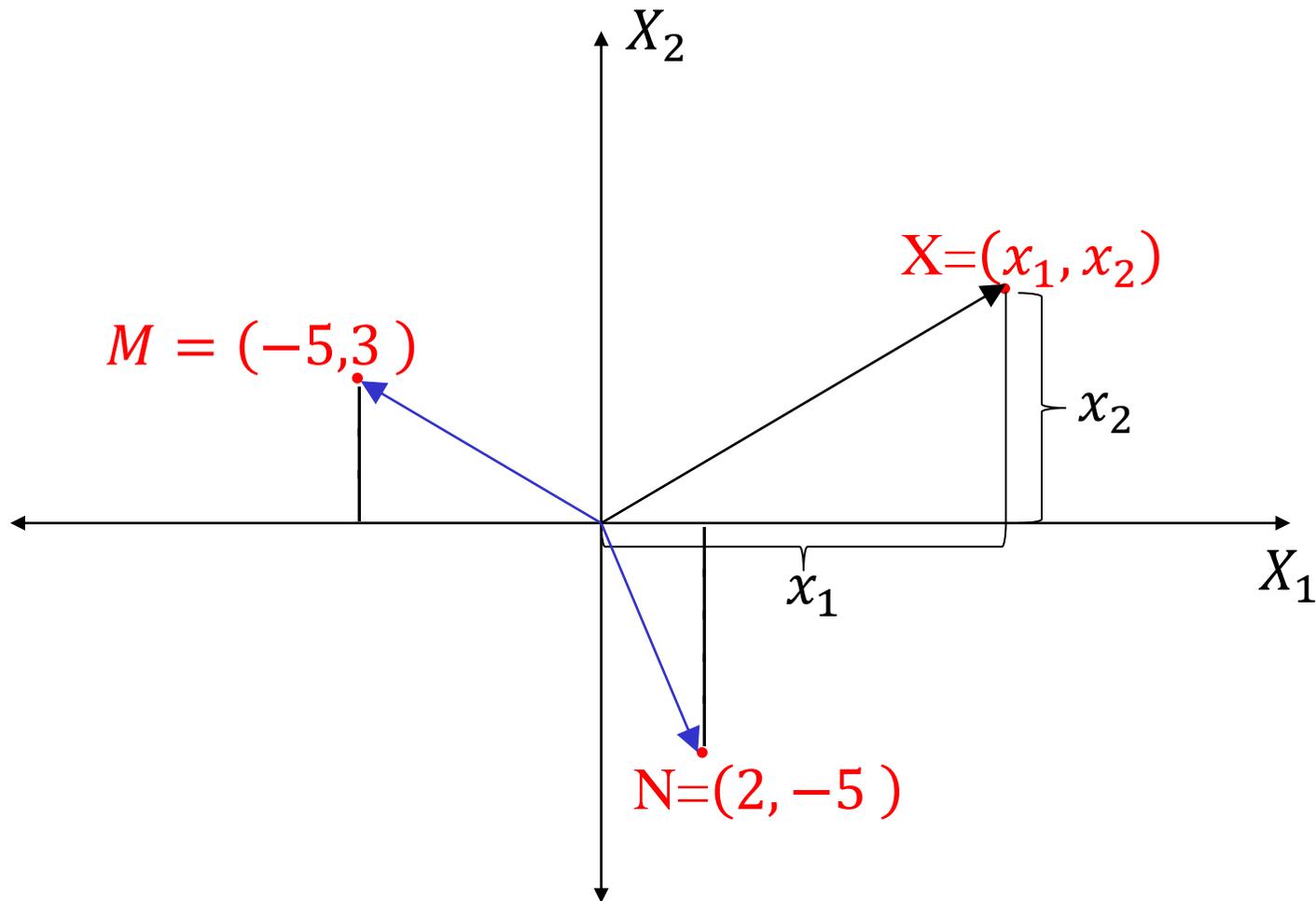
Ao se interpretar as duplas como deslocamentos tem sentido graficar com uma seta (vide desenho), pois um deslocamento tem sentido (positivo ou negativo) e teria ponto de partida e ponto final.

Por exemplo,  $(-5,3)$  é um deslocamento desde a origem na orientação do eixo  $X_1$  no sentido negativo (à esquerda) e um segundo deslocamento desde a posição alcançada na orientação do eixo  $X_2$  no sentido positivo (para cima).

Identicamente para a dupla  $(2, -5)$ .

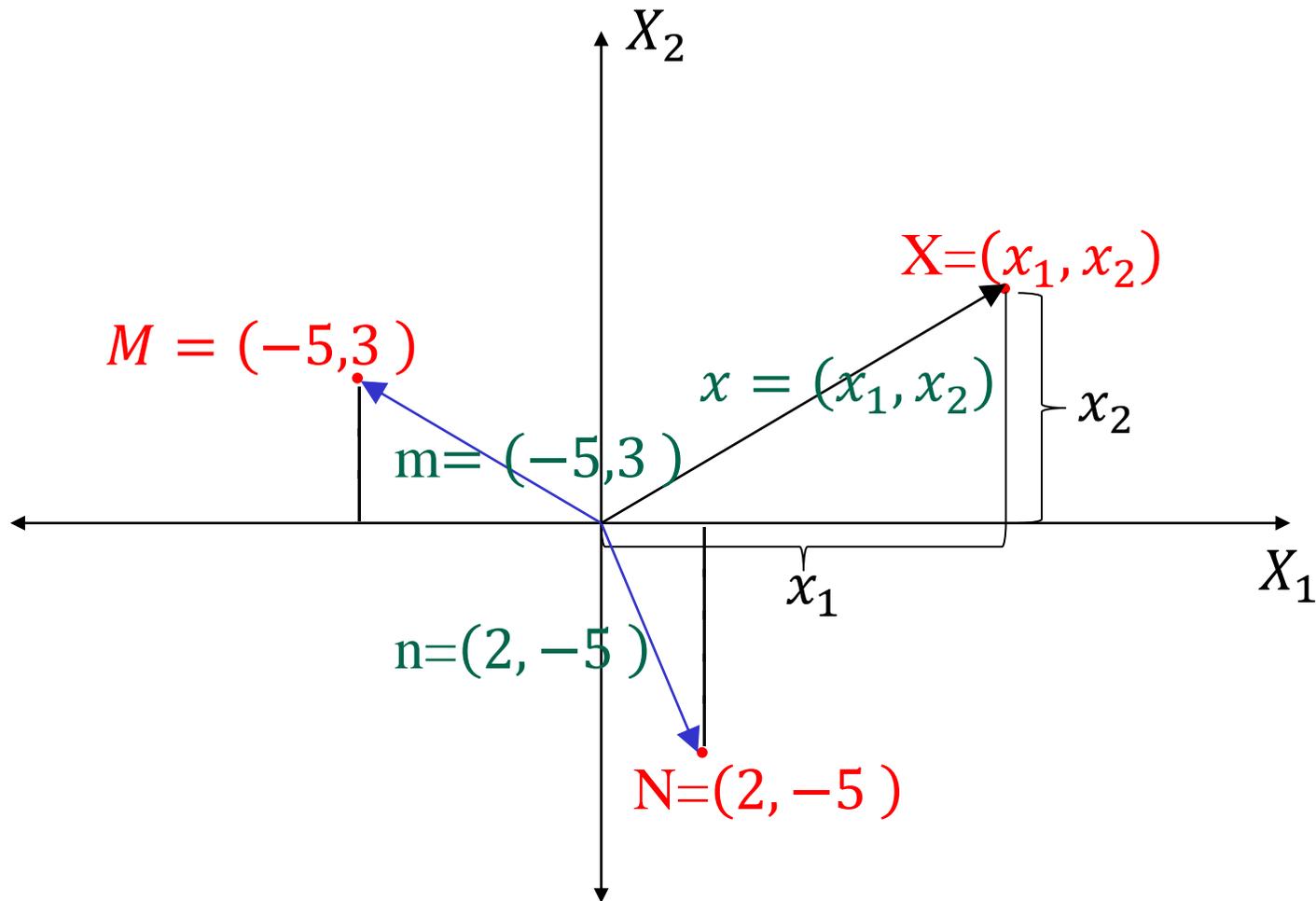
# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---



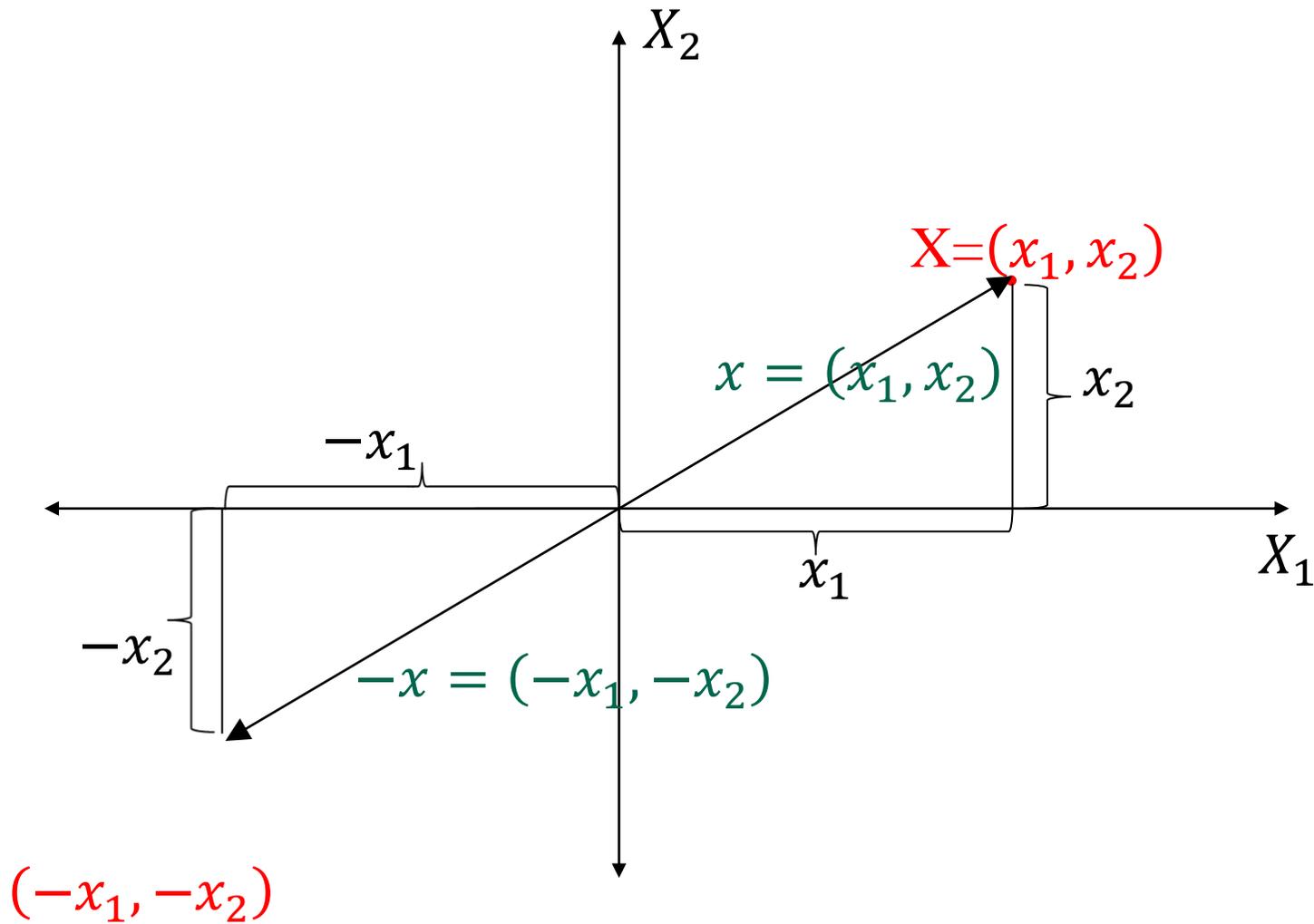
# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---



# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---



# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

Considerando deslocamentos a soma:

$$(-5, 3) + (2, -5) = (-3, -2)$$

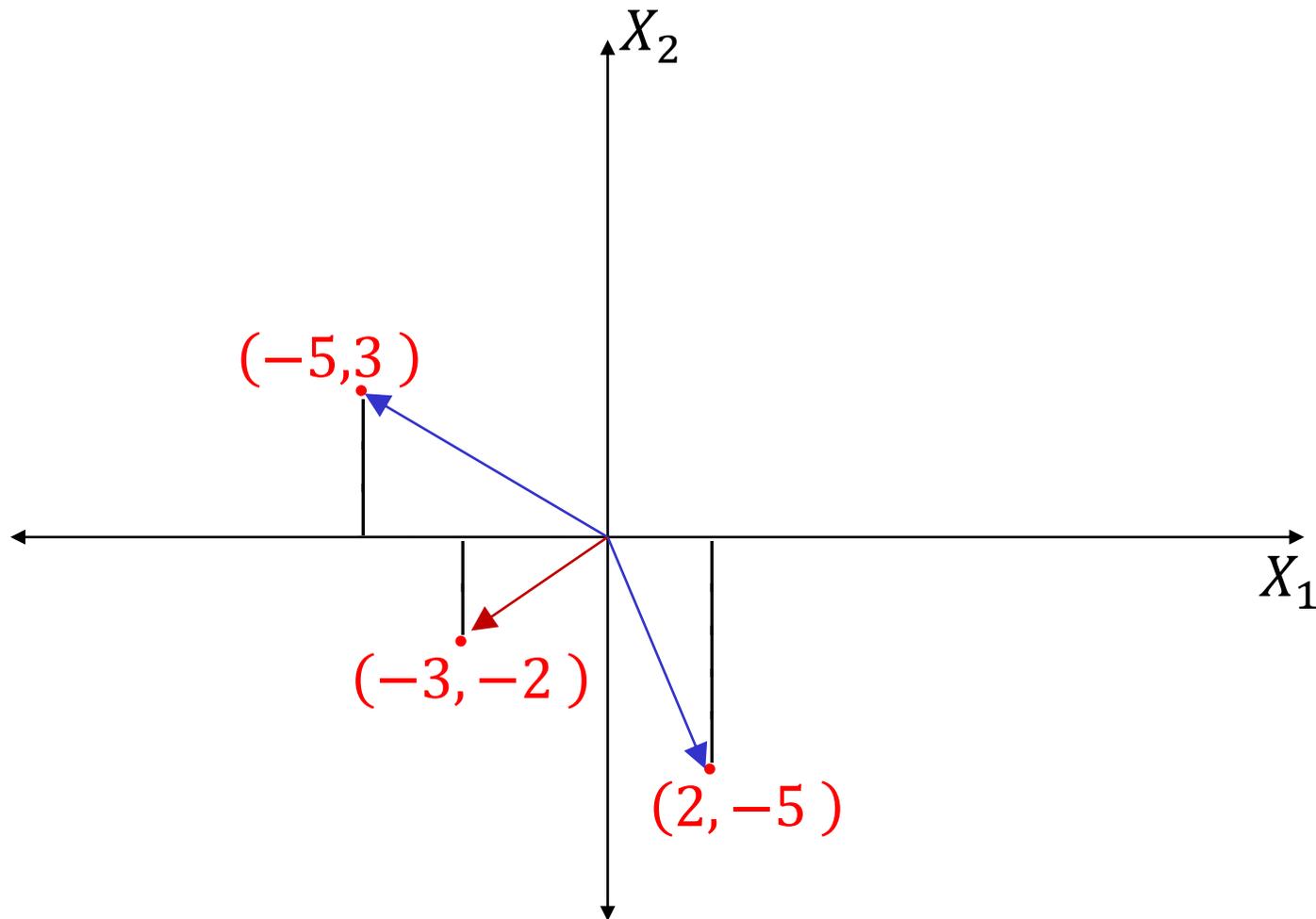
seria interpretada como um deslocamento horizontal total  $(-5 + 2 = -3)$  e um deslocamento vertical total  $(3 + (-5) = -2)$ .

Assim, o resultado é o deslocamento horizontal  $-3$  e o deslocamento vertical  $-2$ .

Observar os três deslocamentos graficamente:

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---



# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

Considerando deslocamentos a multiplicação vezes escalar:

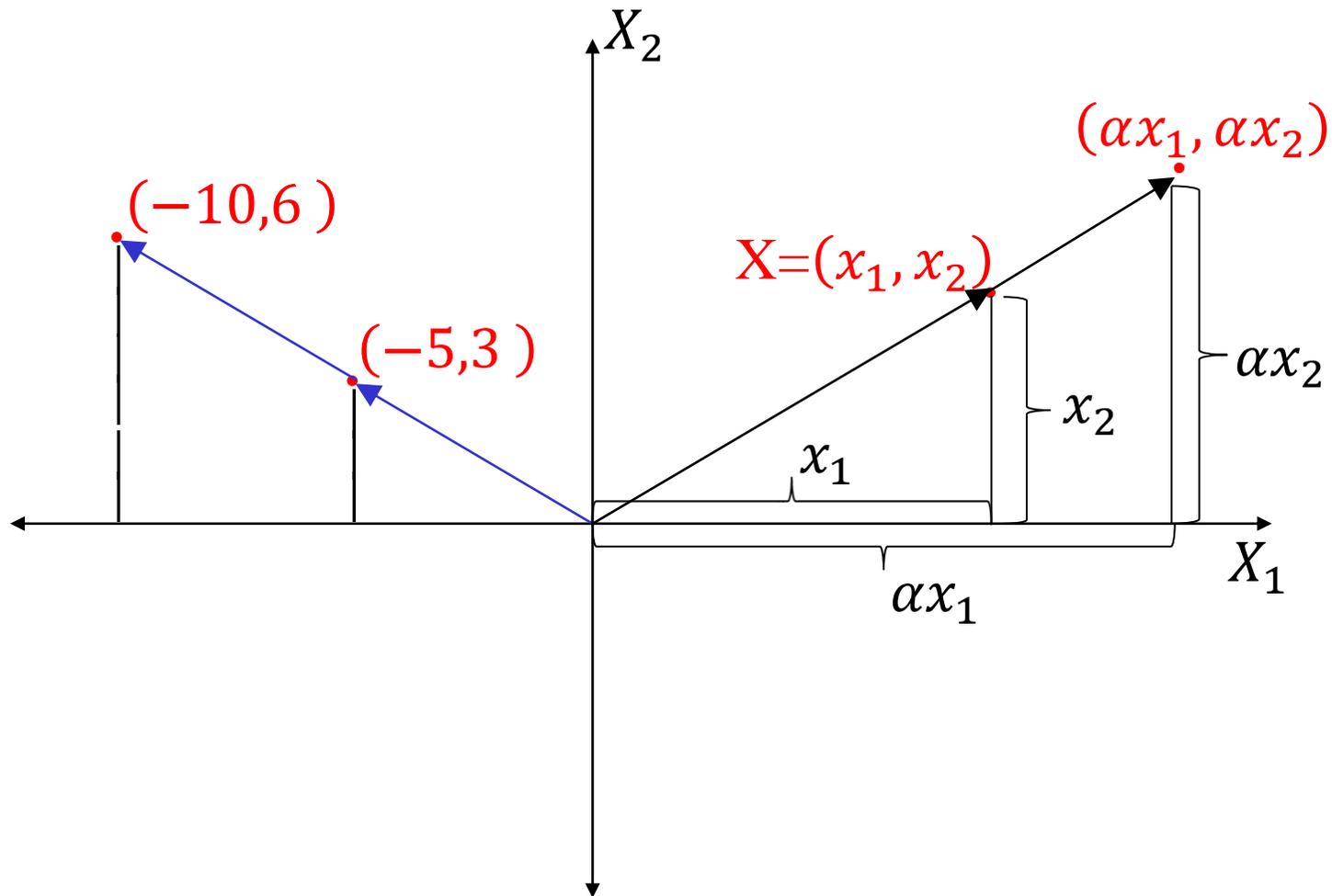
$$2(-5,3) = (-10,6)$$

seria interpretada como um deslocamento horizontal multiplicado vezes o escalar  $2(-5) = -10$  e um deslocamento vertical multiplicado vezes o escalar  $2(3) = 6$ .

Assim, o resultado é

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---



# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

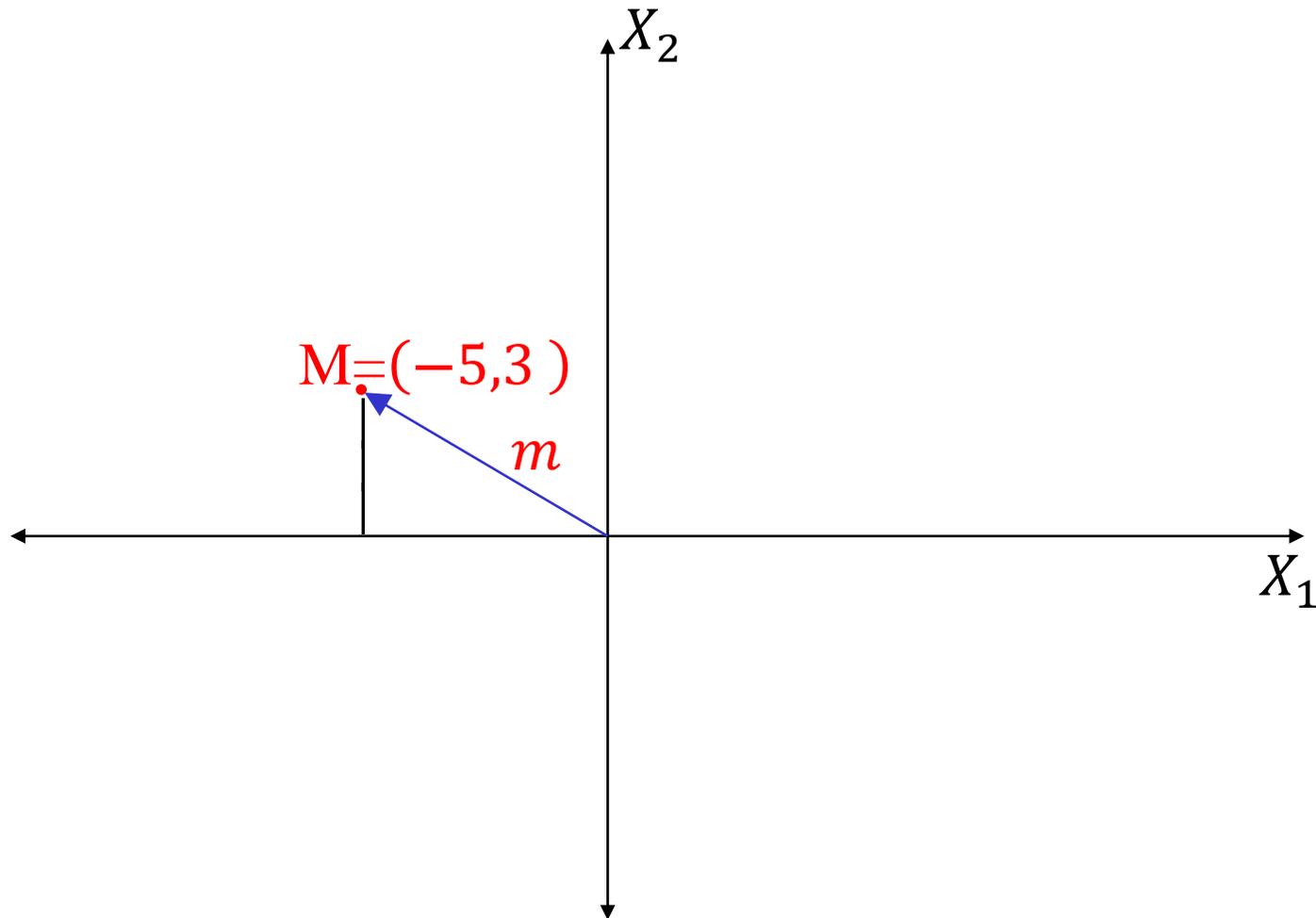
Se considerarmos as duplas como deslocamentos, observar que não precisamos considerar sempre à origem como ponto de partida.

Portanto, uma dupla será considerado como um primeiro deslocamento na orientação do eixo  $X_1$  e um segundo deslocamento na orientação do eixo  $X_2$  (com o sentido adequado), desde qualquer posição.

Exemplo  $(-5,3)$

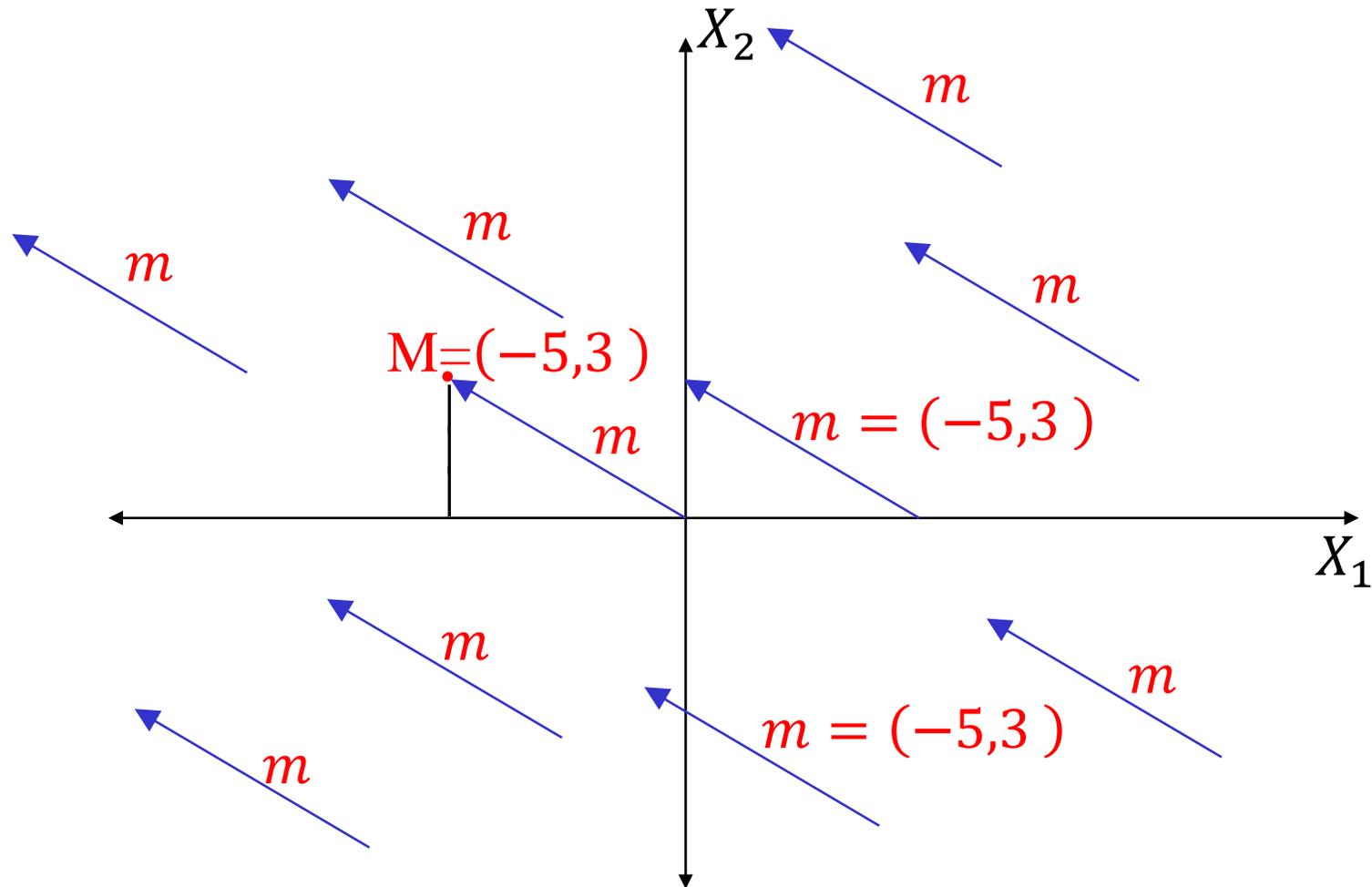
# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---



# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---



# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

Observe que a representação gráfica agora não é fixa e para cada dupla temos infinitas representações (esse conjunto de representações para cada dupla é chamada de **uma classe de equivalência** de essa dupla).

Exemplo:

O conjunto de todas as representações do vetor

$$m = (-5, 3)$$

formam a classe de equivalência de  $m$ .

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

Nesse sentido podemos ver que agora a soma de duplas é melhor entendida.

Somar duas duplas seria:

Realizar a primeira dupla, desde uma posição inicial

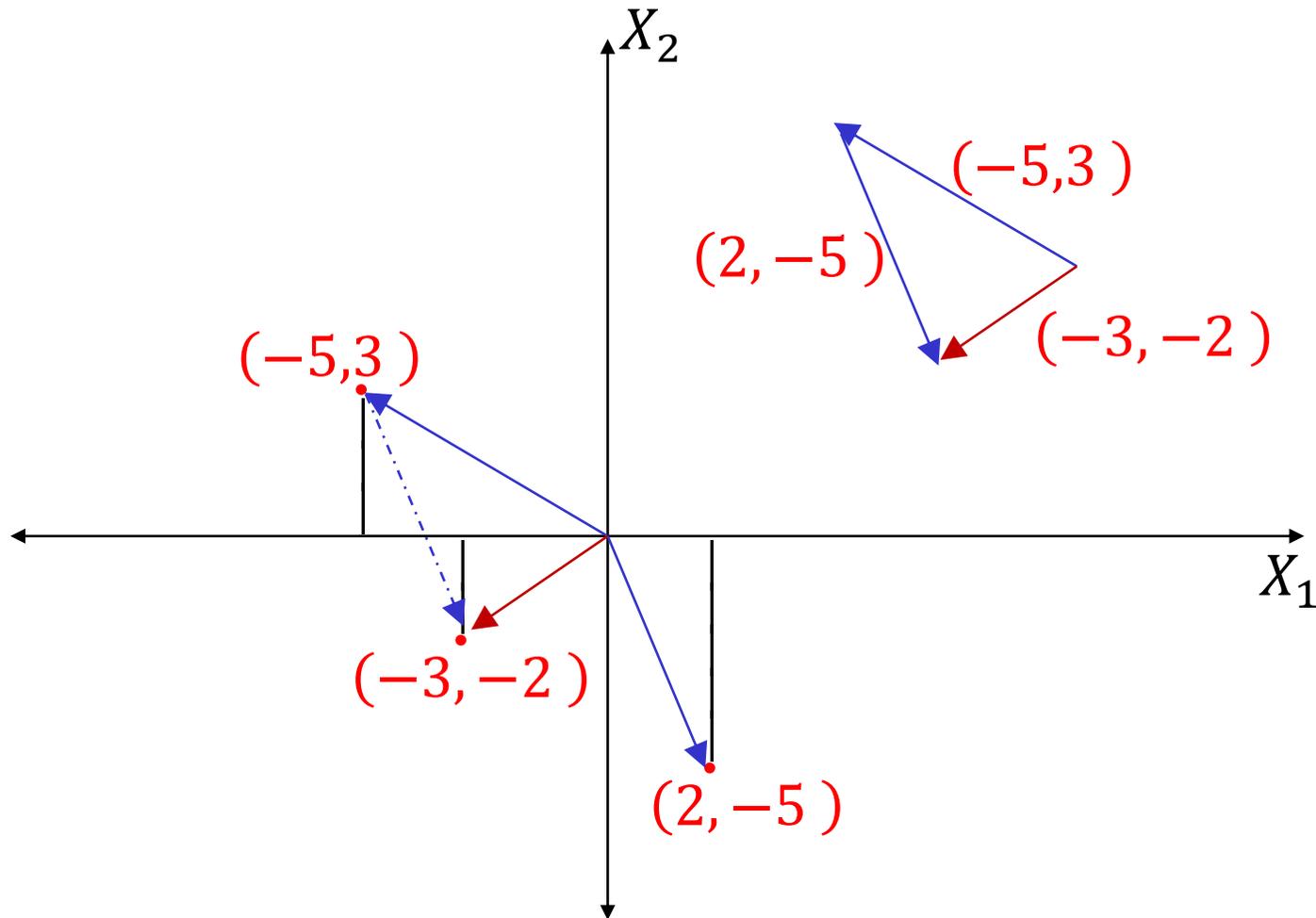
Realizar a segunda dupla, desde a última posição atingida pela primeira dupla, até uma posição final.

Assim, a soma de duplas é o deslocamento desde a posição inicial até a posição final atingida.

Isso é natural, soma de deslocamentos dá um deslocamento final global (apenas um).

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

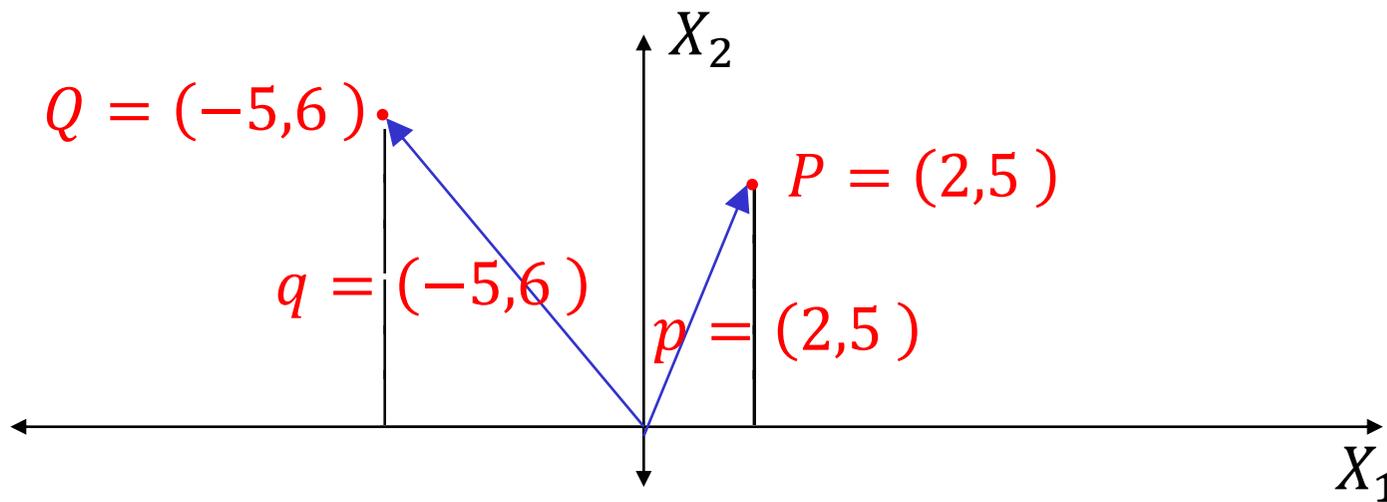


# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

Por outro lado, se considerarmos dois pontos, sabemos que temos dois vetores associados partindo da origem

Exemplo: Os pontos  $P = (2,5)$  e  $Q = (-5,6)$ .



# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

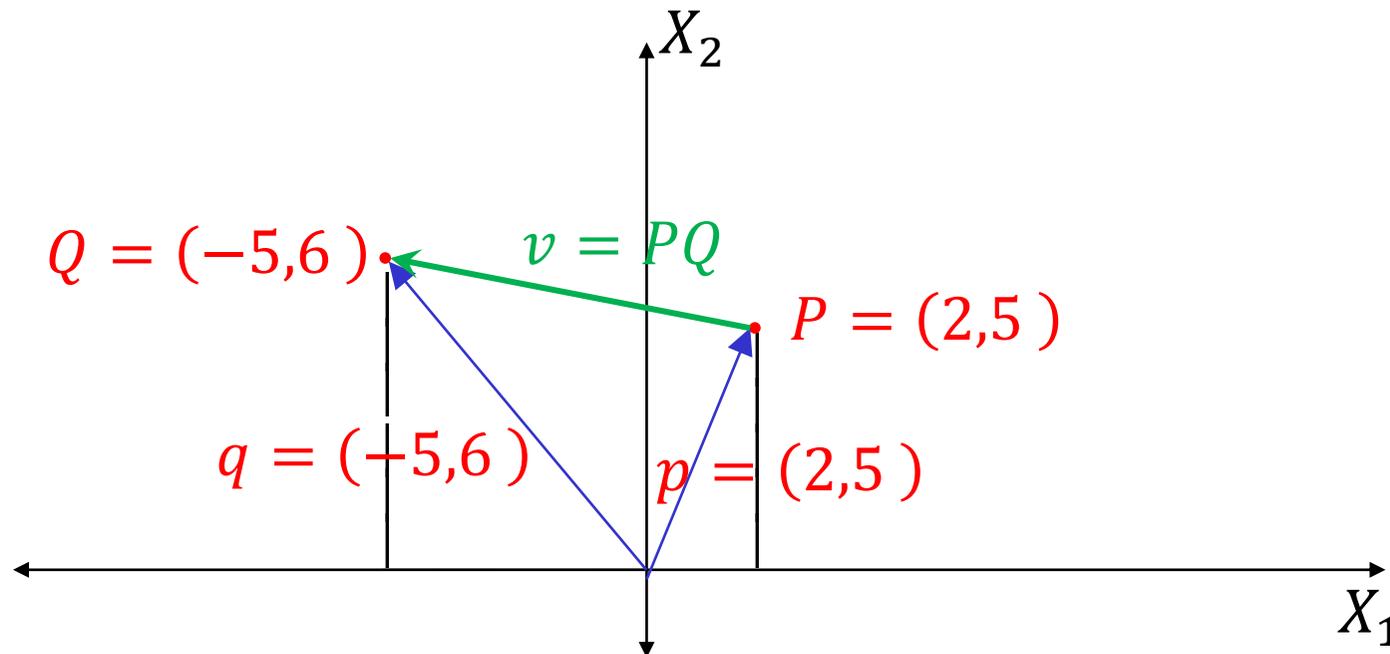
Se unirmos os dois pontos, geramos um vetor que denotaremos por  $v$ . Deve ser definido um sentido, isto é, partir de  $P$  ou partir de  $Q$ .

Se partirmos de  $P$ , o vetor definido chamaremos de  $v = PQ$ , se partirmos de  $Q$  chamaremos o vetor de  $w = QP$ .

Exemplo: Partindo de  $P$ .

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

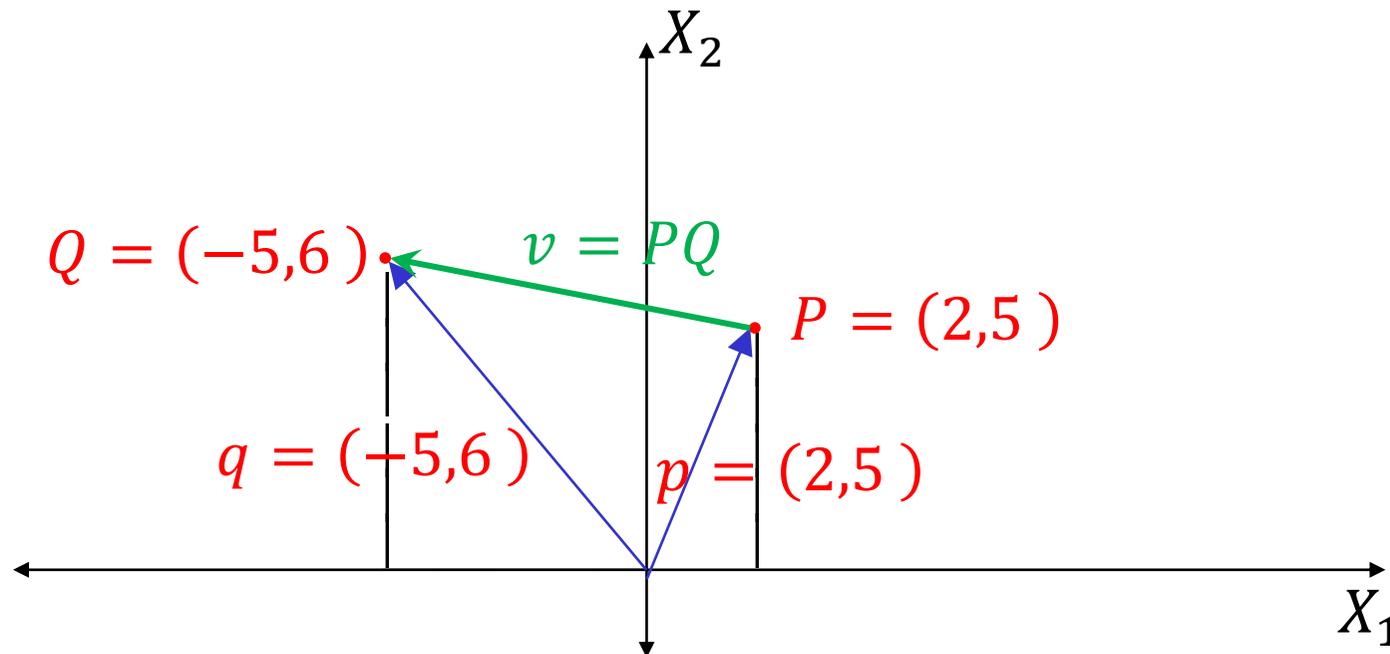
---



Pela soma de vetores:  $p + v = q$ , isto é  $v = q - p$ .

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

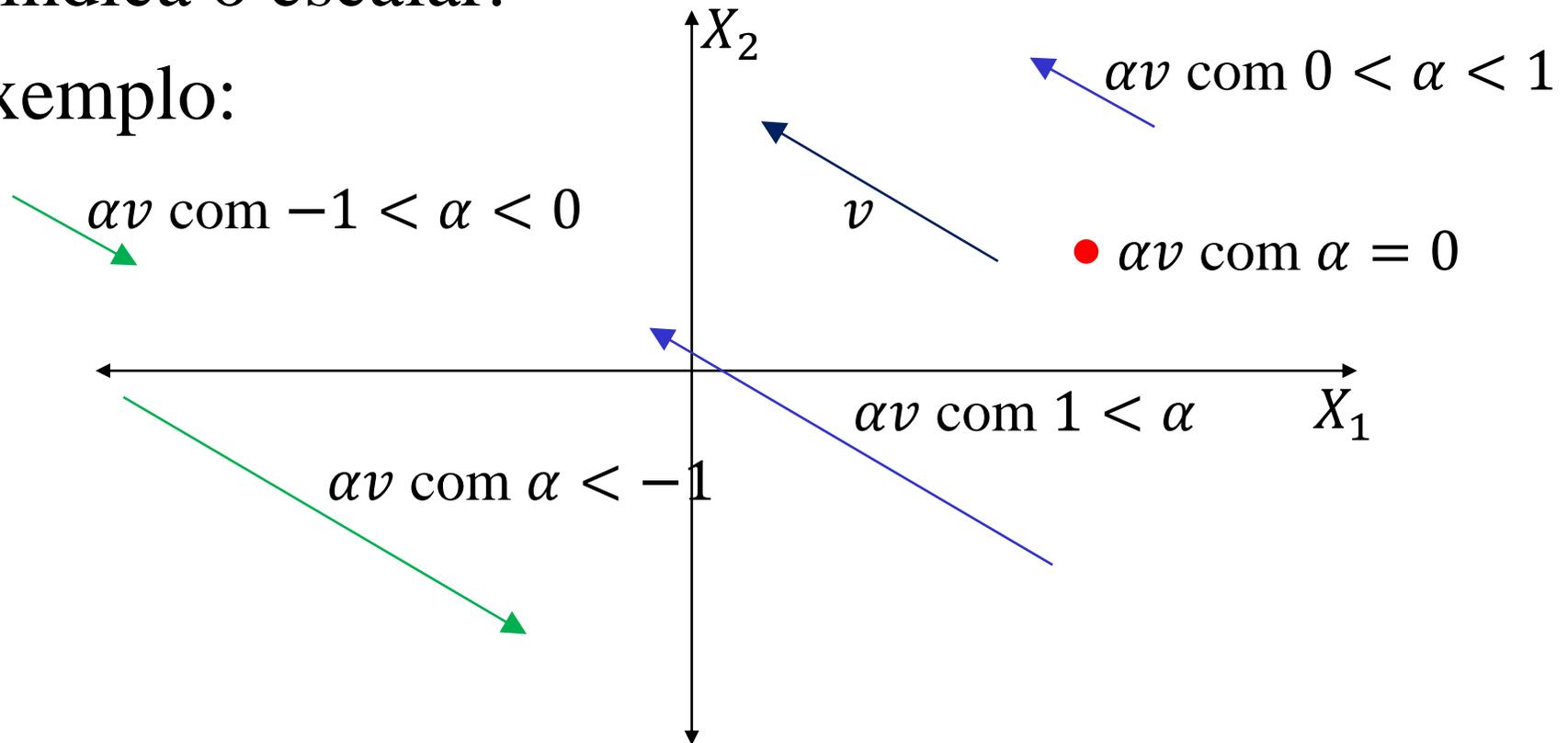


Pela soma de vetores:  $p + v = q$ , isto é  $v = q - p$ .  
Assim, é común escrever  $v = PQ = q - p = Q - P$ .

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

A multiplicação de um escalar  $\alpha$  vezes um vetor  $v$  é realizar o deslocamento total tantas vezes quanto indica o escalar.

Exemplo:

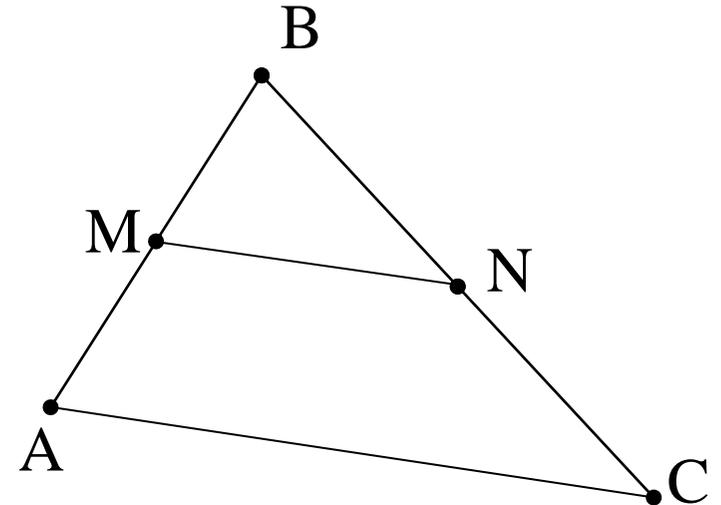
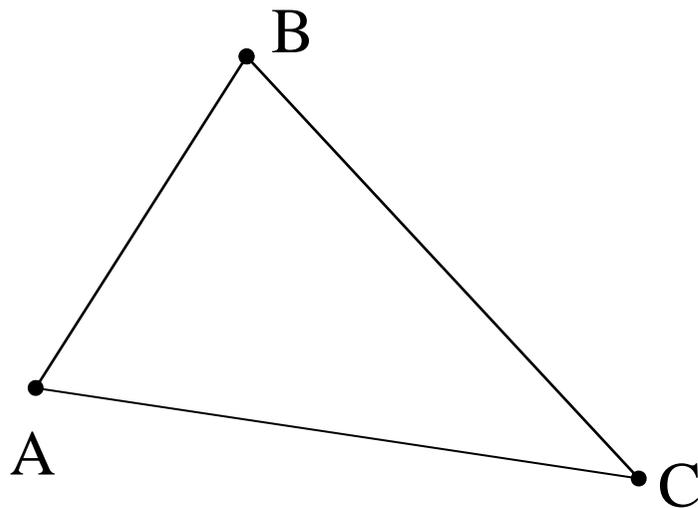


# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

Observar: podemos trabalhar de forma mais fácil alguns resultados da geometria

“Em um triângulo, o segmento que une os pontos médios de dois lados é metade do terceiro lado”



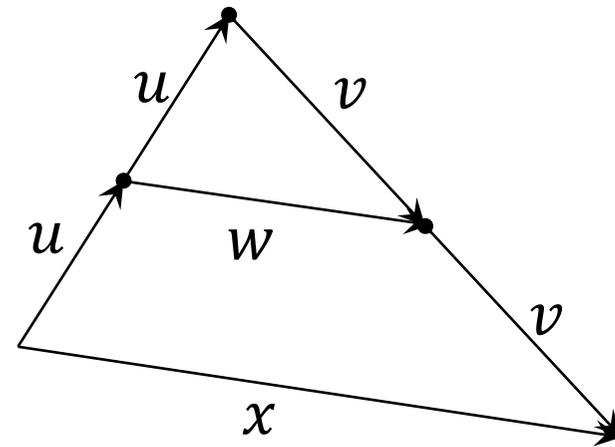
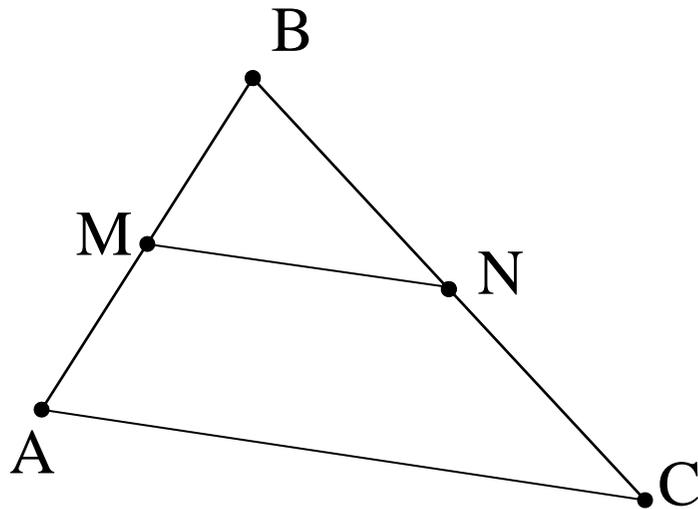
# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

Agora vejamos o triângulo, considerando vetores.

Considerando o segmento  $AM$  como um vetor  $u$  (dando orientação), teríamos que o segmento  $MB$  é o mesmo vetor, pois  $M$  é ponto médio.

Assim, podemos escrever:



# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

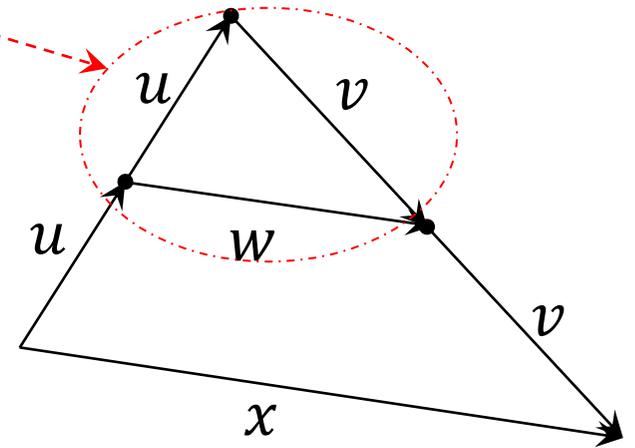
---

Pela soma de vetores

$$w = u + v$$

Também

$$x = u + u + v + v$$



# Espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

---

Pela soma de vetores

$$w = u + v$$

Também

$$x = u + u + v + v$$

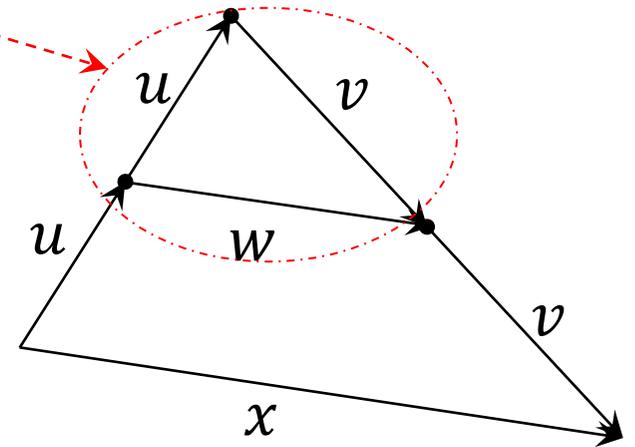
E pelas propriedades

$$x = 2u + 2v$$

$$x = 2(u + v)$$

$$x = 2w$$

O terceiro lado é o dobro do vetor  
que une os pontos médios.



# Espaço vetorial $\mathbb{R}^3$

---

O espaço vetorial

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

com a adição:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

e multiplicação vezes escalar:

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

A interpretação geométrica é similar ao realizado para  $\mathbb{R}^2$ .

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^3$

---

O espaço vetorial

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

com a adição:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

e multiplicação vezes escalar:

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

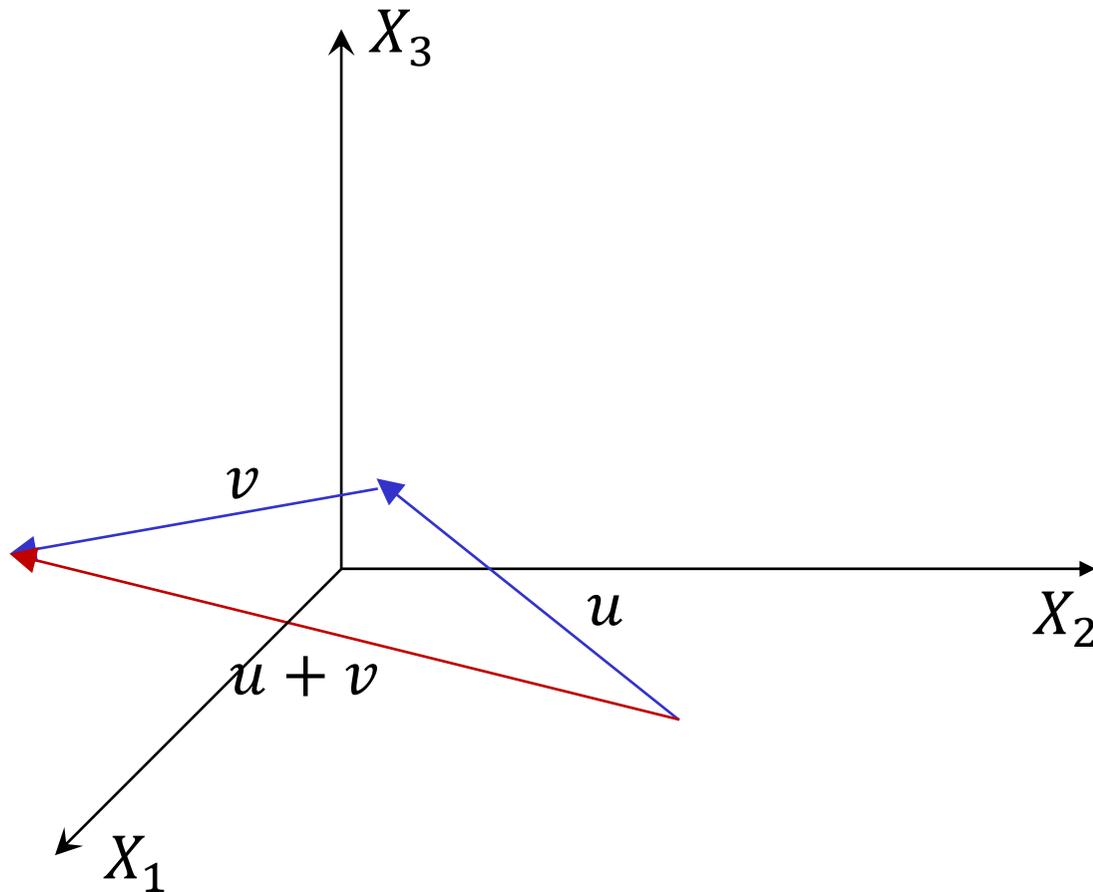
A base canônica de  $\mathbb{R}^3$  é

$$\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

# Espaço vetorial $\mathbb{R}^3$

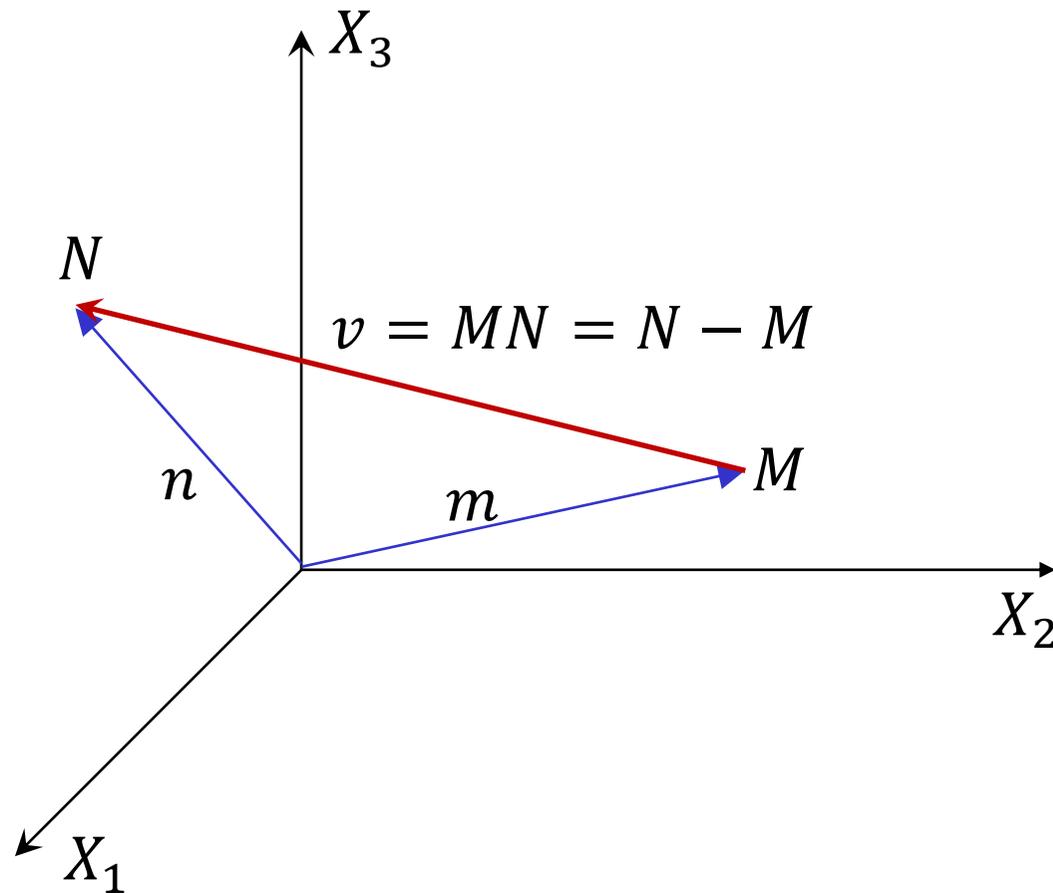
---

Adição



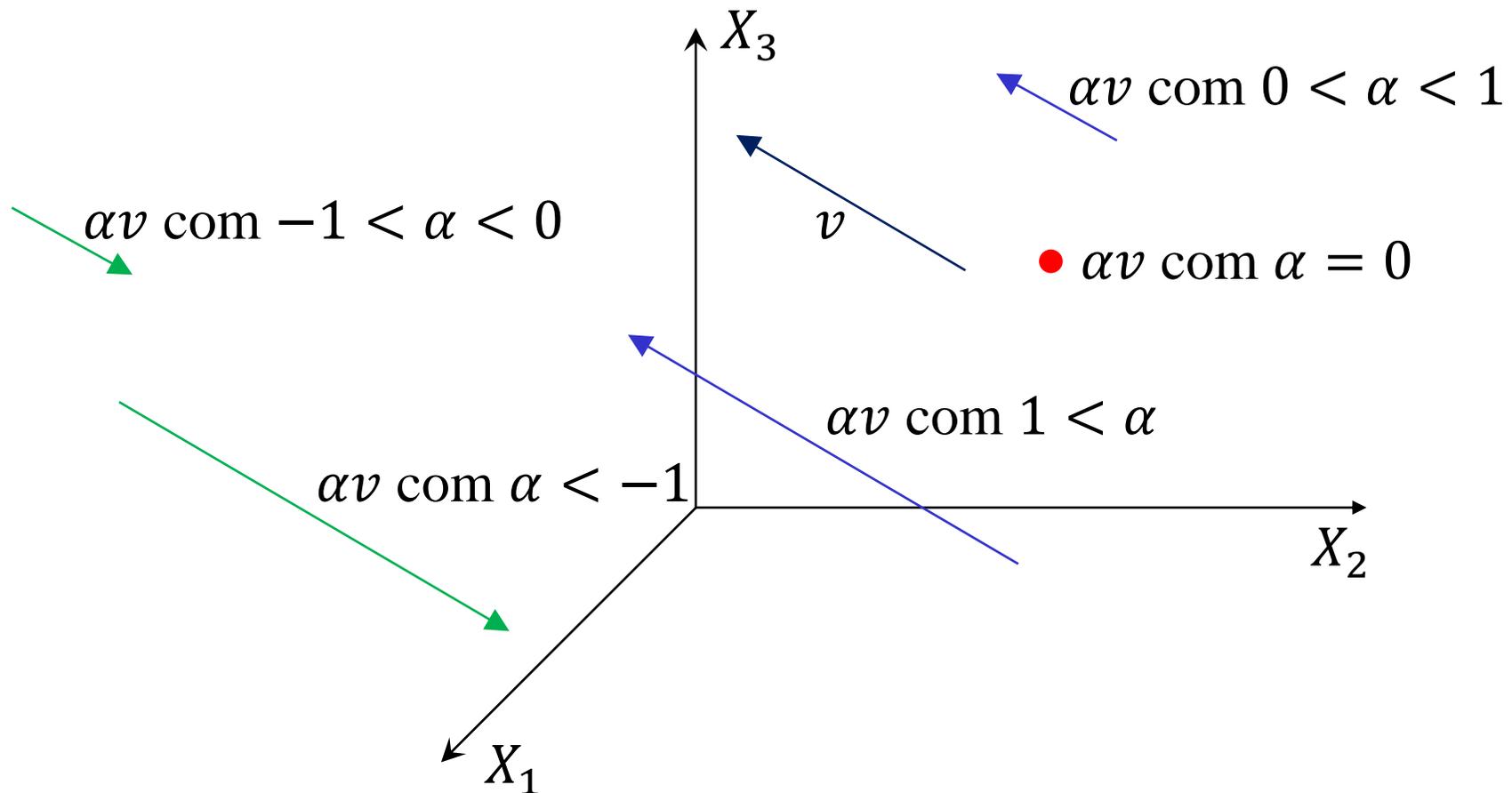
# Espaço vetorial $\mathbb{R}^3$

---



# Espaço vetorial $\mathbb{R}^3$

## Multiplicação vezes escalar



# O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

---

- É possível definir de forma útil outras operações nos espaços  $\mathbb{R}^n$  ?
- Será que existe uma operação como a multiplicação de matrizes?, isto é, multiplicar dois vetores de  $\mathbb{R}^n$  e que o resultado seja outro vetor?
- A resposta é SIM para  $\mathbb{R}^3$  (produto vetorial). Para  $\mathbb{R}^n$  não foi encontrado nenhuma operação útil.
- Para  $\mathbb{R}^n$ , incrementamos mais uma operação “produto escalar” e vamos obter muitos resultados importantes com a definição dessa nova operação.